

ASUPRA UNOR PROBLEME PROPUSE LA
OLIMPIADELE INTERNA TIONALE DE MATEMATIC

Corneliu M nescu-Avram

Nota de fa cun ine solu ii alternative sau generaliz ri ale unor probleme propuse la O.I.M. Am indicat in parantez dup fiecare problem olimpiada i ara a c rei delega ie a propus problema respectiv . Pentru solu iile originale se poate consulta bibliografia .

1. S se determine valoarea minim a lui $a^2 + b^2$ cÂnd (a, b) parcurge toate perechile de numere reale pentru care ecua ia $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ are cel pu in o r d cin real .

(A 15-a O.I.M., Suedia)

Lu m, mai general, o ecua ie reciproc de grad par cu coeficien i reali

$$x^{2n} + a_1x^{2n-1} + a_2x^{2n-2} + \dots + a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + 1 = 0$$

i dorim s determin m valoarea minim a expresiei $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ astfel ÎncÂt ecua ia dat s aib cel pu in o r d cin real . Dac $x \neq 0$, atunci ecua ia dat reprezint În coordonatele (a_1, a_2, \dots, a_n) un hiperplan În spa iul euclidian $n - dimensional$. Expresia al c rei minim se cere este p tratul distan ei de la origine la acest hiperplan, care este egal , conform unui rezultat din geometria analitic , cu $f(x) =$

$\frac{(x^{2n} + 1)^2}{(x^{2n-1} + x)^2 + (x^{2n-2} + x^2)^2 + \dots + (x^n)^2}$. Func ia f este par , deci ne putem restrÂnge la intervalul $(0, \infty)$, a adar vom determina valoarea minim a func iei f pe acest interval. Vom ar ta c $x = 1$ este punct de minim al func iei f , deci $f(x) \geq f(1) = \frac{4}{4n-3}$. Aceast inegalitate este echivalent cu

$$\left(\frac{x^{2n-1} + x}{x^{2n} + 1}\right)^2 + \left(\frac{x^{2n-2} + x^2}{x^{2n} + 1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x^{n+1} + x^{n-1}}{x^{2n} + 1}\right)^2 + \left(\frac{x^n}{x^{2n} + 1}\right)^2 \leq n - 1 + \frac{1}{4}.$$

Pentru a o demonstra, este suficient s ar t m c

$$\frac{x^{2n-k} + x^k}{x^{2n} + 1} \leq 1, \text{ dac } 1 \leq k \leq n - 1 \text{ i } \frac{x^n}{x^{2n} + 1} \leq \frac{1}{2},$$

inegalit i care sunt adev rate, deoarece sunt echivalente respectiv cu

$$(x^{2n-k} - 1)(x^k - 1) \geq 0, \quad (x^n - 1)^2 \geq 0.$$

2. Fie a, b două numere naturale. Împărțind $a^2 + b^2$ la $a + b$ se obține câtul q și restul r . Să se determine toate perechile (a, b) pentru care $q^2 + r = 1977$.

(A 19-a O.I.M., R.F.G.)

La problemele de acest gen, anul desigur al concursului este utilizat nu pentru semnificativitatea lui "astrală", ci pentru conținutul matematic. Să-l decriptăm! Dacă numărul 1977 se înlocuiește cu un număr natural n arbitrar care nu este număr perfect, vom demonstra egalitatea $q = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Folosim relațiile $a^2 + b^2 = q(a + b) + r, 0 \leq r < a + b$ (1) și substituim $s = a + b$. Media geometrică este mai mare decât media aritmetică, a adică

$$\frac{s^2}{2} \leq a^2 + b^2 = q(a + b) + r = qs + r < (q + 1)s.$$

Rezultă $r < s < 2(q + 1)$, deci $r \leq 2q + 1$, de unde $n = q^2 + r \leq q^2 + 2q + 1 = (q + 1)^2$, a adică

$q \geq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, deoarece n nu este număr perfect. Din $n = q^2 + r \geq q^2$, rezultă $q \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, a adică $q = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Am determinat deci $r = n - q^2$. Dacă q este un număr par, atunci ecuația din (1) se scrie

$$\left(a - \frac{q}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{q}{2}\right)^2 = \frac{q^2}{2} + r.$$

(2)

Orice soluție (x_0, y_0) în numere întregi a ecuației $x^2 + y^2 = \frac{q^2}{2} + r$ ne dă o soluție a ecuației (2), deci și a ecuației (1): $a = \left| \frac{q}{2} \pm x_0 \right|, b = \left| \frac{q}{2} \pm y_0 \right|$, dacă $a + b > r$.

