

Legătura dintre măsurile Radon și Borel pe \mathbb{R}

Prof. Marinic Nicoleta Daniela

coala cu cls. I-VIII Grecești, jud. Dolj

Vom folosi Teorema de reprezentare Riesz pentru a arăta că orice măsură Borel pozitivă, finită local pe \mathbb{R} este o măsură Radon (implicația inversă reiese din definiție)

Lemă.

Dacă μ este o măsură Radon σ -finită și $E \in \mathcal{B}_\sigma$, atunci pentru $\forall \varepsilon > 0$ (\exists) o mulțime deschisă U și o mulțime închisă F astfel încât $F \subseteq E \subseteq U$ și $\mu(U \setminus F) < \varepsilon$.

Demonstrație.

Cum μ este σ -finită există mulțimi distincte $E_k \in \mathcal{B}_\sigma$ cu $\mu(E_k) < \infty$ astfel încât $E = \cup E_k$. Cum μ este regulată exterior există mulțimi deschise $U_k \supseteq E_k$ astfel încât $\mu(U_k \setminus E_k) < 2^{-k-1} \varepsilon$. Atunci $U = \cup U_k$ este deschis, $U \supseteq E$ și

$$\mu(U \setminus E) \leq \sum_k \mu(U_k \setminus E_k) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cum $E^c = \mathbb{R} \setminus E$ este o mulțime Borel putem aplica același argument pentru E^c pentru a găsi o mulțime deschisă $V \supseteq E^c$ cu $\mu(V \setminus E^c) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Deci, $F = V^c$ este închis, $F \subseteq E$ și $\mu(E \setminus F) =$

$\mu(V \setminus E^c) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. În concluzie,

$$\mu(U \setminus F) \leq \mu(U \setminus E) + \mu(E \setminus F) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Acum, putem completa caracterizarea noastră cu măsurile Radon pe axa reală.

Teoremă .

Clasa măsurilor Radon pe \mathbb{R} coincide cu clasa măsurilor pozitive locale finite pe \mathbb{R} .

Demonstrație.

Din definiție, dacă ν este măsură Radon atunci este o măsură Borel pozitivă, finită local.

Reciproc, presupunem că ν este o măsură Borel pozitivă, local finită.

Vom arăta că ν este regulată și deci este o măsură Radon. Cum $C_c(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\nu)$ putem defini $\langle f, \nu \rangle = \int f \, d\nu$ pentru $f \in C_c(\mathbb{R})$ și astfel se definește o funcțională liniară pozitivă pe $C_c(\mathbb{R})$.

Teorema de reprezentare Riesz implică faptul că există o măsură Radon μ astfel încât $\langle f, \mu \rangle = \langle f, \nu \rangle$ pentru $f \in C_c(\mathbb{R})$.

Presupunem că U este orice submulțime deschisă a lui \mathbb{R} . Atunci putem scrie $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$

unde fiecare K_j este compact.

Susținem că $\exists f_n \in C_c(\mathbb{R})$ cu $0 \leq f_n \leq 1$ și $\text{supp}(f_n) \subseteq U$ astfel încât $f_n = 1$ pe $\bigcup_{j=1}^n K_j$ și pe $\bigcup_{j=1}^{n-1} \text{supp}(f_n)$.

Pentru a demonstra aceasta vom face inducție.

Pentru $n=1$ există o funcție $f_1 \in C_c(\mathbb{R})$ ce satisface $0 \leq f_1 \leq 1$, $\text{supp}(f_1) \subseteq U$ și $f_1 = 1$ pe K_1 .

Presupunem că f_1, f_2, \dots, f_n au fost construite astfel încât să satisfacă proprietățile cerute. Atunci cum

$$F = \left(\bigcup_{j=1}^{n+1} K_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^n \text{supp}(f_j) \right)$$

este o submulime compactă a lui U putem spune că $f_{n+1} \in C_c(\mathbb{R})$ astfel încât $0 \leq f_{n+1} \leq 1$, $\text{supp}(f_{n+1}) \subseteq U$ și $f_{n+1} = 1$ pe F . Aceasta completează inducția.

Din definiție, irul $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ este ir monotón crescător de funcții și $f_n \rightarrow \chi_U$ punctual. Din Teorema de convergență monotón aplicată lui μ și ν avem

$$\mu(U) = \int \chi_U d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\nu = \int \chi_U d\nu$$

Deci, μ și ν sunt egale pe toate mulțimile deschise.

Fie acum E orice mulțime Boreliană și alegem $\varepsilon > 0$. Atunci, din lema rezultă că \exists un deschis U și o mulțime închisă F astfel încât $F \subseteq E \subseteq U$ și $\mu(U \setminus F) < \varepsilon$.

Cum $U \setminus F$ este deschis, μ și ν îi asignează aceeași măsură, deci avem $\nu(U \setminus F) < \varepsilon$ de asemenea. Mai mult

$$\nu(U) = \nu(U \setminus F) + \nu(F) \leq \varepsilon + \nu(E)$$

Deci, $\nu(E) = \inf \{ \nu(U) : U \supseteq E, U \text{ deschis} \}$ deci ν este regulat exterior pe \forall mulțime Boreliană.

De asemenea, avem

$$\nu(E) = \nu(E \setminus F) + \nu(F) \leq \varepsilon + \nu(F).$$

Deși F nu trebuie neapărat să fie compact, dacă definim $F_K = F \cap [-K, K]$ atunci F_K este compact și $\nu(F_K) \rightarrow \nu(F)$. Dacă $\nu(E) < \infty$ atunci există un k astfel încât $\nu(F_K) \geq \nu(F) - \varepsilon$ și, deci, $\nu(F_K) \geq \nu(E) - 2\varepsilon$. Dacă $\nu(E) = \infty$ atunci $\nu(F) = \infty$ de asemenea și deci $\nu(F_K) \rightarrow \infty$. În orice caz, concluzionăm că $\nu(E) = \sup \{ \nu(K), K \subseteq E, K \text{ compact} \}$, deci ν este interior regulat pe orice mulțime Boreliană.

Deci ν este regulat și, deci, este o măsură Radon. De fapt, prin unicitatea afirmațiilor din Teorema de reprezentare Riesz avem de fapt $\nu = \mu$.

Corolar.

Următoarele afirmații sunt echivalente:

- a) ν este o măsură Borel pozitivă, local finită pe R
- b) ν este o măsură Borel pozitivă, regulată, local finită pe R
- c) ν este o măsură Radon pe R

Următoarele afirmații sunt de asemenea echivalente:

- a') ν este o măsură Borel, pozitivă, mărginită pe R
- b') ν este o măsură Borel, pozitivă, regulată, mărginită pe R
- c') ν este o măsură Radon mărginită pe R .

Bibliografie:

- G. Folland, Real Analysis, Wiley, 1999
- P. Kessler, M. Rosiu, Introducere în teoria măsurii, Ed. Universitaria, Craiova, 2002
- P. Halmos, Measure Theory, D. Van Nostrand comp. Inc., Princeton, N.J. 1950
- W. Rudin, Real and complex analysis, McGraw-Hill Book Co., New York, 1964