

1. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție. Să se demonstreze că f are proprietatea lui Darboux și $f^{-1}(x)$ este o mulțime închisă oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă f este continuă.

Alexandru Dimca, G.M.A 6/1974

Soluție:

Arătăm implicația „ \Rightarrow ”

Să presupunem prin absurd că există $x_0 \in \mathbb{R}$ în care f este discontinuă, adică $f(x_0)$ nu este limita funcției în punctul x_0 .

Atunci $\exists \varepsilon > 0$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \exists x_n \in \mathbb{R}$ cu

$|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ și $|f(x_n) - f(x_0)| \geq 2\varepsilon$ rezultă că există un subșir al

șirului $(x_n)_{n \geq 1}$, fie acesta $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ având proprietatea

$f(x_{n_k}) \geq f(x_0) + 2\varepsilon, \forall k \in \mathbb{N}^*$ sau $f(x_{n_k}) \leq f(x_0) - 2\varepsilon, \forall k \in \mathbb{N}^*$.

Presupunem, de exemplu, îndeplinită prima condiție. Atunci pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ avem $f(x_{n_k}) \geq f(x_0) + 2\varepsilon > f(x_0)$ și cum f are proprietatea lui Darboux $\exists y_{n_k}$ cuprins între x_{n_k} și x_0 astfel încât $f(y_{n_k}) = f(x_0) + \varepsilon, \forall k \in \mathbb{N}^*$.

Aceasta înseamnă că $y_{n_k} \in f^{-1}(f(x_0) + \varepsilon)$. Cum

$|y_{n_k} - x_0| \leq |x_{n_k} - x_0| \rightarrow 0$ rezultă că $y_{n_k} \rightarrow x_0$. Dar din ipoteză mulțimea $f^{-1}(f(x_0) + \varepsilon)$ este închisă și deci conține limita oricărui șir din această mulțime; rezultă că $x_0 \in f^{-1}(f(x_0) + \varepsilon)$ deci $f(x_0) = f(x_0) + \varepsilon$, contradicție.

Arătăm implicația „ \Leftarrow ”

Fie f continuă și $x_0 \in \mathbb{R}$. Notăm $A = f^{-1}(x_0)$ și să arătăm că A este mulțime închisă. Pentru aceasta arătăm că $\forall (y_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset A$ cu $y_n \rightarrow y_0$ atunci $y_0 \in A$. Într-adevăr $f(y_n) = x_0$ deci $f(y_n) \rightarrow x_0$;

pe de altă parte $f(y_n) \rightarrow f(y_0)$ și atunci rezultă $f(y_0) = x_0$, adică $y_0 \in A$. Evident dacă f este continuă are și proprietatea lui Darboux.

2. Să se determine funcțiile continue $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ verifică egalitatea:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y).$$

Marian Ursănescu, G.M. 10/2000

Soluție:

Înmulțind relația dată cu 3 obținem:

$$3f(x+y) = 3f(x) + 3f(y) + 3x^2y + 3xy^2.$$

Adunând și scăzând $x^3 + y^3$ obținem:

$$3f(x+y) - (x+y)^3 = 3f(x) - x^3 + 3f(y) - y^3.$$

Notăm $g(x) = 3f(x) - x^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Rezultă $g(x+y) = g(x) + g(y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Cum g este o funcție continuă, ea verifică prima ecuație funcțională a lui Cauchy: $g(x) = kx$, $\forall k \in \mathbb{R}$.

Deci $3f(x) - x^3 = kx$.

Rezultă că funcțiile care verifică relația din enunț sunt:

$$f(x) = \frac{1}{3}(x^3 + kx).$$

3. Fie funcția continuă $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

a) Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$ este convergentă pentru

orice $x \in [0, 1]$;

b) Să se determine funcția f , dacă

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Soluție:

a) Conform teoremei lui Weierstrass, funcția f fiind continuă pe intervalul compact $[0, 1]$, este mărginită și își atinge marginile, adică $\exists M > 0$ cu proprietatea $|f(x)| \leq M, \forall x \in [0, 1]$.

Vom arăta că seria din enunț este absolut convergentă și de aici va rezulta cu atât mai mult că este convergentă.

Într-adevăr suma parțială de ordinul n din seria modulelor este:

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{f(x^k)}{2^k} \leq M \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = M \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < M$$

și deci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(x^n)|}{2^n} < \infty.$$

b) Fie acum o funcție f cu proprietatea $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$,

pentru $\forall x \in [0, 1]$.

Fie $a \in [0, 1]$ și $M_a = \sup_{x \in [0, a]} f(x)$, $m_a = \inf_{x \in [0, a]} f(x)$. Deoarece

funcția f este continuă, $\exists x_a \in [0, a]$ și $\exists y_a \in [0, a]$ astfel încât

$f(x_a) = M_a$ și $f(y_a) = m_a$.

Avem $M_a = f(x_a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x_a^n)}{2^n} \leq M_a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = M_a$, ceea ce obligă la

egalitățile $f(x_a^n) = M_a, \forall n \in \mathbb{N}$. Dar șirul $(x_a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge la zero

și funcția f fiind continuă, avem $f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_a^n) = M_a$.

