



(1175 -1240)

## **Din nou despre irul lui Fibonacci**

**NECULAI STANCIU<sup>1</sup>**

### **Abstract**

The purpose of the article is to describe the contributions to Mathematics made by the thirteenth century Italian, Fibonacci. Unfortunately, not much is known about Fibonacci's personal life. Representative problems solved by Fibonacci are set as challenges to the reader.

After a brief historical account of Leonardo Pisano Fibonacci, some basic results concerning the Fibonacci numbers are developed and proved, and entertaining examples are described. Connections are made between the Fibonacci numbers and the Golden Ratio, biological nature, and other combinatorics examples.

We are considering both the originality and power of his methods, and the importance of his results, we are abundantly justified in ranking Leonardo of Pisa as the

---

<sup>1</sup> Prof. , „George Emil Palade” Secondary School, Buz u, Romania;  
e-mail:stanciuneculai@yahoo.com

greatest genius in the field of number theory who appeared between the time of Diophantus and Fermat.

**Key words:** History of Mathematics, Fibonacci's Rabbits, Fibonacci numbers and nature, Divine proportion, Golden Section in Art (Architecture, music and human body), The Fibonacci sequence, Fibonacci identities, matrix methods.

**M.S.C.:** 01-XX, 01AXX, 01A05, 11B39, 11B37, 11B50.

## 1. Istorie.

### 1.1. Cine a fost *Fibonacci*?

*Fibonacci* (1175-1240) a fost unul dintre cei mai mari matematicieni ai evului mediu. S-a născut în Italia, în orașul Pisa, faimos pentru turnul său înclinat, care parcă stă să cadă.

Tatăl său, *Bonacci Pisano*, a fost ofițer vamal în orașul Bougie din Africa de Nord, astfel că *Fibonacci* a crescut în mijlocul civilizației nord-africane. A cunoscut astfel mulți negustori arabi și indieni (deoarece a făcut multe călătorii pe coastele Mediteranei) de unde a deprins tină a lor aritmetică, precum și scrierea cifrelor arabe.

### 1.2. Cărțile lui *Fibonacci*.

În 1202 revine în Italia unde publică un tratat de aritmetică și algebră intitulat "*Incipit Liber Abacci*" (compositus a *Leonardo filius Bonacci Pisano*). În acest tratat introduce pentru prima dată în Europa sistemul de numerație arab, cifre pe care le folosim și în zilele noastre: 0, 1, 2, 3, ..., 9.

În 1220 publică "*Practica Geometriae*", un compendiu de rezultate din geometrie și trigonometrie, apoi în 1225 "*Liber Quadratorum*" în care studia calculul radicalilor cubici. Cărțile lui *Fibonacci* au cunoscut o largă răspândire și încă timp de peste două secole au fost considerate sursele cele mai competente în domeniul numerelor.

Pentru a înțelege mai bine situația din acele vremuri trebuie să aruncăm o privire pe matematica în Europa și în Orient.

#### Matematică arabă

Imperiul arab, odată cu apariția Islamului (sec VII), se extinde foarte repede cuprinzând Orientul Apropiat, o parte din Asia Mică și Centrală, ajungând până la Valea Indului, nordul Africii și Peninsula Iberică. Se ridică importante centre culturale ca: Bagdad, Samarkand, Buhara, Horezm, Damasc, Cordoba, Granada, Sevilla, Toledo, după ce în prealabil fusese distruse Ispahanul, Persepolis și Alexandria.

Matematica arabă este matematica creată sub dominația arabă, nu neapărat aparținând arabilor, deoarece puțini dintre matematicienii arabi erau de origine arabă dar, au asimilat foarte repede cultura Orientului precum și cea Elenă pe care le transmit în diverse părți ale imperiului. Primul mare matematician arab a fost *Al-Horezmi* (780 – 850). Din opera sa se detașează "*Algebra*" structurat pe 4 capitole (Soluțiile ecuațiilor, Calculul dobânzilor, Geometria, Algebra testamentară). *Al-Horezmi* a fost primul matematician care a stabilit reguli pentru adunare, scădere, multiplicare și divizare cu noile numere arabe. De la el provine cuvântul *algoritm* (încerca și spune și numele *Al-Horezmi* repede de câteva ori!). Într-un alt tratat "*tiința transpunerii și a reducerii*", specific procesul manipularii ecuațiilor algebrice, "*al-jabr*", a ajuns la noi ca algebră.

*Abu Kamil* (900), născut în Egipt, este continuator a lui *Al-Horezmi*. În “*Cartea rarităților din aritmetică*” se ocupă cu rezolvarea în numere întregi a sistemelor liniare nedeterminate.

*Abu Wafa* (940 – 997) s-a ocupat cu geometria practică. În lucrarea sa “*Cartea perfectă*” expune bazele trigonometriei, inclusiv teorema sinusurilor. De asemenea rezolvă probleme de trigonometrie sferică, utilizând cu predilecție funcția cotangentă.

*Al-Hazem* (1000) prin “*Cartea opticii*” este un precursor al acestei științe. Tot el formulează axioma lui *Pasch* și încearcă demonstrarea postulatului V al lui *Euclid*.

*Omar Al-Khayyam* (1048 – 1123), este primul matematician care expune o teorie generală a ecuațiilor de gradul III. Recent a fost descoperit un memoriu al său asupra operei lui *Euclid*. *Omar Al-Khayyam*, conducătorul Observatorului astronomic din Ispahan, s-a ocupat și cu “*patrulaterul Saccheri*” (care, de drept ar trebui numit *patrulaterul lui Omar*), apoi a dat prima formulare a *axiomei lui Arhimede*. Era vestit și ca poet.

*Al-Biruni* (973 – 1048), persan de origine, este cel care în 1030 introduce cercul trigonometric. Tot el calculează lungimea meridianului terestru la 41.550 km.

*Nassir ed Din al Tusi* (1201 – 1274), conducătorul Observatorului astronomic din Maraga, s-a ocupat cu teoria paralelelor. În “*Tratatul despre patrulaterul complet*” a făcut o expunere integrală a rezolvării triunghiurilor (plane și sferice).

*Al-Kashi* (1400), iranian de origine, în “*Chia aritmeticii*” se ocupă cu formula binomului și cu extragerea rădăcinii. S-a ocupat intens și de calcule aproximative, iar în “*Tratatul despre circumferință*” din 1424, dă valoarea numărului  $\pi$  cu 16 zecimale exacte.

De aici, matematica și în general cultura arabă decadează.

### **Matematica evului mediu.**

Cruciadele (campanii pentru recucerirea locurilor sfinte), prilejuiesc stabilirea de legături cu cultura arabă musulmană (mai ales în Spania și Sicilia) precum și cu Bizanțul.

