

Asupra calculului integral pentru funcțiile pare și impare

ROXANA MIHAELA STANCIU¹

Propoziția 1.

Fie $c \in (0, \infty)$ și $f : (-c, c) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci :

$$(1) \int_a^b f(-x)dx = \int_{-b}^{-a} f(x)dx, \quad \forall a, b \in (-c, c); \quad \text{în particular,} \quad \int_0^a f(-x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx,$$

$$\forall a \in (-c, c);$$

$$(2) f \text{ este par dac și numai dac } \int_0^a f(-x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx, \quad \forall a \in (0, c) \text{ (respectiv } a \in (-c, 0));$$

$$(3) f \text{ este impar dac și numai dac } \int_{-a}^a f(x)dx = 0, \quad \forall a \in (0, c) \text{ (respectiv } a \in (-c, 0));$$

$$(4) \text{ dac în plus } f \text{ este par atunci } \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx, \quad \forall a \in (-c, c);$$

$$(5) (i) \text{ dac } f \text{ este par atunci } \int_{-a}^a xf(x)dx = 0, \quad \forall a \in (-c, c);$$

$$(ii) \text{ dac } f \text{ este impar atunci } \int_{-a}^a xf(x)dx = 2 \int_0^a xf(x)dx, \quad \forall a \in (-c, c);$$

$$(iii) \text{ dac } f \text{ este arbitrar atunci } \int_{-a}^a f(x^2)dx = 2 \int_0^a f(x^2)dx, \quad \forall a \in (-c, c) \text{ și}$$

$$\int_{-a}^a xf(x^2)dx = 0, \quad \forall a \in (-c, c).$$

Demonstrație.

(1) Fie $a, b \in (-c, c)$, $a < b$ fixați; f când substituim $x = -t$, obținem c.c.t.d.

(2) Dacă f este par, $f(x) = f(-x)$, $\forall a \in (-c, c)$ și deci :

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx, \quad \forall a \in (0, c)$$

¹ Prof., Liceul cu Program Sportiv "Iolanda Bala Sotter", Buzău
e-mail: roxanastnc@yahoo.com

Reciproc s presupunem c $\int_0^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx, \forall a \in (0, c)$

Atunci :

$$\int_0^a (f(x) - f(-x))dx = \int_0^a f(x)dx - \int_0^a f(-x)dx = \int_0^a f(x)dx - \int_{-a}^0 f(x)dx = 0, \forall a \in (0, c)$$

Rezult c $f(x) - f(-x) = 0, \forall x \in (0, a)$. Dac $x \in (-c, 0)$ atunci $-x \in (0, c)$ i prin urmare $f(-x) - f(-(-x)) = 0$ deci $f(x) = f(-x), \forall x \in (-c, c)$ adic f este par .

(3) Dac f este impar $f(x) + f(-x) = 0, \forall a \in (-c, c)$ i deci $\forall a \in (0, c)$ avem

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a (f(-x) + f(x))dx = 0,$$

Reciproc fie $a, b \in (-c, c), a < b$ fixa i , conform ipotezei avem

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-b}^b f(x)dx = 0, \text{ dar } \int_a^b f(x)dx = \int_b^{-b} f(x)dx + \int_{-b}^{-a} f(x)dx + \int_{-a}^a f(x)dx$$

dar din (1) $\int_{-b}^{-a} f(x)dx = \int_a^b f(-x)dx$, rezult c $\int_b^{-b} f(x)dx = \int_a^b f(-x)dx$ deci

$\int_a^b (f(-x) - f(x))dx = 0$, de unde $f(-x) + f(x) = 0 \forall x \in (-c, c)$ prin urmare f este impar .

(4) Dac f este par avem $f(x) = f(-x), \forall x \in (-c, c)$ i deci

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx \stackrel{(1)}{=} 2 \int_0^a f(x)dx,$$

(5) (i) Dac f este par atunci func ia $x \rightarrow xf(x)$ este impar i deci $\int_{-a}^a xf(x)dx \stackrel{(3)}{=} 0,$

$\forall a \in (-c, c)$

(ii) analog ca în (i)

(iii) rezult imediat din (i) i (ii) inând seama de faptul c func ia $x \rightarrow f(x^2)$

(respectiv $x \rightarrow xf(x^2)$) este par (respectiv impar).

Propozi ia 2.