Pentru $n = 1977$ se obține $q = \lfloor \sqrt{1977} \rfloor = 44, r = 1977 - 44^2 = 41$ și $\frac{q^2}{2} + r = 1009$, care este un număr prim congruent cu 1 modulo 4, deci se scrie în mod unic sub forma unei sume de două pătrate de numere naturale, abstractiv făcând de ordinea termenilor: $1009 = 15^2 + 28^2$, ceea ce duce la soluțiile $(a, b) \in \{(7, 50), (50, 7), (37, 50), (50, 37)\}$.

3a. Doi întregi x, y nenuli, dar nu neapărat pozitivi, sunt astfel încât $x + y$ divide pe $x^2 + y^2$ și câtul $\frac{x^2 + y^2}{x + y}$ este un divizor al lui 1978. Să se demonstreze că $x = y$.

(A 20-a O.I.M., Marea Britanie, lista lungă)

Considerăm în locul numărului 1978 un număr $N = 2p_1 p_2 \dots p_m$, unde p_1, \dots, p_m sunt numere prime distincte, congruente cu 3 modulo 4. Dacă d este un divizor al lui N și $p \neq 2$ este un divizor prim al lui d , atunci $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{p}$. O consecință a legii reciprocity pitagoreice (dar acest fapt poate fi demonstrat și elementar) impune $x \equiv y \equiv 0 \pmod{p}$. Egalitatea $x^2 + y^2 = d(x + y)$ devine în final, după simplificări succesive, $u^2 + v^2 = 2(u + v)$ (1) sau $u^2 + v^2 = u + v$ (2), unde $x = du, y = dv$. Ecuația (1) se scrie $(u - 1)^2 + (v - 1)^2 = 2$, cu soluția unică $u = v = 2$ (u, v sunt nenule!), iar ecuația (2) se scrie $(2u - 1)^2 + (2v - 1)^2 = 2$, cu soluția unică $u = v = 1$. Din $u = v$ rezultă $x = y$.

Notă. Dacă $p \equiv 3 \pmod{4}$ este un număr prim și există $x, y \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{p}$, atunci $x \equiv y \equiv 0 \pmod{p}$. Acest fapt poate fi demonstrat fără a utiliza legea reciprocity pitagoreice. Într-adevăr, în acest caz \mathbb{Z}_p este un corp, deoarece p este un număr prim. Presupunem $\hat{x} \neq \hat{0}$ și $\hat{y} \neq \hat{0}$ în \mathbb{Z}_p ; există atunci $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\hat{a} = \hat{x} \cdot (\hat{y})^{-1}$ în \mathbb{Z}_p . Din $\hat{x}^2 + \hat{y}^2 = \hat{0}$ rezultă, prin înmulțirea cu \hat{y}^{-2} , $\hat{a}^2 = \hat{a}^2 = -\hat{1}$. Ordinul grupului multiplicativ \mathbb{Z}_p^* este egal cu $p - 1$ și $\hat{a} \neq \hat{0}$, deci $\hat{a}^{p-1} = \hat{1}$ (teorema lui Fermat). Pe de altă parte, $\frac{p-1}{2}$ este un număr impar, deci $\hat{a}^{p-1} = (\hat{a}^2)^{\frac{p-1}{2}} = (-\hat{1})^{\frac{p-1}{2}} = -\hat{1}$, contradicție.

3b. Se demonstrează că pe cercul ce trece prin punctele $(0, 0)$, $(0, 1978)$, $(1978, 0)$, $(1978, 1978)$ (vârfuri ale unui pătrat), nu există alt punct care să aibă ambele coordonate întregi.

(A 20-a O.I.M., Olanda, lista lungă)

Se înlocuiește numărul 1978 cu $2n$, unde n este produs de numere prime distincte, congruente cu 3 modulo 4. Ecuația cercului ce trece prin punctele date este $(x - n)^2 + (y - n)^2 = 2n^2$. Asemănător cu soluția problemei precedente, fie $(u, v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ astfel încât $u^2 + v^2 = 2n^2$ și p un divizor prim al lui n . Din $u^2 + v^2 \equiv 0 \pmod{p}$ și $p \equiv 3 \pmod{4}$ rezultă $u \equiv v \equiv 0 \pmod{p}$ și în final $u = nu_1, v = nv_1$, cu $u_1, v_1 \in \mathbb{N}$. Ecuația $u_1^2 + v_1^2 = 2$ are soluția unică $u_1 = v_1 = 1$, deci pe cercul dat există numai patru puncte de coordonate întregi, anume $(0, 0)$, $(0, 2n)$, $(2n, 0)$, $(2n, 2n)$.

4. Dacă p și q sunt numere naturale astfel încât

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319},$$

s se dovedeasc faptul c p este divizibil cu 1979.

(A 21-a O.I.M., R.F.G.)