După ce Spania este recucerită de mauri, Toledo devine centru cultural de prestigiu. În acest moment încep traducerile din arabă. Printre primii traducători este englezul *Adelard de Bath* (1100) care, deghizat ca student mahomedan la Cordoba traduce din limba arabă “*Elementele*” lui *Euclid* și “*Algebra*” lui *Al-Horezmi*, iar din limba greacă, opera lui *Ptolemeu*. Din aceeași perioadă se remarcă și alți traducători ca: *Ioannes din Sevilla* și *Gerardo din Cremona* (1114 – 1187) care au tradus circa 80 de lucrări clasice din limba arabă. Ambii au lucrat la Toledo.

Secolele XII – XV reprezintă perioada de asimilare a matematicii antice și a celei orientale.

*Leonardo da Pisa*, este pe drept considerat **primul mare matematician original al Europei**. În numeroasele sale călătorii (Egipt, Siria, Grecia, Sicilia) ia contact cu cultura elenă și cea arabă.

## LIBER ABACI – O CARTE REMARCABIL



Povestea numerelor apare în Italia în 1202, o dată cu apariția cărții *Liber Abaci*, scrisă de *Leonardo Pisano*, pe atunci în vârstă de 27 de ani. Cartea, care are 15 capitole, este scrisă în întregime de mână, tiparul aparând abia după 300 de ani mai târziu. *Leonardo*, a fost inspirat să scrie cartea după o vizită la Burgia, un oraș prosper algerian, unde tatăl său era consul de Pisa. În acest timp, *Fibonacci* a învățat secretele sistemului de numere indo-arab, pe care arabii l-au introdus în Vest în timpul cruciadelor.

Cartea a atras numeroși adepți în rândul matematicienilor din Italia, precum și din restul Europei. *Liber Abaci*, a dezvoltat oamenii obișnuiți cu totul altă lume, unde numerelor au înlocuit literele. *Fibonacci* începe cartea cu noțiuni despre identificarea numerelor, de la unități la cifra zecilor, a sutelor, a miilor etc. În ultimile capitole găsim calcule cu numere întregi și fracții, regulile proporțiilor, extrageri de rădăcini p tratate și de ordin superior, apoi se prezintă soluțiile ecuațiilor liniare și practice.

*Liber Abaci* era plin cu exemple practice: calcule de contabilitate financiară, calculul profitului, schimbul de bani, conversia greutăților, calculul împrumutului cu dobândă (interzis în acel timp în diverse locuri ale lumii).

Deși era cunoscut în anul 1000, și deși *Liber Abaci* a explicat avantajele sistemului de numere indo-arab, nu a prins la scară mare până aproape în 1500 e.n. Motivele au fost, în mare parte două. Primul este de inerție umană și rezistența la schimbarea a omului, pentru că învățarea unui sistem radical nou cere timp și de fapt că biserica catolică din acea perioadă considera cifrele arabe de origine păgână. Al doilea motiv este de natură practică, deoarece era mult mai ușor să se comită fraude. Era tentant schimbarea lui 0 în 6 sau 9, iar 1 putea fi ușor înlocuit cu 4, 6, 7, sau 9 (de atunci europenii scriu 7 cu codi!).

Deși noile numere au apărut în Italia, Florența a emis un edict în 1229 prin care interzicea bancherilor folosirea simbolurilor "infidele". Ca rezultat, mulți dintre cei care voiau să învețe noul sistem se deghizau în musulmani.

### Originea sistemului de numere.

Putem aprecia succesul lui *Fibonacci* cu *Liber Abaci* doar dacă privim cum a evoluat societatea, din punctul de vedere al numerelor, până la el. Măsurarea și numărarea au apărut cu câteva zeci de mii de ani înaintea lui Hristos. Oamenii au înființat primele așezări pe malurile Tigrului și Eufratului, Nilului, Gangelui, Indului și Amazonului. Fluviile erau folosite pentru comerț și transport, iar aventurierii au descoperit mările și oceanele unde se vărsau apele. Căle toriile pe distanțe lungi cereau

în surarea timpului și calcule precise. Preoții erau de obicei astronomi, iar din astronomie a venit matematica.

În 450 î.e.n., grecii au inventat un sistem numeric alfabetic, care folosea cele 24 de litere ale alfabetului grecesc și alte trei litere, care mai târziu au dispărut. Fiecare număr de la 1 la 9 avea propria literă, la fel și multiplii de 10. Alfa, însemna 1, iar “ro” reprezenta 100. Astfel, 112 se scria “ro-deca-beta”. Acest sistem se putea folosi cu greutate pentru calcule. *Abacul*, era cel mai vechi aparat de numărat din istorie.

Un occidental, matematician din Alexandria, *Diofantus*, prin 250 e.n., a sugerat un sistem de numere comparative cu sistemul de litere. Remarcabilele sale invenții au fost ignorate vreme de 1500 de ani. Până la urmă, lucrarea sa a fost recunoscută cum se cuvine și a jucat un rol important în algebra secolului al XVII-lea. Ecuațiile algebrice, de forma  $ax + by = c$ , se numesc “*ecuații diofantice*”.

Piesa centrală a sistemului indo-arab a fost inventarea lui “zero”, “*sunya*” la indieni, “*cifr*” în arab, “*tsfira*” în rusește – ceea ce înseamnă “număr”. Terminul provine de la “*cipher*”, ceea ce înseamnă “gol” și se referă la coloana goală de la *abac*.

### 1.3. irul lui *Fibonacci*. Numele *Fibonacci*.

*Fibonacci* a rămas în memoria noastră prin irul : 0, 1, 1, 2, 3, ... introdus în anul 1202, atunci matematicianul fiind sub numele de *Leonardo Pisano* (*Leonard din Pisa*). Mai târziu, matematicianul însuși și-a spus *Leonardus Filius Bonacii Pisanus* (*Leonard fiul lui Bonaccio Pisanul*). În secolul al XIV-lea irul prezentat mai sus a fost denumit irul lui *Fibonacci* prin contractarea cuvintelor *filius Bonacii*. Acest ir apare pentru prima dată în cartea menționată mai sus “*Liber Abaci*” (“*Cartea despre abac*”), fiind utilizat în rezolvarea unei probleme de matematică.