La fel, $m_a = f(y_a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(y_a^n)}{2^n} \geq m_a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = m_a$ și ca mai sus

deducem. Prin urmare f este constantă pe intervalul $[0, a]$; cum

$a \in (0, 1)$ este arbitrar, făcând $a \rightarrow 1$, obținem că f este constantă pe

intervalul $[0, 1]$. Reciproc, orice funcție constantă verifică egalitatea din enunț. Deci funcțiile căutate sunt cele constante.

4. Fie funcția continuă $f : [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x \in [-1, 0) \\ \beta, & x = 0 \\ e^{-\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2 e^x}}, & x \in (0, \infty) \end{cases}.$$

Să se determine parametrii reali α, β .

Alexandru Necula

Soluție:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \alpha \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \alpha \cdot 0 \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \alpha \cdot 0 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{-\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2 e^x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2 e^x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{1+x}+x}{e^x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}} = e^{-1 \cdot \infty} = 0$$

Deoarece funcția este continuă pe \mathbb{R} (deci și în 0) rezultă că

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0 = f(0). \text{ Dar } f(0) = \beta.$$

Rezultă că: $\beta = 0$ și $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. Să se determine parametrii $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ știind că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln[1 + \ln(3-x)]}{x-2}, & x < 2 \\ \alpha, & x = 2 \\ x^2 - \beta, & x > 2 \end{cases},$$

este continuă pe \mathbb{R} .

Tania Andrei

Soluție:

Pe intervalele $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$ funcția f este continuă fiind funcție compusă de funcții elementare. Studiem continuitatea în $x = 2$.

Avem:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{\ln[1 + \ln(3-x)]}{x-2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{1}{x-2} \ln[1 + \ln(3-x)] = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \ln[1 + \ln(3-x)]^{\frac{1}{x-2}} = \ln \left(\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} [1 + \ln(3-x)]^{\frac{1}{\ln(3-x)} \cdot \frac{\ln(3-x)}{x-2}} \right) = \\ &= \ln e^{\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{\ln(3-x)}{x-2}} = \ln e^{-\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{\ln[1+(2-x)]}{2-x}} = \ln e^{-1} = -1, \text{ deci: } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = -1 \end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (x^2 - \beta) = 4 - \beta;$$

Valoarea funcției f în 2 este $f(2) = \alpha$.

f va fi continuă în 2 doar dacă $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = f(2)$, aceasta

însemnând că: $-1 = \alpha = 4 - \beta$, deci $\alpha = -1$ și $\beta = 5$.

6. Fie funcția $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \\ x^2 - \frac{\pi^2}{36} + \frac{\alpha}{2}, & x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ știind că funcția este continuă pe \mathbb{R} .

Alexandru Necula

Soluție:

Pe intervalele $\left[0, \frac{\pi}{6}\right], \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ funcția f este continuă (funcții

elementare). Studiem continuitatea în $x = \frac{\pi}{6}$. Avem:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{6} \\ x < \frac{\pi}{6}}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin x = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{6} \\ x > \frac{\pi}{6}}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left(x^2 - \frac{\pi^2}{36} + \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\alpha}{2};$$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. Funcția f fiind continuă pe \mathbb{R} rezultă că este continuă și

în $\frac{\pi}{6}$ deci cele trei relații sunt egale ceea ce conduce la ecuația

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}, \text{ adică } \alpha = 1.$$

7. Să se studieze continuitatea funcției $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$,

definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x}, & x \in \left[-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right] \setminus \{0\} \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}.$$

Aurelia Catană

Soluție:

Pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ funcția f este continuă (componere de funcții elementare). Studiem continuitatea în $x = 0$.

$$\text{Avem } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 \sin^2 \frac{x^2}{2}}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \cdot \left| \sin \frac{x^2}{2} \right|}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}$$

Dacă $x \in \left[-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right] \setminus \{0\}$ atunci $x^2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ deci $\left|\sin \frac{x^2}{2}\right| = \sin \frac{x^2}{2}$.

Rezultă că

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x^2}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{\frac{x^2}{4} \cdot 2}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \sqrt{2} \cdot 1 \cdot 1 = \sqrt{2}$$

Așadar funcția f este continuă în 0 dacă și numai dacă $\alpha = \sqrt{2}$.