Dac $N = 6k + 5$ este un num r prim ($k \in \mathbb{N}$) i p, q sunt numere naturale astfel încât

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{4k+2} + \frac{1}{4k+3},$$

atunci p este divizibil cu N .

Avem

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{4k+3} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4k+2}\right) = \frac{1}{2k+2} + \frac{1}{2k+3} + \dots + \frac{1}{4k+3}.$$

Numitorii termenilor sunt numere naturale consecutive, iar num rul termenilor este $4k + 3 - (2k + 2) + 1 = 2(k + 1)$, deci este un num r par. Suma a doi numitori egal dep rta i de extreme este $2k + 2 + i + 4k + 3 - i = 6k + 5 = N$, $0 \leq i \leq k$. Dac se adun frac iile, se ob ine la num r tor un num r divizibil cu N , iar factorul prim N nu se simplific , deoarece to i numitorii sunt numere strict mai mici decâ N . Rezult c p este divizibil cu N . În particular, $N = 1979 = 6 \cdot 329 + 5$ este prim i ultima frac ie are numitorul $4 \cdot 329 + 3 = 1319$.

5. Trei cercuri congruente au un punct comun O i sunt situate în interiorul unui triunghi dat. Fiecare cerc este tangent la dou din laturile triunghiului. S se demonstreze c punctul O i centrele cercurilor înscris i circumscris triunghiului sunt coliniare.

(A 22-a O.I.M., U.R.S.S.)

Fie ABC triunghiul dat, D, E, F centrele cercurilor tangente la câte dou dintre laturile triunghiului i I centrul cercului înscris în triunghi. Lu m cercul circumscris triunghiului ABC drept cerc unitate, folosim coordonatele complexe i not m afixele punctelor cu literele mici corespunz toare. Punctele D, E, F sunt egal dep rtate de laturile triunghiului ABC , deci dreptele AD, BE, CF sunt concurente în punctul I , fiind bisectoarele interioare ale unghiurilor triunghiului ABC .

Consider m omotetia de centru I i raport $k \in (0, 1)$, $h_I^k(z) = kz + (1 - k)i$. Triunghiurile ABC i DEF au laturile paralele, deci exist o omotetie de centru I care-l transform pe unul în cel lalt. Determin m k corespunz tor acestei omotetii. Fie r lungimea comun a razelor celor trei cercuri. Punctul O este centrul cercului circumscris triunghiului DEF , deoarece el

se află la aceeași distanță de vârfuri, deci prin această omotetie el corespunde punctului $O'(0)$, centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Rezultă că afixul lui O este $h_I^k(0) = (1 - k)i$, iar $d = h_I^k(a) = ka + (1 - k)i$. Ecuația cercului cu centrul în D și de rază r este $|z - d| = r$. Acest cerc trece prin punctul O , deci $|ka| = k|a| = k = r$. Punctele $I(i)$, $O((1 - r)i)$ și $O'(0)$ sunt coliniare.

Notă. Configurația are și alte proprietăți, dintre care unele au fost puse în evidență și demonstrate de *Leica* :

- i) dacă A', B', C' sunt celelalte puncte de intersecție ale cercurilor, atunci cercul circumscris triunghiului $A'B'C'$ are raza r și centrul în ortocentrul triunghiului DEF ;
- ii) ortocentrul triunghiului $A'B'C'$ este punctul O , centrul cercului circumscris triunghiului DEF .

6. Se consideră, pe diagonalele AC, CE ale unui hexagon regulat $ABCDEF$, punctele interioare M , respectiv N , astfel ca $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r$. Să se determine r astfel încât B, M, N să fie coliniare.

(A 23-a O.I.M., Olanda)

Lucrarea [2] prezintă o soluție care utilizează numerele complexe (la O.I.M. se cer soluții sintetice), dar rezultatul $r = \frac{5}{9}$ este eronat. Dăm mai jos soluția corectă :

Alegem originea în centrul cercului circumscris hexagonului și axa reală trecând prin A . Luăm ca unitate raza cercului și notăm vârfurile hexagonului în sens trigonometric, adică $A(1), B(\varepsilon), C(\varepsilon^2), E(\varepsilon^4)$, unde $\varepsilon = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$. Avem $\varepsilon^2 = -1, \varepsilon^3 = -1, \varepsilon^4 = -1$.