### 1.4. Iscusința a lui *Fibonacci*. Problema iepurilor. Originea irului *Fibonacci*.

Potrivit obiceiului din acea epocă, *Fibonacci* a participat la concursuri matematice (adevrate dispute publice) pentru cea mai bună și mai rapidă soluție a unor probleme grele (ceva în genul Olimpiadelor Naționale). Iscusința de care dădea dovadă în rezolvarea problemelor cu numere uimite pe toată lumea, astfel că renumele lui *Leonardo* a ajuns până la împăratul Germaniei, *Frederik al II-lea*. La un concurs prezidat de acest împărat una din probleme date spre rezolvare a fost: “să se găsească un număr perfect, care să rămână număr perfect dacă este înrit sau micorât cu 5”. După un timp scurt de

gândire *Fibonacci* a găsit numărul  $\frac{1681}{144} = \left(\frac{41}{12}\right)^2$ . Într-adevăr:  $\frac{1681}{144} - 5 = \frac{961}{144} = \left(\frac{31}{12}\right)^2$  și

$\frac{1681}{144} + 5 = \frac{2401}{144} = \left(\frac{49}{12}\right)^2$ . Nu se știe raționamentul lui *Fibonacci* dar, toate încercările,

chiar și cele mai ingenioase, de a rezolva această problemă cu ajutorul algebrei, duc în cel mai bun caz la o ecuație cu 2 necunoscute.

La un alt concurs prezidat de împărat problema propusă concurenților suna astfel: “Plecând de la o singură pereche de iepuri și știind că fiecare pereche de iepuri produce în fiecare lună o nouă pereche de iepuri, care devine productivă la vârsta de o lună, calculați câte perechi de iepuri vor fi după  $n$  luni (se consideră că iepurii nu mor în decursul respectivei perioade de  $n$  luni)”.

*Soluție*. Din datele problemei rezultă că numărul perechilor de iepuri din fiecare lună este un termen al irului lui *Fibonacci*. Într-adevăr, să presupunem că la 1 ianuarie există o

singur pereche fertil de iepuri. Notăm cu  $f_1$  perechea respectiv .Ea corespunde numărului  $f_2$  din șirul lui Fibonacci:

$$f_2 = f_0 + f_1 = 0 + 1 = 1.$$

La 1 februarie, mai există o pereche pe care o notăm 1.1. Deci în acest moment sunt două perechi, ceea ce corespunde termenului:

$$f_3 = f_1 + f_2 = 1 + 1 = 2.$$

La 1 martie sunt 3 perechi, două care existau în februarie și una nouă care provine de la perechea numărul 1 (se înțelege că o pereche devine fertilă după două luni). Notăm cu 1.2 această nouă pereche. Numărul perechilor din această lună corespunde termenului:

$$f_4 = f_2 + f_3 = 1 + 2 = 3.$$

La 1 aprilie există 5 perechi și anume: trei perechi existente în luna martie, o pereche nouă care provine de la perechea 1 și o pereche nouă care provine de la perechea 1.1 care la 1 martie a devenit fertilă (pereche pe care o notăm cu 1.1.1). Numărul perechilor din această lună corespunde termenului:

$$f_5 = f_3 + f_4 = 2 + 3 = 5.$$

Termenii din această relație se interpretează astfel:

$f_n$  = numărul perechilor existente în luna precedentă;

$f_{n-1}$  = numărul perechilor noi (provin de la perechile existente în luna anteprecedentă).

Procedând în continuare în acest fel, vom deduce că la data de 1 decembrie numărul perechilor este dat termenul:

$$f_{13} = f_{11} + f_{12} = 89 + 144 = 233,$$

iar la 1 ianuarie anul următor există:

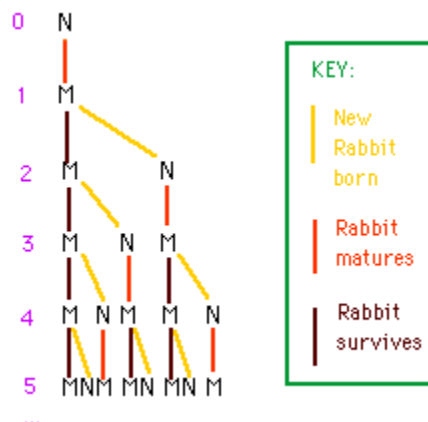
$$f_{14} = f_{12} + f_{13} = 144 + 233 = 377 \text{ perechi de iepuri.}$$

Concluzia este următoarea:

Dacă notăm cu  $f_n$  numărul de perechi de iepuri după  $n$  luni, numărul de perechi de iepuri după  $n+1$  luni, notat cu  $f_{n+1}$ , va fi  $f_n$  (iepurii nu mor niciodată!), la care se adaugă iepurii nou-născuți. Dar iepurii se nasc doar din perechi de iepuri care au cel puțin o lună, deci vor fi  $f_{n-1}$  perechi de iepuri nou-născuți.

Obținem astfel o relație de recurență:

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \text{ care generează termenii șirului lui Fibonacci.}$$



**Observa ie.** Acest ir exprim într-un mod naiv cre terea popula iei de iepuri. Se presupune c iepurii au câte doi pui o dat la fiecare lun dup ce împlinesc vârsta de dou luni. De asemenea, puii nu mor niciodat i sunt unul de sex masculin i unul de sex feminin.

## 2. Fibonacci, num rul de aur, natura i arta.

### 2.1. Fibonacci i “num rul de aur”

Raportul de aur este un num r ira ional (1.618033...), putând fi definit în diferite moduri dar, cel mai important concept mathematic asociat cu regula de aur fiind d irul lui *Fibonacci*. Imp r ind orice num r la predecesorul s u, se ob ine aproximativ num rul de aur. Primii care l-au folosit au fost egiptenii, majoritatea piramelor fiind construite înând cont de num rul de aur. Grecii au fost îns cei care l-au denumit astfel, folosindu-l atât în arhitectur cât i pictur i sculptur . Dealtfel num rul de aur se noteaz cu litera greceasc “fi” ( $\varphi$ ), de la sculptorul grec *Phidias*. El a construit Parthenonul pornind de la acest raport.

S începem cu o problem estetic . S consider m un segment de dreapt . Care este cea mai “pl cut ” împ r ire a unui segment în dou p r i? Grecii antici au g sit un r spus pe care ei îl considerau corect (teoreticienii îl numesc “simetrie dinamic ”). Dac p r ii stângi a segmentului îi atribuim lungimea  $u = 1$ , atunci partea dreapt va avea o lungime  $v = 0.618...$  Despre un segment parti ionat astfel spunem c este împ r it în sec iunea , sau propor ia sau diviziunea de aur (divin ). Ideea este c lungimea  $u$  reprezint aceea i parte din tot segmentul  $(u + v)$  cât reprezint lungimea  $v$  din partea  $u$ . Cu alte cuvinte:

$$\frac{u+v}{u} = \frac{u}{v}.$$

Dac not m  $\varphi = \frac{u}{v}$ , observ m c :

$$1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{u}{v} = \frac{u+v}{u} = \frac{u}{v} = \varphi, \text{ i este r d cina pozitiv a ecua iei } \varphi^2 - \varphi - 1 = 0,$$

adic  $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.6180339887...$  Dac presupunem  $u = 1$ , atunci :

$$v = \frac{u}{\varphi} = \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0.6180339887...$$

Afirm m acum c  $\varphi$  este strâns legat de irul lui Fibonacci. Aceasta este o idée remarcabil a matematicii .

