CALCULUL INTEGRAL ÎN CAZUL FUNCȚIILOR PERIODICE

ROXANA MIHAELA STANCIU[1]

Propoziția 1. Fie $f : R \to R$ o funcție continuă. Atunci avem:

a) f este periodică de perioadă T, dacă şi numai dacă, $\int_a^{a+T} f(x)dx =$ c(constant) $(\forall)$ a$\in R$;

b) Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) Orice primitivă a lui f , este periodică de perioadă T;

(ii) f este periodică, de perioadă T;

(iii) $\int_a^{a+T} f(x)dx = 0, (\forall)x \in R$

Demonstrație:

a) $(\Rightarrow)$. Din ipoteză, $f(x+T) = f(x), (\forall)x \in R$. Avem:

(1) $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_T^{a+T} f(t)dt, (\forall)a \in R$;

Făcând în ultima integrală, schimbarea de variabilă t=y+t, $y \in [0,T]$, obținem:

(2) $\int_T^{a+T} f(t)dt = \int_0^a f(y+T)dy = \int_0^a f(y)dy, (\forall)a \in R$.

Din (1) şi (2) rezultă: $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_0^a f(t)dt = \int_0^T f(T)dt, (\forall)a \in R$;

$(\Leftarrow)$. Presupunem că $\int_x^{x+T} f(t)dt = c, (\forall)x \in R$ şi fie F o primitivă a lui f .

Atunci , $c = F(x+T) - F(x), (\forall)x \in R$ şi deci prin derivare obținem:
$f(x+T) - f(x) = F'(x+T) - F'(x) = 0, (\forall)x \in R$, de unde rezultă că f este periodică de perioadă T.

[1] Prof., Liceul cu Program Sportiv “Iolanda Balaş Sotter”, Buzău
e-mail: roxanastnc@yahoo.com

b) (i)$\Rightarrow$ (ii) Mai întâi, observăm că , orice primitivă a lui f este periodică de perioadă T, dacă şi numai dacă, există o primitivă a lui f , periodică, de perioadă T, dacă şi numai dacă, funcţia $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, x $\in$ R, este periodică de perioadă T.

(ii)$\Rightarrow$(i). Dacă f este periodică, de perioadă T, avem: $(F(x+t)-F(x))'=f(x+t)-f(x)=0, \forall x\in R$, şi deci, există un $c\in R$, astfel încât $F(x+t)-F(x)=c, \forall x\in R$. Atunci $c=F(0+t)-F(0)=\int_0^T f(t)dt=0$, deci $F(x+t)=F(x)$, $\forall x\in R$ şi deci F este periodică, de perioadă T.

(ii)$\Leftrightarrow$(iii). Rezultă din a).

(i)$\Rightarrow$(iii). Dacă (i) este adevărată, atunci F este periodică, de perioadă T, şi avem: $\int_x^{x+T} f(t)dt=F(x+t)-F(x)=0, \forall x\in R$.

(iii)$\Rightarrow(i)$. Din $\int_x^{x+T} f(t)dt=F(x+t)-F(x)=0, \forall x\in R$

şi deci F este periodică, de perioadă T.

Concluzie. Acest capitol propune propoziţii care permit calculul unor integrale definite ce fac obiectul unor probleme publicate în Gazeta Matematică şi alte reviste de specialitate sau în unele manuale alternative de clasa a XII-a.

În continuare propun spre rezolvare următoarele probleme reprezentative :

pb. 14847 Gazeta Matematică, nr. 7 (1975)**, pb. 22377** Gazeta Matematică, nr. 5 (1991), **pb. 22750** Gazeta Matematică, nr. 1 (1993), **pb. 22990** Gazeta Matematică, nr. 4 (1994), **pb. 23834** Gazeta Matematică, nr. 12 (1997), **pb. 24094** Gazeta Matematică, nr. 3 (1999), **pb. 14847** Gazeta Matematică, nr. 7 (1975),
pb. Dată în concurs Gazeta Matematică, nr. 1 (2002),
pb. 25054 Gazeta Matematică, nr. 2 (2004)

Bibliografie

[1]. V. Arsinte, *Probleme elementare de calcul integral,* Editura Universităţii Bucureşti, 1995.

[1]. N. Stanciu - „Generalizarea unor probleme de calcul integral'' - Gazeta Matematică, seria A, nr. 4 / 2007