Dacă $M(m), N(n), m, n \in \mathbb{C}$, din ipoteză se obține $m - 1 = (\varepsilon^2 - 1)r, n - \varepsilon^2 = (\varepsilon^4 - \varepsilon^2)r$, cu $r \in (0, 1)$. Punctele B, M, N sunt coliniare dacă și numai dacă $\frac{n-m}{m-\varepsilon} \in \mathbb{R}$. Transformăm puterile mai mari ale lui ε în expresii care sînt conținute la puterea întâi :

$$m = (\varepsilon - 2)r + 1, n = (1 - 2\varepsilon)r + \varepsilon - 1.$$

Din $\bar{\varepsilon} = 1 - \varepsilon$ rezultă

$$\bar{m} = -(\varepsilon + 1)r + 1, \bar{n} = (2 - \varepsilon)r - \varepsilon.$$

Egalitatea $\frac{n-m}{m-\varepsilon} = \frac{\bar{n}-\bar{m}}{\bar{m}-\bar{\varepsilon}}$ conduce, după efectuarea calculelor, la $3r^2 = 1$, cu soluția convenabil $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

7. Să se determine toate numerele reale a pentru care ecuația

$$16x^4 - ax^3 + (2a + 17)x^2 - ax + 16 = 0$$

are patru rădăcini reale distincte, ce formează o progresie geometrică.

(A 23-a O.I.M., Bulgaria, lista scurtă)

Împărțim prin 16 și determinăm, mai general, perechile (m, n) de numere reale pentru care ecuația $x^4 - mx^3 + nx^2 - mx + 1 = 0$ are patru rădăcini reale distincte în progresie geometrică. Fie x, qx, q^2x, q^3x rădăcinile ecuației. Atunci $x \neq 0$ și putem presupune $|q| > 1$, deci $|x| < |qx| < |q^2x| < |q^3x|$. Ecuația este reciprocă, deci $\frac{1}{x}$ este rădăcină a ei, adică $\frac{1}{x} = q^3x$, de unde $q = x^{-\frac{2}{3}}$. Rezultă că rădăcinile sunt $x, x^{\frac{1}{3}}, x^{-\frac{1}{3}}, x^{-1}$. Cu substituția $z = x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}$ relațiile lui Viète se scriu

$$z^3 - 2z = m, \quad (z^2 - 2)^2 + z^2 - 2 = n.$$

Soluțiile comune convenabile z ale acestor ecuații sunt cele pentru care $|z| \geq 2$. Eliminăm z între cele două ecuații și obținem egalitatea

$$m^4 - (n+1)m^2 + 2n^2 - n^3 = 0.$$

Dacă se mai cunoaște o ecuație care conține m și n și este independentă de z , atunci aceste numere pot fi determinate.

8. Fie $ABCD$ un patrulater înscrisibil. Fie P, Q, R picioarele perpendiculelor din D pe dreptele BC, CA, AB respectiv. Să se arate că $PQ = QR$ dacă și numai dacă bisectoarele unghiurilor $\angle ABC$ și $\angle ADC$ se intersectează pe AC .

(A 44-a O.I.M., Finlanda)

Folosim coordonatele complexe, luăm originea în centrul cercului circumscris patrulaterului, raza cercului egală cu unitatea și notăm cu litere mici afixele punctelor corespunzătoare. Sunt adevărate^[4] egalitățile

$$2p = d - bc\bar{d} + b + c, \quad 2q = d - ca\bar{d} + c + a, \quad 2r = d - ab\bar{d} + a + b.$$

Din $|a| = |b| = |c| = |d| = 1$ și $PQ = QR$ rezultă, după efectuarea calculelor,

$$|a - b| \cdot |c - d| = |a - d| \cdot |b - c|, \text{ adică } AB \cdot CD = AD \cdot BC,$$

deci patrulaterul $ABCD$ este armonic. Există [5] numeroase proprietăți și caracteristici ale patrulaterelor armonice, printre care și cea referitoare la bisectoarele unghiurilor opuse ale patrulaterului. S-o demonstrăm: pe diagonala $[AC]$ există un punct unic determinat E care împarte acest segment într-un raport dat, iar punctul E se află pe bisectoarele din B și D dacă

și numai dacă $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$, deci dacă și numai dacă patrulaterul $ABCD$ este armonic.

Bibliografie

- [1] Cuculescu, I., Olimpiadele internaționale de matematică ale elevilor, Editura Tehnic, București, 1984
- [2] Dincă, M., Chiriș, M., Numere complexe în matematica de liceu, ALL Educational, București, 1996
- [3] Djukić, D., Janković, V., Matić, I., Petrović, N., The IMO Compendium, Springer, 2006
- [4] Mihăileanu, N. N., Utilizarea numerelor complexe în geometrie, Editura Tehnic, București, 1968
- [5] Mihăilescu, C., Geometria elementelor remarcabile, Societatea de Științe Matematice din România, București, 2007

CATEDRA DE MATEMATICĂ, GRUPUL COLAR DE TRANSPORTURI – PLOIEȘTI

E-mail: avram050652@yahoo.com