Mai observ m c :

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}} = \dots = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}}$$
 este o frac ie infinit .

Dac privim frac iile par iale :

$$1 = \frac{1}{1}, \quad 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}, \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{3}{2}, \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{5}{3}, \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = \frac{8}{5},$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}} = \frac{13}{8}$$

observăm că toate rezultatele sunt rapoarte de numere Fibonacci,

fapt ce motivează teorema care spune că :

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi$ . În cuvinte putem spune că, pe măsură ce  $n$  se apropie de infinit, raportul termenilor al  $n+1$ -lea și al  $n$ -lea din șirul lui Fibonacci se apropie de  $\varphi$ .

La fel de simplu cum  $\varphi$  este o fracție infinită, tot așa poate fi și un radical infinit:

$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}$ . Altă aplicație a numărului  $\varphi$  apare la pentagonul regulat deoarece :

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \varphi \quad \text{și} \quad 2 \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{3 - \varphi}.$$

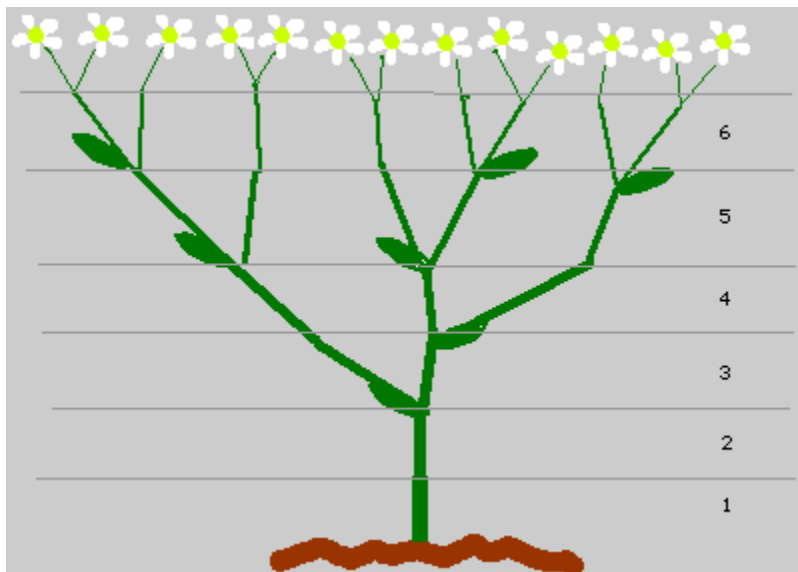
De asemenea există o legătură între dreptunghiurile de aur și șirul lui *Fibonacci* deoarece lungimea și lățimea celui de-al  $n$ -lea dreptunghi pot fi scrise ca expresii liniare, unde coeficienții sunt întotdeauna numere *Fibonacci*. Aceste dreptunghiuri pot fi înscrise într-o spirală logaritmică. Spiralele logaritmice se întâlnesc destul de des în natură (carcasa unui melc, colții unui elefant sau conurile de pin). Asemenea spirale sunt echiangulare, în sensul că orice dreaptă trece prin punctul  $(x_0, y_0) = \left(\frac{1+3\varphi}{5}, \frac{3-\varphi}{5}\right)$

taie spirala sub un unghi constant.

## 2.2. Fibonacci și plantele.

Plantele nu au cum să cunoască numerele lui *Fibonacci*, dar se dezvoltă în cel mai eficient mod.

a. multe plante au aranjamentul frunzelor dispus într-o secvență *Fibonacci* în jurul tulpinei;



b. anumite conuri de pin respect o di spunere dat de numerele lui *Fibonacci* ;  
 c. floarea soarelui are semin ele dispuse dup o secven *Fibonacci*;



d. inelele de pe trunchiurile palmierilor respect numerele lui *Fibonacci*;  
 e. num rul petalelor florilor este, de cele mai multe ori, un num r al s ecven ei *Fibonacci*:  
 e.1. cala are 1 petal ;  
 e.2. euphorbia are 2 petale;  
 e.3. irisul i crinul au 3 petale;  
 e.4. viorelele, lalelele, trandafirul s lbatic i majoritatea florilor au 5 petale;  
 e.5. margaretele pot avea 21 de petale sau 34 de petale i exemplele sunt nenum rate;



e.6.florile cu un număr de petale care nu sunt în secvența *Fibonacci* sunt rare și considerate speciale.

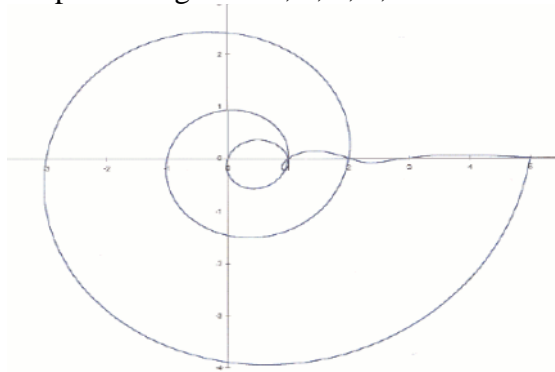
Concluzia este realizarea unui optim, a unei eficiențe maxime. Dacă se urmează secvența lui *Fibonacci*, frunzele unor plante pot fi dispuse astfel încât să ocupe un cât mai mic spațiu și să obțină cât mai mult soare.

Ideea dispunerii frunzelor în acest sens pleacă de la considerarea unghiului de aur de 222.5 grade; unghi care împartea la întregul 360 de grade va da ca rezultat numărul irațional 0.61803398..., cunoscut ca rațiunea lui *Fibonacci*.

### 2.3. Cochilia melcului, furnica și *Fibonacci*

Designul cochiliei melcului urmează o spirală foarte reușită, o spirală greu de realizat cu pixul. Studiat în amănunt s-a ajuns la concluzia că această spirală urmărește dimensiunile date de secvența lui *Fibonacci*:

- pe axa pozitivă :1, 2, 5, 13, ... a.m.d
- pe axa negativă :0, 1, 3, 8, ... a.m.d.



Se observă că aceste 2 subiri combinate dau numerele lui *Fibonacci*.

În acest caz rațiunea și motivația pentru această dispunere este simplă: în acest fel cochilia își crează melcului, în interior un maxim de spațiu și de siguranță.