O func ie $f : R \rightarrow R$ continu este impar dac i numai dac $\forall x \in R,$

$$\int_{-x}^x f(t)dt = \text{constan t.}$$

Demonstra ie.

f fiind continuu admite primitive. Fie F o primitivă a sa, rezultă că $\int_{-x}^x f(t)dt = C$ dacă și numai dacă $F(x) - F(-x) = C$, prin derivare dacă și numai dacă $f(x) + f(-x) = 0$ adică f este impar.

Reciproc dacă f este impar $f(-x) = -f(x)$ implică

$$\int_{-x}^x f(t)dt = \int_{-x}^0 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = \int_{-x}^0 f(t)dt - \int_{-x}^0 f(-t)dt \stackrel{(1)}{=} \int_{-x}^0 f(t)dt - \int_{-x}^0 f(t)dt = 0.$$

Asupra calculului integral pentru funcțiile pare și impare generalizate.

Definiție.

Funcția $f : [a - r, a + r] \rightarrow \mathbb{R}$ se numește a-pară dacă $f(a + x) = f(a - x), \forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x| \leq r$, respectiv a-impară dacă $f(a + x) = -f(a - x), \forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x| \leq r$.

Propoziția II.1.

Fie $f : [x_0 - r, x_0 + r] \rightarrow \mathbb{R}$ continuu cu proprietatea că $af(x_0 + x) + bf(x_0 - x) = c, \forall x$ cu $|x| \leq r, a, b \in \mathbb{R}^*, c \in \mathbb{R}$, atunci:

$$(i) \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} f(x)dx = \frac{2cr}{a + b}, \quad a + b \neq 0;$$

$$(ii) \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} f(x)dx = \frac{cr}{a} + \frac{a - b}{a} \int_{x_0}^{x_0 + r} f(x)dx$$

Demonstrație.

Considerăm $\alpha, \beta : [-r, r] \rightarrow [x_0 - r, x_0 + r], \alpha(t) = x_0 + t, \beta(t) = x_0 - t$ și cum $f : [a - r, a + r] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuu putem aplica schimbarea de variabilă

$$(i) \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} f(x)dx = \int_{\alpha(-r)}^{\alpha(r)} f(x)dx = \int_{-r}^r f(\alpha(t))\alpha'(t)dt = \int_{-r}^r f(x_0 + t)dt = \int_{-r}^r \left(\frac{c}{a} - \frac{b}{a} f(x_0 - t)\right)dt =$$

$$= \frac{2cr}{a} - \frac{b}{a} \int_{-r}^r f(x_0 - t)dt = \frac{2cr}{a} + \frac{b}{a} \int_{-r}^r f(\beta(t))\beta'(t)dt = \frac{2cr}{a} + \frac{b}{a} \int_{\beta(-r)}^{\beta(r)} f(x)dx =$$

$$= \frac{2cr}{a} + \frac{b}{a} \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} f(x)dx \quad .\text{Rezultă că} \quad \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} f(x)dx + \frac{b}{a} \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} f(x)dx = \frac{2cr}{a} \quad \text{și deci}$$

$$\int_{x_0 - r}^{x_0 + r} f(x)dx = \frac{2cr}{a + b}.$$

$$(ii) \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} f(x)dx = \int_{x_0 - r}^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^{x_0 + r} f(x)dx, \text{ dar } \int_{x_0 - r}^{x_0} f(x)dx = \int_{\alpha(-r)}^{\alpha(0)} f(x)dx = \int_{-r}^0 f(x_0 + t)dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-r}^0 \left(\frac{c}{a} - \frac{b}{a} f(x_0 - t) \right) dt = \frac{cr}{a} - \frac{b}{a} \int_{-r}^0 f(x_0 - t) dt = \frac{cr}{a} + \frac{b}{a} \int_{-r}^0 f(\beta(t)) \beta'(t) dt = \\
 &= \frac{cr}{a} + \frac{b}{a} \int_{\beta(-r)}^{\beta(0)} f(x) dx = \frac{cr}{a} + \frac{b}{a} \int_{x_0+r}^{x_0} f(x) dx, \text{ rezult } c \\
 &\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x) dx = \frac{cr}{a} + \frac{b}{a} \int_{x_0+r}^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^{x_0+r} f(x) dx = \frac{cr}{a} + \frac{a-b}{a} \int_{x_0}^{x_0+r} f(x) dx.
 \end{aligned}$$

Propozi ia II.2.