8. Să se studieze continuitatea funcției $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, definită

prin:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \cdot \sin x + 2 \cos x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ \operatorname{tg} x + 3\alpha \cdot \operatorname{ctg} x, & x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Tania Andrei

Soluție:

Pe intervalele $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ funcția f este continuă

(componere de funcții continue). Studiem continuitatea în $\frac{\pi}{4}$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ x < \frac{\pi}{4}}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\alpha \cdot \sin x + 2 \cos x) = \alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ x > \frac{\pi}{4}}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x + 3\alpha \cdot \operatorname{ctg} x) = 1 + 3\alpha$$

Funcția f va fi continuă dacă și numai dacă

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ x < \frac{\pi}{4}}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ x > \frac{\pi}{4}}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ rezultă că } \alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + 3\alpha,$$

$$\text{adică } \alpha \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \right) = 1 - \sqrt{2} \text{ deci } \alpha = \frac{1 - \sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - 3} = \frac{2(1 - \sqrt{2})}{\sqrt{2} - 6}, \text{ rezultă}$$

$$\alpha = \frac{(2 - 2\sqrt{2})(\sqrt{2} + 6)}{2 - 36} = \frac{\sqrt{2} - 4 + 12 - 12\sqrt{2}}{-34} = \frac{11\sqrt{2} - 8}{34}.$$

9. Se dă o funcție $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea următoare:
există un întreg $k \geq 2$, astfel încât $f(x) = f(x^k)$, oricare ar fi
 $x \in [0, \infty)$. Arătați că:

a) Pentru orice $x \in [0, \infty)$ și orice întreg $n \geq 1$ au loc relațiile:
 $f(x) = f(x^{k^n}) = f(\sqrt[k^n]{x})$.

b) Dacă f este continuă, atunci f este constantă

Admitere, Universitatea București, Facultatea de Matematică, 1976

Soluție:

a) Egalitatea $f(x) = f(x^{k^n})$ se obține aplicând lui x de n ori
consecutiv relația din ipoteză:

$$f(x) = f(x^k) = f\left(\left(x^k\right)^k\right) = f\left(x^{k^2}\right) = f\left(\left(x^{k^2}\right)^k\right) = \dots = f\left(x^{k^n}\right)$$

Egalitatea $f\left(x^{\frac{1}{k^n}}\right) = f(x)$ se obține aplicând același procedeu

pentru $x^{\frac{1}{k^n}}$:

$$f\left(x^{\frac{1}{k^n}}\right) = f\left(\left(x^{\frac{1}{k^n}}\right)^k\right) = f\left(x^{\frac{1}{k^{n-1}}}\right) = \dots = f(x).$$

b) Fie $x \in [0, 1)$. Atunci aplicând punctul a) rezultă că $\forall n \geq 1$ avem $f(x) = f(x^{k^n})$. Dar $x_n = x^{k^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, și deoarece funcția f este continuă iar șirul valorilor $(f(x_n))_{n \geq 1}$ este șirul constant de termen $f(x)$, rezultă că $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(x)$.

Fie $x \in (1, \infty)$. Atunci șirul $y_n = \sqrt[k^n]{x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$; deoarece $f(y_n) = f(x)$, $\forall n \geq 1$, și funcția f este continuă, rezultă că $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(x)$.

Deci $\text{Im } f = f([0, \infty)) = \{f(0), f(1)\}$. Dar, deoarece intervalul $[0, \infty)$ este o mulțime conexă, iar funcția f este continuă, rezultă că $\text{Im } f$ este o mulțime conexă, adică $f(0) = f(1)$.

Deci,
 $\forall x \in [0, \infty)$, avem că $f(x) = f(0)$, adică funcția este constantă.

10. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție reală, continuă în x_0 și \mathbb{R}^+ mulțimea numerelor reale strict pozitive.

a) Să se arate că există o funcție $I : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ depinzând de f și de x_0 astfel încât să fie îndeplinită condiția: pentru orice $\xi \in \mathbb{R}^+$ avem $|f(x_0 + h) - f(x_0)| > \xi$ de îndată ce $|h| < I(\xi)$.

b) Este funcția I unic determinată (cu proprietatea de mai sus) de f și x_0 ?

c) Există funcții f și puncte x_0 pentru care funcția I este constantă?

d) Există funcții f și puncte x_0 pentru care funcția I este funcția identică a lui \mathbb{R}^+ ?

Soluție:

a) Definiția continuității funcției f în punctul x_0 se scrie:

$\forall \xi > 0, \exists I(\xi) > 0$ astfel încât $|h| < I(\xi) \Rightarrow |f(x_0 + h) - f(x_0)| < \xi$
și existența funcției I este demonstrată.

b) Funcția I nu este unică. Într-adevăr, dacă pentru funcția f și punctul x_0 există funcția I cu proprietatea din enunț, atunci funcția

$I_1 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, I_1(\xi) = \frac{1}{2}I(\xi)$ verifică proprietatea din enunț.

c) Să luăm funcția constantă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = k$ și un punct oarecare $x_0 \in \mathbb{R}$. Atunci I poate fi orice funcție constantă (pozitivă). Într-adevăr, dacă $I(\xi) = c > 0$ avem:

$$|h| < c = I(\xi) \Rightarrow |f(x_0 + h) - f(x_0)| = |k - k| = 0 < \xi,$$

pentru fiecare $\xi > 0$.

d) Dacă luăm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$ și $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrar, putem lua $I : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, I(\xi) = \xi$. Într-adevăr, pentru $\xi > 0$ avem:

$$|h| < \xi = I(\xi) \Rightarrow |f(x_0 + h) - f(x_0)| = |x_0 + h - x_0| = |h| < \xi.$$