©Nautilus



©Eriq Saper - Eriq Saper Nautilus Shell

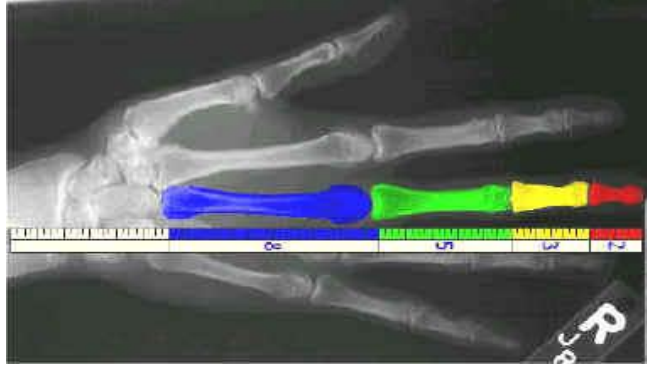
Furnica are corpul împărțit în trei segmente, după diviziunea de aur.

### 2.4. *Fibonacci* și corpul uman.

Fața umană este caracterizată, din punct de vedere estetic prin câteva dimensiuni principale: distanța între ochi, dintre gură și ochi și distanța dintre nas și ochi, dimensiunea gurii. În știința esteticii se apreciază că fața este cu atât considerată mai plăcută ochiului cu cât aceste dimensiuni respectă secvența lui *Fibonacci* mai bine.

De exemplu raportul dintre distanța de la linia surâsului (unde se unesc buzele) până la vârful nasului și de la vârful nasului până la baza sa este aproximativ raportul de aur

Mâna uman are 5 degete (număr din irul *Fibonacci*), fiecare deget având 3 falange separate prin 2 încheieturi (numere din irul *Fibonacci*). Dimensiunile falangelor sunt: 2 cm, 3 cm, 5 cm. În continuarea lor este un os al palmei care are 8 cm.



### 2.5. *Fibonacci*, numărul de aur și arta.

Dacă privim lucrările unor mari artiști, fie ei pictori, arhitecți, sculptori sau fotografi, se observă că multe dintre ele au la bază regula de aur. Conform acesteia, “pentru ca un întreg împărțit în părți inegale să pară frumos, trebuie să existe între partea mică și cea mare același raport ca între partea mare și întreg” (*Marcus Pollio Vitruvius*, arhitect roman).

*Rudolf Arnheim* (psiholog, s-a ocupat de psihologia artei) dă o explicație acestui lucru astfel: “Acest raport este considerat ca deosebit de satisfăcător datorită modului în care îmbină unitatea cu varietatea dinamică. Întregul și părțile sunt perfect proporționate, astfel că întregul predominant și amenințat de o scindare, iar părțile își prestează în același timp o anumită autonomie.” (în “Arta și percepția vizuală”).

În pictură a fost folosit mai ales în Renaștere, probabil cea mai discutată utilizare a acestuia fiind în tabloul lui *Leonardo da Vinci*, “Mona Lisa”. Capul, ca și restul corpului, este compus utilizând raportul divin, cum îi spunea *da Vinci*. În prima jumătate a secolului trecut pictorul *Piet Mondrian* utilizează în picturile sale “dreptunghiul de aur”, având raportul laturilor aproximativ 1.618... De fapt, lucrările sale sunt alcătuite numai din asemenea dreptunghiuri. Acest dreptunghi este considerat cea mai armonioasă formă geometrică. Cu toate acestea, rareori este folosit pentru cadre. Dacă se împarte fiecare latură a cadrului fotografic în 8 părți egale (număr din irul *Fibonacci*) și se unesc punctele de pe laturile opuse corespunzătoare diviziunilor 3 și 5 (numere din irul *Fibonacci*) se obțin așa numitele linii forte ale cadrului. Punctele aflate la intersecția liniilor se numesc puncte forte. Practic se pot împărți laturile în trei părți egale, rezultatul este aproximativ același. Se presupune că subiectul amplasat pe aceste linii sau în aceste puncte determină o împărțire armonioasă a imaginii astfel încât ea nu este nici simetrică, nici plictisitoare, nici prea dezechilibrată. De exemplu, două fotografii de *Robert Doisneau*, “L’accordioniste”, 1951 și “The cellist”, 1957 și fotografia “Poplar Trees” a lui *Minor White* în care toate liniile converg spre un punct forte. *Ansel Adams* se împotriva regulilor, canoanelor. El spunea “așa zisele reguli de fotocompoziție sunt invalide, irelevante și imateriale; nu există reguli de compoziție în fotografie, există doar fotografii bune. Cei mai mulți fotografi încalc regulile fotocompoziției”. Cu toate acestea și în

imaginile lui se observă diviziunea de aur (vezi fotografia "Aspens", 1958). Asta înseamnă că de obicei nu era de acord cu regulile le cunoștea foarte bine. Dacă fotografia are valoare cu subiectul în centru, atunci încălca regula diviziunii de aur! Subiectul trebuie să fie în armonie cu celelalte elemente din cadru. Dacă astfel se verifică și diviziunea de aur, este perfect! Toate acestea arată importanța acestui număr, astfel că toți marii fotografi au ținut în cont de el în conceperea unei fotografii.

Până și în muzică apare acest raport, se presupune că Bach sau Beethoven au ținut în cont de el în compozițiile lor.

Atunci când scrie  $i$ , duce instinctiv linia din mijloc a literii E (la fel și cu A, F, B, R, ...)

aproximativ la  $\frac{2}{3}$  de bază (aproximativ raportul de aur).

**Concluzie.** Numerele lui Fibonacci sunt considerate a fi, de fapt, sistemul de numere al naturii, un mod de măsurare al Divinității, o legătură între matematică și artă.

### 3. Unele rezultate referitoare la irul lui Fibonacci

Consultând bibliografia enumerată am selectat următoarele rezultate:

Numerele lui Fibonacci  $f_n$  sunt date de următoarea recurență :

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+1} = f_{n-1} + f_n, n \geq 1.$$

**Teorema 1.** Dacă  $x^2 = x + 1$ , atunci avem :

$$x^n = f_n x + f_{n-1}, \forall n \geq 2.$$

**Demonstrăm.** Vom demonstra prin inducție după  $n$ .

Pentru  $n = 2$  relația este trivială. Presupunem că  $\forall n > 2$  avem  $x^{n-1} = f_{n-1}x + f_{n-2}$ .

Atunci

$$x^n = x^{n-1} \cdot x = (f_{n-1}x + f_{n-2})x = f_{n-1}(x+1) + f_{n-2}x = (f_{n-1} + f_{n-2})x + f_{n-1} = f_n x + f_{n-1}.$$

**Teorema 2. (Formula lui Binet).** Termenul al  $n$ -lea din irul lui Fibonacci este dat de:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right), n \geq 0.$$

**Demonstrăm.** Rădăcinile ecuației  $x^2 = x + 1$  sunt  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  și  $1-\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ .

Din Teorema 1., avem  $\varphi^n = \varphi f_n + f_{n-1}$  și  $(1-\varphi)^n = (1-\varphi) f_n + f_{n-1}$ .