(i) Dac $f : [a - r, a + r] \rightarrow R$ este continu atunci:

$$\int_{a-r}^{a+r} f(x) dx = \begin{cases} 2 \cdot \int_a^{a+r} f(x) dx, \text{ dac } f \text{ este a - par} \\ 0, \text{ dac } f \text{ este a - impar} \end{cases}$$

(ii) Produsul (câtu) a douã func ii de a-parità i diferite este o func ie a-imparã i produsul (câtu) a douã func ii de aceea i a-paritate este o func ie a-parã.

Demonstra ie.

(i) Dacã f este a-parã, atunci $f(a + x) - f(a - x) = 0$; deci în II.1. punând $a=1, b=-1, c=0, x_0=a$ i conform II.1.(ii) rezultã cã :

$$\int_{a-r}^{a+r} f(x) dx = \frac{1 - (-1)}{1} \cdot \int_a^{a+r} f(x) dx = 2 \int_a^{a+r} f(x) dx.$$

Dacã f este a-imparã, atunci $f(a + x) + f(a - x) = 0$ i punând în II.1.(ii) $a=b=1, c=0$, rezultã

$$\text{cã } \int_{a-r}^{a+r} f(x) dx = 0$$

(ii) Fie f, g a-pare adic $f(a + x) = f(a - x), g(a + x) = g(a - x)$ rezult c
 $(f \cdot g)(a + x) = f(a + x) \cdot g(a + x) = f(a - x) \cdot g(a - x)$ i analog
 $\left(\frac{f}{g}\right)(a + x) = \left(\frac{f}{g}\right)(a - x)$ rezult c $f \cdot g$ i $\frac{f}{g}$ sunt a-pare, analog ar tãndu-se
 i restul.

Propozi ia II.3.

Pentru orice func ie $f : [a - r, a + r] \rightarrow R$, exist o func ie f_1 a-par i o func ie f_2 a-impar astfel încât $f(x) = f_1(x) + f_2(x), \forall x \in [a - r, a + r]$.

Demonstra ie.

Fie $f_1(x) = \frac{f(x) + f(2a - x)}{2}$, $f_2(x) = \frac{f(x) - f(2a - x)}{2}$ rezult c

$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Cum $f_1(a + x) = f_1(a - x)$ rezult c f_1 este a-par iar, cum

$f_2(a + x) + f_2(a - x) = 0$ rezult c f_2 este a-impar .

Propozi ia II.4.

Dac $f, g : [a - r, a + r] \rightarrow R$ sunt integrabile i f este a-par atunci:

$$\int_{a-r}^{a+r} f(x)g(x)dx = \int_a^{a+r} f(x) \cdot (g(x) + g(2a - x))dx.$$

Demonstra ie.

Din II.3 rezult c $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$, unde g_1 este a-par i g_2 este a-impar deci

$$\begin{aligned} \int_{a-r}^{a+r} f(x)g(x)dx &= \int_{a-r}^{a+r} f(x)(g_1(x) + g_2(x))dx = \int_{a-r}^{a+r} f(x)g_1(x)dx + \int_{a-r}^{a+r} f(x)g_2(x)dx \quad (II.2) \\ &= 2 \int_a^{a+r} f(x)g_1(x)dx \quad (II.3) = 2 \int_a^{a+r} f(x)(g(x) + g(2a - x))dx. \end{aligned}$$

Propozi ia II.5.

Fie $f, g : [a - rf, a + r] \rightarrow R$ integrabile i f este a-impar .Atunci :

$$\int_{a-r}^{a+r} f(x)g(x)dx = \int_a^{a+r} f(x) \cdot (g(x) - g(2a - x))dx.$$

Demonstra ie.

Se demonstrează analog cu propozi ia II.4 utilizând II.2. i II.3.

Bibliografie

- [1] V. Arsinte, *Probleme Elementare de Calcul Integral*, Ed. Univ. Bucure ti, 1995
- [2] D.M. B tine u – Giurgiu, .a., *Analiz Matematic* , Ed. Matrix Rom, Bucure ti, 2004
- [3] N. Stanciu - „Generalizarea unor probleme de calcul integral” - *Gazeta Matematic* , seria A, nr. 4 / 2007