Revista Mateinfo.ro ISSN 2065 – 6432 nr. martie 2009

Calculul primitivelor - teorie şi aplicații

prof. Andrei Dobre

I. Primitive din funcții raționale

Fie $f : D \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu $f(x) = \dfrac{P_0(x)}{Q(x)}$, unde P_0, Q $\in$ **R**[X] şi $grP_0 \geq grQ$, atunci avem: $f(x) = \dfrac{P_0(x)}{Q(x)} = p_0(x) + \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, iar P, Q,$p_0 \in$ **R**[X] şi grP < grQ. După o teoremă din algebră (capitolul III), are loc descompunerea în fracții simple:

$$f(x) = p_0(x) + \sum\nolimits_1 \frac{A_n}{(x-x_0)^n} + \sum\nolimits_2 \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$$ ($\Delta = p^2 - 4q < 0$), unde Σ_1 este suma relativă la toate rădăcinile reale simple şi multiple, iar Σ_2 este suma relativă la toate rădăcinile complexe simple şi multiple ale ecuației algebrice cu coeficienți reali: Q(x) = 0.

Calculul primitivelor lui f este dat prin:

$$\int f(x)dx = \int p_0(x)dx + \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx =$$

$$= p(x) + \sum\nolimits_1 \int \frac{A_n}{(x-x_0)^n} + \sum\nolimits_2 \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$$

şi conduce la următorul rezultat:

$$(i)\int \frac{A_n}{(x-x_0)^n}dx = \begin{cases} A_1 \ln|x-x_0| + C_1; n=1 \\ \dfrac{A_n}{1-n}\cdot\dfrac{1}{(x-x_0)^{n-1}} + C_2; n \geq 2 \end{cases}$$

Ecuația $x^2 + px + q = 0$ cu $\Delta = p^2 - 4q < 0$ are rădăcini complexe:

$x_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbf{C}$, unde α, β ∈ **R**. Are loc descompunerea canonică:

$$x^2 + px + q = (x-\alpha)^2 + \beta^2 \text{ unde } \begin{cases} \mathrm{p} = -2\alpha \\ \mathrm{q} = \alpha^2 + \beta^2 \\ \Delta = -4\beta^2 < 0 \end{cases}$$

Avem: $(ii) \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx =$

$$= \begin{cases} \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{M\alpha + N}{\beta} arctg \frac{x-\alpha}{\beta} + C_1; n = 1 \\ -\frac{M}{2} \cdot \frac{N}{(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}} + (M\alpha + N) I_n; n \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_n = \int \frac{d(x-\alpha)}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^n} = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} \\ I_n = \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} \right] \text{ pentru n} \geq 2 \\ I_1 = \frac{1}{\beta} arc\,\mathrm{tg} \frac{x-\alpha}{\beta} + C_2; I_0 = x + C_3 \end{cases}$$

II. Integrarea funcțiilor iraționale

Integrarea funcțiilor iraționale se va reduce, prin substituții convenabile, la integrarea de funcții raționale. Vom folosi notația *R*(u, v, w, ...) pentru a desemna o funcție rațională în variabilele u, v, w, ... care la rândul lor sunt funcții în *x*.

$$1^{\mathrm{o}}) \int R(x^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, x^{\frac{m_p}{n_p}}) dx \text{ cu} \begin{cases} m_1, \ldots, m_p \in \mathbf{Z} \\ n_1, \ldots, n_p \in \mathbf{N}^* \end{cases}$$

şi considerăm n = c.m.m.m.c.$\{n_1, n_2, ..., n_p\}$. Substitiția $x = t^n$ şi $dx = nt^{n-1}dt$, notând: $s_1 = \frac{m_1}{n_1} \cdot n, \ldots, s_p = \frac{m_p}{n_p} \cdot n$ cu $s_1, ..., s_p \in \mathbf{Z}$, obținem:

$$\int R(x^{\frac{m_1}{n_1}},\ldots,x^{\frac{m_p}{n_p}})dx = n\int R(t^{s_1},\ldots,t^{s_p})t^{n-1}dt = \int R_1(t)dt$$ cu R_1 o funcție rațională în t.