În continuare  $\varphi^n - (1-\varphi)^n = \sqrt{5} f_n$ , de unde rezultă formula lui Binet.

**Teorema 3.**  $f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$ .

**Demonstrăm.** Avem relațiile:

$$f_1 = f_3 - f_2, f_2 = f_4 - f_3, f_3 = f_5 - f_4, \dots, f_n = f_{n+2} - f_{n+1}, \text{ care prin adunare dau}$$

$$f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n = f_{n+2} - f_2 = f_{n+2} - 1.$$

**Teorema 4.**  $f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{2n-1} = f_{2n}$ .

**Demonstrăm.** Observăm că :

$$f_1 = f_2 - f_0, f_3 = f_4 - f_2, f_5 = f_6 - f_4, \dots, f_{2n-1} = f_{2n} - f_{2n-2}. \text{ Adunăm relațiile și obținem}$$

identitatea dorită.

**Teorema 5.**  $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$ .

**Demonstra ie.** Avem  $f_{n-1}f_n = (f_{n+1} - f_n)(f_n + f_{n-1}) = f_{n+1}f_n - f_n^2 + f_{n+1}f_{n-1} - f_n f_{n-1}$ .

Atunci , ob inem rela iile  $f_{n+1}f_n - f_n f_{n-1} = f_n^2$  , care prin adunare pentru  $n = 1,2,3,\dots$  , dau rela ia final .

**Teorema 6. (Identitatea lui Cassini).**  $f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n, n \geq 1$ .

**Demonstra ie.** Observ m c :

$$f_{n-1}f_n - f_n^2 = (f_n - f_{n-2})(f_n + f_{n-1}) - f_n^2 = -f_{n-2}f_n - f_{n-1}(f_{n-2} - f_n) = -(f_{n-2}f_n - f_{n-1}^2)$$

Dac not m  $u_n = f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2$  , ob inem  $u_n = -u_{n-1}$  i mai departe  $u_n = (-1)^{n-1}u_1$ .

Din cele de mai sus avem  $f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^{n-1}(f_0f_2 - f_1^2) = (-1)^n$ .

**Teorema 7.(Cesàro).**  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k f_k = f_{3n}$ .

**Demonstra ie.** Utiliz m formula lui Binet ,  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k f_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \frac{\varphi^k - (1-\varphi)^k}{\sqrt{5}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \varphi^k - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k (1-\varphi)^k \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} ((1+2\varphi)^n - (1+2(1-\varphi))^n).$$

Cum  $\varphi^2 = \varphi + 1$  , ob inem  $1+2\varphi = \varphi^3$  i similar  $1+2(1-\varphi) = (1-\varphi)^3$  .

Atunci , rezult  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k f_k = \frac{1}{\sqrt{5}} ((\varphi)^{3n} + (1-\varphi)^{3n}) = \varphi_{3n}$  .

**Teorema 8.(Vorobyov)** Dac  $s \geq 1, t \geq 0$  sunt întregi atunci:

$$f_{s+t} = f_{s-1}f_t + f_s f_{t+1}.$$

**Demonstra ie.** Fix m pe  $t$  i demonstr m prin induc ie dup  $s$ . Pentru  $s = 1$  se ob ine

$f_{t+1} = f_0f_t + f_1f_{t+1}$  , care este adev rat (trivial). Presupunem c  $s > 1$  i c

$f_{s-k+t} = f_{s-k-1}f_t + f_{s-k}f_{t+1}$  pentru orice  $k$  care satisfac  $1 \leq k \leq s-1$ .

Avem  $f_{s+t} = f_{s+t-1} + f_{s+t-2}$  (din recuren a Fibonacci)

$$= f_{s-1+t} + f_{s-2+t} \quad \text{(trivial)}$$

$$= f_{s-2}f_t + f_{s-1}f_{t+1} + f_{s-3}f_t + f_{s-2}f_{t+1} \quad \text{(din presupunerea f cut )}$$

$$= f_t(f_{s-2} + f_{s-3}) + f_{t+1}(f_{s-1} + f_{s-2}) \quad \text{(prin rearanjarea termenilor)}$$

$$= f_t f_{s-1} + f_{t+1} f_s \quad \text{(din recuren a Fibonacci).}$$

**Observa ia 1.** J.R. Sylvester indic o metod elegant care furnizeaz identit i pentru

termenii irului  $(f_n)$  . Mai precis, se consider matricea  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  i se constat c

avem  $A^n = \begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{pmatrix}, n = 1,2,\dots$ . Plecând de la aceast observa ie i utilizând egalit ile

$A^{n+m} = A^n \cdot A^m$ ,  $n, m = 1, 2, \dots$  și  $\det(A^n) = [\det(A)]^n$ , rezultă relațiile din teorema 6. și de asemenea relațiile din teorema 8.

Posibilitățile de a obține identități, folosind ideea de mai sus sunt multiple. Astfel, observăm că  $A^n = f_n A + f_{n-1} I$  (cu  $I$  am notat matricea unitate), iar pentru  $n = 2$ , obținem:  $A^2 = A + I$ . De asemenea avem  $A^{n+2} = A^{n+1} + A^n$ . Enunțate fiind aceste proprietăți ale matricei  $A$ , se observă că puterile acesteia verifică recurența de tip *Fibonacci*. Deoarece  $A \cdot I = I \cdot A = A$ , putem aplica formula binomului lui *Newton* pentru  $A$  și  $I$ , apoi identificând relațiile obținute pe componente se obțin diferite identități. Prezentăm mai jos, fără demonstrație, câteva identități obținute prin metoda expusă mai sus:

$$(1) f_{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_k ; (2) f_{2n+l} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_{k+l} ; (3) f_l = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k f_{2n-k+l} ;$$

$$(4) f_{l+n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k f_{2n-2k+l} ; (5) f_{3n+l} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k f_{k+l} \text{ (teorema lui Cesàro generalizat) ;}$$

$$(6) 2^n f_{n+l} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k f_{3n-3k+l} ; (7) f_l = \sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} (-1)^k f_{3n-2k+l} ;$$

$$(8) f_{nm} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} f_n^{m-k} f_{n-1}^k f_{m-k} .$$

Pentru studenții propun demonstrarea următoarelor identități:

$$(9) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{f_{n-1} f_{n+1}} = 1 ; (10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{f_{n+1} f_{n+2}} = 1 ; (11) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{f_{2^n}} = 4 - \varphi ;$$

$$(12) \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{f_{2n+1}} = \frac{\pi}{4} ; (13) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{\varphi^n} = \frac{1}{\sqrt{5}} ; (14) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+r}}{f_n} = \varphi^r .$$

**Observația 2.** Unii autori, au obținut identități cu termenii irului lui *Fibonacci* cu ajutorul determinanților. Astfel, dacă considerăm irul lui *Fibonacci* : 1, 2, 3, 5, ... se

$$\text{observăm că } f_n = D_{n-1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} \text{ este deci dat de un determinant de}$$

ordinul  $n - 1$ .

