

Aplicații ale calculului integral

Prof. Cojocaru Camelia
Școala Nr. 1 Chiraftei, Jud. Galați

Noțiunea de primitivă s-a degajat din aplicațiile matematicii în situații concrete, care constă în determinarea modelului matematic al unui proces atunci când se dă viteza de variație a acestuia.

Definiția 1

1] Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ interval, $f: I \rightarrow \mathbf{R}$. Se numește **primitivă a funcției f pe I** , orice funcție $F: I \rightarrow \mathbf{R}$ derivabilă pe I și cu proprietatea $F' = f$ pe I

$$(F'(x) = f(x), \forall x \in I).$$

2] Operația de determinare a unei primitive F a lui f pe intervalul I se numește **operație de integrare**, notată prin simbolul $\int f(x) dx$.

3] Funcția $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ care admite cel puțin o primitivă pe I se numește **funcție cu primitive pe I** și mulțimea acestor funcții se va nota prin $P(I)$.

Teorema 1 (Proprietăți generale ale primitivelor)

Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ interval și $f: I \rightarrow \mathbf{R}$, atunci au loc afirmațiile:

(p₁) Dacă F este o primitivă a lui f pe I atunci pentru $\forall C \in \mathbf{R}$, funcția $F + C$ este o primitivă a lui f pe I .

(p₂) Două primitive oarecare F și G a lui f pe I diferă printr-o constantă.

(p₃) **Primitiva generală sau integrala nedefinită sau antiderivata unei funcții f este dată prin:**

$$(1) \int f(x) dx = \{ F + C \mid F: I \rightarrow \mathbf{R} \text{ primitivă a lui } f; C \in \mathbf{R} \} = \overset{\text{not}}{F(x) + C}, x \in I$$

(p₄) Integrala nedefinită este inversa aplicației de diferențiere:

$$(2) \int dF(x) = F(x) + C \quad (3) d\left[\int f(x) dx\right] = f(x) dx.$$

Teorema 2 (Operații algebrice cu primitive)

Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ interval și $f, g: I \rightarrow \mathbf{R}$ cu $f, g \in P(I)$, atunci au loc proprietățile:

$$(p_5) \int d(\lambda f) = \lambda \int df = \lambda f + C, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall C \in \mathbf{R}$$

$$(p_6) \int d(f \pm g) = \int df \pm \int dg = f \pm g + C; C \in \mathbf{R}$$

$$(p_7) \int d(fg) = \int (gdf + fdg) = \int gdf + \int fdg$$

Consecința 1

Fie $f, g \in C^1(I)$ din (p₇) se obține **formula de integrare prin părți**, care este o metodă de calcul pentru primitive:

$$(4) \int fdg = fg - \int gdf$$

Consecința 2

Dacă $f: I \rightarrow \mathbf{R}$, $f \in P(I)$ cu F o primitivă oarecare a sa și $x = u(t)$, $t \in J$ este o schimbare de variabilă cu $u \in C^1(J)$, atunci din formula de diferențiere a funcțiilor compuse, avem:

$$(5) \int f(x) dx = \int f[u(t)] du(t) = \int f[u(t)] u'(t) dt = F[u(t)] + C.$$

Orice mărime geometrică, fizică, economică etc. care are proprietatea de “**aditivitate față de mulțime (interval)**” se poate exprima printr-o integrală definită. Astfel noțiunile de “**arie**” și “**volum**”

pentru figuri geometrice din plan și corpuri din spațiu se pot defini în mod riguros din punct de vedere matematic. Vom prezenta fără demonstrație unele aplicații ale integralei definite.

I. Aria unui domeniu din plan

1. **Aria mulțimii** din plan $D \subset \mathbf{R}^2$ mărginită de dreptele $x = a, x = b, y = 0$ și graficul funcției $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ pozitivă și continuă se calculează prin formula: (1) $\mathcal{A}(D) = \int_a^b f(x) dx$.

2. În cazul $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ continuă și de semn oarecare, avem: (1') $\mathcal{A}(D) = \int_a^b |f(x)| dx$.

3. **Aria mulțimii** din plan mărginită de dreptele $x = a, x = b$ și graficele funcțiilor $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ continue este calculată prin formula: (2) $\mathcal{A}(D) = \int_a^b |g(x) - f(x)| dx$.

II. Lungimea unui arc de curbă

Se numește **curbă plană** o mulțime $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ cu proprietatea că există o funcție continuă $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, notată $y = f(x), x \in [a, b]$ și $G_f = \Gamma \subset \mathbf{R}^2$ (graficul lui f din plan este Γ). Dacă f are derivată continuă (sau numai funcție integrabilă) pe $[a, b]$, lungimea a curbei Γ se calculează după formula: (3)

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

III. Volumul unui corp de rotație

Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție continuă, atunci corpul K din spațiu obținut prin rotirea graficului lui f, G_f , în jurul axei Ox , are volumul calculat prin formula:

$$(4) \mathcal{V}(K) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

IV. Suprafața unui corp de rotație

Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție derivabilă pe $[a, b]$ și cu f' continuă ($f \in C^1([a, b])$), atunci suprafața S a corpului K obținut prin rotirea graficului lui f în jurul axei Ox se calculează prin formula:

$$(5) S(K) = 2\pi \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Exemple.

1. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ cu $f = \sqrt{1-x^2}$ funcție continuă și prin schimbarea de variabilă:

$$x = \sin t, dx = \cos t dt, x = 0 \rightarrow t = 0, x = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \text{ avem: } \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \frac{\sin 2t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

2. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ cu $f(x) = \sin^n x \in C^1\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ și $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$, aplicând metoda integrării prin părți se obține o formulă de recurență:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x (\sin x dx) = -\cos x \sin^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx =$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \Rightarrow I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_{n-1}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \text{ cu } n \geq 2 \Rightarrow I_n = \begin{cases} \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}; n = 2k \\ \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \dots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1; n = 2k+1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = \left[\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1} \right] \cdot \frac{I_{2k}}{I_{2k+1}}$$

și se arată că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right]$ numită **formula lui Wallis**.

3. $\int_4^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$ prin substituția

$$x = t^2, dx = 2tdt, x = 4 \rightarrow t = 2, x = 9 \rightarrow t = 3, \text{ avem: } \int_4^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx = 2 \int_2^3 \frac{tdt}{1+t} =$$

$$= 2 \int_2^3 \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) dt = 2t \Big|_2^3 - 2 \ln(1+t) \Big|_2^3 = 2 - 2 \ln \frac{4}{3}$$

4. $\int_1^2 x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x dx = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$

5. $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n \Big|_1^e - \int_1^e xn(\ln x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} dx = e - nI_{n-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_n = e - nI_{n-1}, n \geq 1 \\ I_0 = e - 1; I_1 = 1 \end{cases}$$

formulă de recurență pentru calculul lui $I_n, n \in \mathbf{N}$.

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \left(5 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right)} dx$ prin substituția $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, deci: $x = 2 \operatorname{arctg} t, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ și

$$x = 0 \rightarrow t = 0, x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 1 \text{ se obține } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \left(3 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right)} dx = \int_0^1 \frac{1+t^2}{2(3+t^2)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{t^2+3} = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$ prin substituția $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t, dx = \frac{2dt}{1+t^2},$

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, x=0 \rightarrow t=0, x=\frac{\pi}{2} \rightarrow t=1$ se obține $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x} = \int_0^1 \frac{2dt}{3+2\frac{1-t^2}{1+t^2}} =$

$= 2 \int_0^1 \frac{dt}{t^2+5} = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} dx$ și prin substituția $\operatorname{tg} x = t \Rightarrow$

$x = \operatorname{arctg} t, dx = \frac{dt}{1+t^2}, x=0 \rightarrow t=0, x=\frac{\pi}{4} \rightarrow t=1$ avem:

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^1 \frac{t}{1+t} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{1}{2} \left[\frac{t+1}{1+t^2} - \frac{1}{1+t} \right] dt = \frac{1}{4} \ln(1+t^2) \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \Big|_0^1 -$
 $-\frac{1}{2} \ln(t+1) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \ln 2 \right)$

9. $\int_1^4 \sqrt{1+\sqrt{x}} dx = \int_1^4 x^0 (1+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} dx$ ($m=0, n=\frac{1}{2}, p=\frac{1}{2}, \frac{m+1}{n}=1 \in \mathbf{Z}$) prin substituția:
 $1+\sqrt{x} = t, x = (t-1)^2, x=1 \rightarrow t=2, x=4 \rightarrow t=3$ avem:

$\int_1^4 \sqrt{1+\sqrt{x}} dx = \int_2^3 \sqrt{t} 2(t-1) dt = 2 \int_2^3 (t\sqrt{t} - \sqrt{t}) dt = 2 \left(\frac{t^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right) \Big|_2^3 = \frac{16}{5} \sqrt{3} - \frac{8}{15} \sqrt{2}$

10. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$ prin substituția: $e^x - 1 = t^2 \Rightarrow x = \ln(1+t^2), dx = \frac{2t}{1+t^2} dt,$

$x=0 \rightarrow t=0, x=\ln 2 \rightarrow t=1,$ avem:

$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx = 2 \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt = 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2} \right) dt = 2t \Big|_0^1 - 2 \operatorname{arctg} t \Big|_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}$

11. $\int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$ prin substituția: $\frac{x-1}{x+1} = t^2 \Rightarrow x=1 \rightarrow t=0, x=2 \rightarrow t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ și

$x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, dx = \frac{4t}{(1-t^2)^2} dt$ avem:

$\int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4t^2}{(1-t^2)^2} dt = \frac{2t}{1-t^2} \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} - 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{(1-t^2)^2} = \sqrt{3} + \ln \left| \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1} \right| = \sqrt{3} + \ln(2 - \sqrt{3})$

Bibliografie:

Elemente de analiză matematică, Manual pentru clasa a XII-a,

Autori: Nicu Boboc, Ion Colojoara.