2°) $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}}\right)dx$ unde $cx+d \neq 0$, $\frac{ax+b}{cx+d} \geq 0$ cu $a, b, c, d \in \mathbf{R}^*$, $m_1, ..., m_p \in \mathbf{Z}$, $n_1, ..., n_p \in \mathbf{N}^*$ şi considerăm:

n = c.m.m.m.c. $\{n_1, n_2, ..., n_p\}$. Substituția:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{dt^n - b}{a - ct^n}(a - ct^n \neq 0) \\ dx = \dfrac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}}\right)dx =$$

$$= \int R\left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}, t^{s_1},\ldots,t^{s_p}\right)\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt = \int R_2(t)dt,$$ unde R_2 este o funcție rațională în t.

3°) $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ cu $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ şi $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$

Se vor efectua **substituțiile lui Euler**:

3_1°) Dacă $a > 0$ substituția este: $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} \pm t$ şi pentru cazul $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} + t \Rightarrow x = \frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}}(b - 2t\sqrt{a} \neq 0)$;

$$dx = 2\frac{-\sqrt{a}t^2 + bt - c\sqrt{a}}{(b-2t\sqrt{a})^2}dt; \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{-\sqrt{a}t^2 + bt - c\sqrt{a}}{b - 2t\sqrt{a}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx =$$

$$= 2\int R\left(\frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}}, \frac{-\sqrt{a}t^2 + bt - c\sqrt{a}}{b - 2t\sqrt{a}}\right)\frac{-\sqrt{a}t^2 + bt - c\sqrt{a}}{(b - 2t\sqrt{a})^2}dt = \int R_3(t)dt$$

cu R_3 o funcție rațională în t.

3_2°) Dacă $c > 0$ substituția este: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$ și pentru cazul $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$ avem: $x = \dfrac{2t\sqrt{c} - b}{a - t^2}(a - t^2 \neq 0)$;

$$dx = 2\frac{t^2\sqrt{c} - bt + a\sqrt{c}}{(a - t^2)^2}dt; \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{t^2\sqrt{c} - bt + a\sqrt{c}}{a - t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx =$$

$$= 2\int R\left(\frac{2t\sqrt{c} - b}{a - t^2}, \frac{t^2\sqrt{c} - bt + a\sqrt{c}}{a - t^2}\right)\frac{t^2\sqrt{c} - bt + a\sqrt{c}}{(a - t^2)^2}dt = \int R_4(t)dt$$

cu R_4 o funcție rațională în t.

3_3°) Dacă $a < 0$ şi $c < 0$, iar $\Delta = b^2\text{-}4ac < 0 \Rightarrow ax^2+bx+c < 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$ şi $\sqrt{ax^2 + bx + c} \in \mathbf{C}$. Dacă $\Delta = b^2\text{-}4ac > 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ cu $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ şi $x_1 \neq x_2$.

Avem: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = (x - x_1)\sqrt{a\dfrac{x - x_2}{x - x_1}}$ şi atunci

$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx = \int R\left(x, (x - x_1)\sqrt{a\dfrac{x - x_2}{x - x_1}}\right)dx$ este de tip 2° şi se face substituția: $\dfrac{x - x_2}{x - x_1} = t^2 \Rightarrow x = \dfrac{x_1t^2 + x_2}{1 + t^2}; dx = \dfrac{2t(x_1 - x_2)}{(1 + t^2)^2}dt;$

$$x - x_1 = \frac{x_2 - x_1}{1+t^2} \Rightarrow \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx =$$

$$= \int R\left(\frac{x_1 t^2 + x_2}{1+t^2}, \frac{x_2 - x_1}{1+t^2} t\sqrt{-a}\right) \frac{2t(x_1 - x_2)}{(1+t^2)^2} dt = \int R_5(t)dt$$

cu R_5 o funcție rațională în t.