Dacă considerăm determinantul de ordinul  $n$ ,  $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$

pe care îl dezvoltăm după elementele primei linii ned :

$$D_n = 2D_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Dacă dezvoltăm în ultimul termen obținem

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Procedăm ca mai sus și deducem :

$$D_{n-1} = 2D_{n-2} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Dacă adunăm membru cu membru ultimile

două egalități obținem :  $D_n + D_{n-1} = 2D_{n-1} - D_{n-2} + 2D_{n-2} \Leftrightarrow D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$ ,

relație de recurență analoagă cu cea din irul lui *Fibonacci*  $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ .

**Teorema 9.**  $f_n | f_{nk}$ ,  $\forall n, k \in \mathbb{N}^*$ .

**Demonstrație.** Prin inducție după  $k \in \mathbb{N}^*$  și orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Pentru  $k=1 \Rightarrow f_n = f_{n-1} \Rightarrow f_n | f_n$  (adevărat).

Presupunem  $f_n | f_{nk}$  și demonstrăm că  $f_n | f_{n(k+1)}$ .

Întrădevar, înănd seama de teorema 8. avem:  $f_{n(k+1)} = f_{nk+n} = f_{nk+1}f_n + f_{nk}f_{n-1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

și deoarece  $f_n | f_n$  și  $f_n | f_{nk}$  rezultă  $f_n | f_{n(k+1)}$ .

**Teorema 10.**  $f_{kn-1} \equiv f_{n-1}^k \pmod{f_n^2}$ ,  $\forall k, n \in \mathbb{N}^*$ .

**Demonstrație.** Se arată tot prin inducție după  $k \in \mathbb{N}^*$ . Pentru  $k=1$  relația este evidentă. Pentru  $k=2$  înținem seama de teoremele precedente și avem ;

$f_{2n-1} = f_n f_n + f_{n-1} f_{n-1} \equiv f_{n-1}^2 \pmod{f_n^2}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Fie  $f_{kn-1} \equiv f_{n-1}^k \pmod{f_n^2}$ . Avem deci

că :  $f_{(k+1)n-1} = f_{kn-1+n} = f_{kn} f_n + f_{kn-1} f_{n-1} \equiv f_{kn-1} f_{n-1} \equiv f_{n-1}^k f_{n-1} \equiv f_{n-1}^{k+1} \pmod{f_n^2}$  și deci conform principiului inducției complete relația este demonstrată.

**Teorema 11.**  $f_{kn-1} \equiv (-1)^{k+1} f_{n-2}^k \pmod{f_n^2}, \forall n \in N^*$ .

**Demonstra ie.** Rela ia se demonstreaz tot prin induc ie complet .Pentru  $k = 1$  ob inem  $f_{n-2} \equiv f_{n-2} \pmod{f_n^2}$  ceea ce este evident.Presupunem c  $f_{kn-2} \equiv (-1)^{k+1} f_{n-2}^k \pmod{f_n^2}$  i s demonstr m c  $f_{(k+1)n-2} \equiv (-1)^{k+2} f_{n-2}^{k+1} \pmod{f_n^2}$  .Întradev r, avem:

$$\begin{aligned} f_{(k+1)n-2} &= f_{kn-2+n} = f_{kn-1}f_n + f_{kn-2}f_{n-1} \equiv f_{kn-1}f_n + (-1)^{k+1} f_{n-2}^k (f_n - f_{n-2}) \equiv \\ &\equiv f_{kn-1}f_n + (-1)^{k+1} f_{n-2}^k f_n + (-1)^{k+2} f_{n-2}^{k+1} \equiv (f_{n-1}^k + (-1)^{k+1} f_{n-2}^k) f_n + (-1)^{k+2} f_{n-2}^{k+1} \equiv \\ &\equiv (-1)^{k+2} f_{n-2}^{k+1} \pmod{f_n^2}. \end{aligned}$$

Am folosit mai sus c  $f_{n-1}^k + (-1)^{k+1} f_{n-2}^k$  se divide cu  $f_{n-1} + f_{n-2} = f_n$ .

Rezult conform principiului induc iei complete c teorema este demonstrat .

**Teorema 12.**  $f_n^2 \mid f_{nf_n}, \forall n \in N^*$ .

**Demonstra ie.**Not m

$$f_n = k .\text{Avem: } f_{nf_n} = f_{nk} = f_{nk-1} + f_{nk-2} \equiv f_{n-1}^k + (-1)^{k+1} f_{n-2}^k \pmod{k^2}.$$

Totodat avem:

$$f_{n-1} = f_n - f_{n-2} \quad \text{i} \quad \text{deci}$$

$$f_{n-1}^k = (f_n - f_{n-2})^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i f_n^{k-i} f_{n-2}^i \equiv (-1)^k f_{n-2}^k \pmod{k^2}.$$

Deci,  $f_{n-1}^k + (-1)^{k+1} f_{n-2}^k \equiv (-1)^k f_{n-2}^k + (-1)^{k+1} f_{n-2}^k \equiv 0 \pmod{k^2}$ , ceea ce demonstreaz teorema.

**Teorema 13.**  $f_n^{m+1} \mid f_{nf_n^m}, \forall m \in N \text{ i } \forall n \in N^*$ .

**Demonstra ie.**Pentru  $m = 1$  afirma ia este echivalent cu teorema 12.Presupunem afirma ia adev rat pentru pentru  $m$  i o demonstr m pentru  $m + 1$ .Vom ar ta c

$f_n^{m+1} \mid f_{nf_n^m} \Rightarrow f_n^{m+2} \mid f_{nf_n^{m+1}}$  .Not m i atunci avem:

$$\begin{aligned} f_{uf_n} &= f_{uf_{n-1}} + f_{uf_{n-2}} \equiv f_{u-1}^{f_n} + (-1)^{f_n+1} f_{u-2}^{f_n} \pmod{u^2} \equiv (f_u - f_{u-2})^{f_n} + (-1)^{f_n+1} f_{u-2}^{f_n} \pmod{u^2} \equiv \\ &\equiv (-1)^{f_n} f_{u-2}^{f_n} + (-1)^{f_n+1} f_{u-2}^{f_n} \equiv 0 \pmod{f_n^{m+1}}. \end{aligned}$$

Am folosit mai sus c din  $f_n^m \mid u$  i  $f_n^m \mid u^2 \Rightarrow f_n^{m+1} \mid f_u$ .

**Teorema 14.**Orice dou numere *Fibonacci* consecutive sunt relative prime.

**Demonstra ie.**Fie  $d = (f_n, f_{n+1})$ . Avem  $f_{n+1} - f_n = f_{n-1}$  de unde rezult  $d \mid f_{n-1}$  .Atunci

$d \mid (f_n - f_{n-1}) = f_{n-2}$  .Repetând procedeul se deduce c  $d \mid f_1$ , deci  $d = 1$ .

Altfel:din teorema 6.,  $f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$  .Rezult  $d \mid (-1)^n$ , i.e.,  $d = 1$ .

**Teorema 15.**  $(f_m, f_n) = f_{(m,n)}$ .

**Demonstra ie.**Not m  $a = (m, n), b = (f_m, f_n), c = f_{(m,n)}$  .Vom ar ta c  $c \mid b$  i  $b \mid c$ .

Deoarece  $a \mid m$  i  $a \mid n$ , conform teoremei 9. avem:  $f_a \mid f_m$  i  $f_a \mid f_n$  .Deci  $f_a \mid (f_m, f_n)$ , i.e.,  $c \mid b$ .

Acum, din Teorema *Bachet-Bezout*, exist numerele întregi  $x, y$  astfel încât  $xm + yn = a$ . Se observ c  $x$  i  $y$  nu pot fi ambele negative, deoarece  $a$  ar fi negativ. Cum  $a|n$  i  $a|m$ , avem  $a \leq n, a \leq m$ . De asemenea,  $x$  i  $y$  nu pot fi simultan pozitive, deoarece am avea  $a = xm + yn \geq m + n$ , contradic ie. Atunci,  $x$  i  $y$  au semne diferite i, f r a restrânge generalitatea presupunem c  $x \leq 0, y > 0$ .

Observ m c :

$$f_{yn} = f_{a-xm} = f_{a-1}f_{-xm} + f_a f_{-xm+1} \text{ (am utilizat teorema 8.)}$$

Cum  $n|yn$  i  $m|(-xm)$ , din teorema 9. rezult c  $f_n|f_{yn}$  i  $f_m|f_{-xm}$ . Acestea implic c

$$(f_m, f_n)|f_{yn} \text{ i } (f_m, f_n)|f_{-xm}. \text{ Din cele de mai sus avem c } (f_m, f_n)|f_a f_{-xm+1}.$$

Dac  $(f_m, f_n)|f_{-xm+1}$ , cum  $(f_m, f_n)|f_{-xm}$  rezult c  $(f_m, f_n)$  ar divide dou numere *Fibonacci* consecutive, contradic ie (conform teoremei 14) în cazul în care  $(f_m, f_n) > 1$ .

Cazul  $(f_m, f_n) = 1$  este trivial. Rezult c  $(f_m, f_n)|f_a$ , ceea ce trebuia demonstrat.

**Teorema 16.** *Dac  $p \neq 5$  este un num r prim impar, atunci  $p|f_{p-1}$  sau  $p|f_{p+1}$ .*

**Demonstra ie.**

**Lema 1.**  $\binom{p-1}{n} \equiv (-1)^n \pmod{p}, 1 \leq n \leq p-1.$

**Demonstra ie.**  $(p-1)(p-2)\dots(p-n) \equiv (-1)(-2)\dots(-n) \equiv (-1)^n n! \pmod{p}$ , de aici concluzia.

**Lema 2.**  $\binom{p+1}{n} \equiv 0 \pmod{p}, 2 \leq n \leq p-1.$

**Demonstra ie.**  $(p+1)(p)(p-1)\dots(p-n-2) \equiv (1)(0)(-1)\dots(-n) \equiv 0 \pmod{p}$ , ceea ce demonstreaz lema.

Din teorema 2. avem:

$$f_n = \frac{1}{2^{n-1}} \left( \binom{n}{1} + 5 \binom{n}{3} + 5^2 \binom{n}{5} + \dots + 5^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{n-1} \right).$$

Din lema 1.,

$$2^{p-2} f_{p-1} \equiv p-1 - (5 + 5^2 + \dots + 5^{\frac{p-3}{2}}) \equiv -\frac{5^{\frac{p-1}{2}} - 1}{4} \pmod{p}.$$

Din lema 2.,

$$2^p f_{p+1} \equiv p+1 + 5^{\frac{p-1}{2}} \equiv (5^{\frac{p-1}{2}} + 1) \pmod{p}.$$

Din cele dou rela ii de mai sus ob inem:

$$2^{2p} f_{p-1} f_{p+1} \equiv -(5^{p-1} - 1) \pmod{p}.$$

Din mica teorem a lui *Fermat*,  $5^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ , pentru  $p \neq 5$  i teorema este demonstrat .

**Not .** Punctul de plecare al acestui articol l-a constituit r spunsul dat de dl. prof. dr. *Ioan Tomescu* (Membru Corespondent al Academiei), Secretarului General al S.S.M.R din România dl. prof. *Mircea Trifu*, în Gazeta Matematic nr.12 / 2007, la întrebarea :

**M.T.:**“Mai sunt dispuși tinerii de astăzi să învețe matematica?”

**I.T.:**”Dacă vom fi prezente în această țară ca pe o frumoasă provocare a spiritului mereu nescotic, este posibil ca tinerii să ajungă să înțeleagă frumusețea și profunzimea unui raționament matematic. Ei mai trebuie ca profesorii să fie capabili să prezinte elevilor impactul matematicii asupra întregii dezvoltări științifice contemporane, conexiunile dintre matematică și informatică și aplicațiile acestora, de exemplu, în criptografie, în studiul genomului uman, în comerțul electronic.”

## Bibliografie

- [1] \*\*\* Gazeta Matematică , 1895 – 2007 .
- [2] Fauvel, J., & van Maanen, J., *History in Mathematics Education* , Boston, 2000.
- [3] Finch, S.R., *Mathematical Constants*, Cambridge University, 2003.
- [4] Knot, R., *Fibonacci Numbers and the Golden Section* , se poate consulta gratuit pe Internet la adresa <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knot/Fibonacci/fib.html>
- [5] Mihăileanu, N., *Istoria Matematicii*, vol. 1, Editura Enciclopedică Română , București, 1974.
- [6] Mihăileanu, N., *Istoria Matematicii*, vol. 2, Editura Științifică și Enciclopedică , București, 1981.
- [7] Vorobyov, N.N., *The Fibonacci Numbers*, The University of Chicago, 1966.
- [8] Santos, D.A., *Number Theory for Mathematical Contests* , Boston, 2007.
- [9] Sylvester, J.R., *Fibonacci properties by matrix methods* , The Mathematical Gazette, vol. 63 (1979), nr. 425, pp. 188 – 191.
- [10] Weisstein, E.W., *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics* , Washington, D.C., 2003.
- [11] Stanciu, N., *Despre numărul lui Fibonacci* , Gazeta Matematică – seria A, nr. 3/2008, pag.150.