4°) $\int x^m (a+bx^n)^p dx$ **integrale binome** cu $a, b \in \mathbf{R}^*$, $m, n, p \in \mathbf{Q}$ şi notăm

$m = \frac{m_1}{m_2}, n = \frac{n_1}{n_2}, p = \frac{p_1}{p_2}$, unde $m_1, n_1, p_1 \in \mathbf{Z}$; $m_2, n_2, p_2 \in \mathbf{N}^*$.

Teorema lui P.L.Cebîşev

Primitivele pentru $\int x^m (a+bx^n)^p dx$ se pot exprima prin combinații finite de funcții elementare numai în următoarele trei cazuri:

4_1°) $p \in \mathbf{Z}$

4_2°) $\frac{m+1}{n} \in \mathbf{Z}$

4_3°) $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbf{Z}$

Demonstrație 4_1°) Dacă $p \in \mathbf{Z}$ avem:

$$(i)\, p = 0 \Rightarrow \int x^m \left(a+bx^n\right)^0 dx = \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C_1 \quad (m \neq -1)$$

$$(ii)\, p > 0 \Rightarrow \int x^m (a+bx^n)^p dx = \sum_{k=0}^{p} C_p^k a^{p-k} b^k \frac{x^{nk+m+1}}{nk+m+1} + C_2$$

$$(iii)\, p < 0 \Rightarrow \int x^m (a+bx^n)^p dx = \int \frac{x^m}{(a+bx^n)^{-p}} dx = \int R(x, x^{\frac{m_1}{m_1}}, x^{\frac{n_1}{n_2}})dx$$ este

de tip 1° şi notând n = c.m.m.m.c.$\{m_2, n_2\}$ prin substituția:

$$x^n = t \Leftrightarrow x = t^{\frac{1}{n}};$$

$dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1-n}{n}} dt \Rightarrow \int x^m (a+bx^n)^p dx = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1} \frac{1}{(a+bt)^{-p}} dt = \int R_6(t)dt$ cu R_6 o funcție rațională în t.

$4_2°$) Dacă $p \notin \mathbf{Z}$ și $\frac{m+1}{n} \in \mathbf{Z}$, atunci $\frac{m+1}{n} - 1 \in \mathbf{Z}$ și prin substituția $x^n = t$, avem: $\int x^m (a+bx^n)^p dx = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p dt$ din care prin o nouă substituție: $a + bt = z^{p_2} \Leftrightarrow a + bx^n = t^{p_2} \Rightarrow t = \frac{z^{p_2} - a}{b}; dt = \frac{p_2}{b} z^{p_2 - 1} dz$ se obține rezultatul final: $\int x^m (a+bx^n)^p dx = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p dt =$

$= \frac{1}{n}\frac{p_2}{b}\int \left(\frac{z^{p_2} - a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} \cdot z^{p_1+p_2-1} dz = \int R_7(z)dz$, R_7 o funcție rațională în z deoarece: $\frac{m+1}{n} - 1 \in \mathbf{Z}$ și $p_1 + p_2 - 1 \in \mathbf{Z}$.

$4_3°$) Dacă $p, \frac{m+1}{n} \notin \mathbf{Z}$ și $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbf{Z}$ se reprezintă integrala binomă sub forma: $\int x^m (a+bx^n)^p dx = \int x^m \left(\frac{a+bx^n}{x^n} \cdot x^n\right)^p dx = \int x^{m+np}\left(\frac{a+bx^n}{x^n}\right)^p dx$

și prima substituție: $x^n = t \Leftrightarrow x = t^{\frac{1}{n}}; dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1-n}{n}} dt$ conduce la:

$\int x^m (a+bx^n)^p dx = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}p-1}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p dt$ a doua substituție:

$$\frac{a+bt}{t}=z^{p_2} \Leftrightarrow \frac{a+bx^n}{x^n}=t^{p_2} \Rightarrow t=\frac{a}{z^{p_2}-b}(z^{p_2}-b\neq 0); dt=\frac{-ap_2 z^{p_2-1}}{(z^{p_2}-b)^2}dz$$

$$\Rightarrow \int x^m(a+bx^n)^p dx=-\frac{ap_2}{n}\int\left(\frac{a}{z^{p_2}-b}\right)^{\frac{m+1}{n}+p-1} z^{p_1+p_2-1}dz=\int R_8(z)dz$$

cu $\frac{m+1}{n}+p-1\in \mathbf{Z}$, $p_1+p_2-1\in \mathbf{Z}$ şi R_8 o funcţie raţională în **Z**.

III. Integrarea funcţiilor raţionale în *sinx* şi *cosx*

1°) Calculul integralei $\int R(\sin x,\cos x)dx$ în cazul general cu $x\in(-\pi,\pi)$

se face printr-o schimbare de variabilă: $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t \Rightarrow \begin{cases} x=2\mathrm{arctg}t \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{cases}$ şi

$$\begin{cases}\sin x=\frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{cases} \Rightarrow \int R(\sin x,\cos x)dx=2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}=\int R_1(t)dt$$

cu R_1 o funcţie raţională în t.

2°) Dacă $R(\sin x, \cos x)$ este o funcţie impară în $\cos x$, avem: $R(\sin x, \cos x)dx = f(\sin^2 x, \cos^2 x)\cos x dx$ şi prin substituţia: $\sin x = t$; $\cos x dx = dt$ se obţine:
$R(\sin x,\cos x)dx=f(\sin^2 x,\cos^2 x)\cos x dx=f(t^2,1-t^2)dt \Rightarrow$

$\Rightarrow \int R(\sin x,\cos x)dx=\int f(t^2,1-t^2)dt=\int R_2(t)dt$ cu R_2 o funcţie raţională în t.

3°) Dacă $R(\sin x, \cos x)$ este o funcţie impară în $\sin x$, avem: $R(\sin x, \cos x)dx = g(\sin^2 x, \cos^2 x)\sin x dx$ şi prin substituţia: $\cos x = t$; $-\sin x dx = dt$ rezultă:
$\int R(\sin x,\cos x)dx=-\int g(\sin^2 x,\cos^2 x)(-\sin x)dx=-\int g(1-t^2,t^2)dt=\int R_3(t)dt$
cu R_3 o funcţie raţională în t.

4°)Dacă R(sin$x$, cos$x$) este o funcție pară în sin$x$ şi cos$x$ avem: R(sin$x$, cos$x$) = h(sin^2x, cos^2x) şi prin substituția: $\text{tg}x = t; x = \text{arctg}t, dx = \frac{dt}{1+t^2}$;

$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$ se obține rezultatul final:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int h(\sin^2 x, \cos^2 x)dx = \int h\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2} = \int R_4(t)dt$$

cu R_4 o funcție rațională în t.

IV. Integrarea funcțiilor raționale în exponențiale

Primitivele de forma: $\int R(e^{r_1 ax}, \ldots, e^{r_p ax})dx$ cu $a \neq 0$, $a \in \mathbf{R}$ şi $r_1,\ldots, r_p \in \mathbf{Q}$, iar $r_i = \frac{m_i}{n_i}, m_i \in \mathbf{Z}, n_i \in \mathbf{N}^*$ şi $i = 1,\ldots,p$ se va nota λ=c.m.m.m.c.$\{n_1,\ldots,n_p\}$

şi prin substituția: $\begin{cases} e^{ax} = t^{\lambda} \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\lambda \ln t}{a} \\ dx = \frac{\lambda}{a} \cdot \frac{dt}{t} \end{cases}$ se obține:

$\int R(e^{r_1 ax}, \ldots, e^{r_p ax})dx = \frac{\lambda}{a}\int R(t^{\lambda r_1}, \ldots, t^{\lambda r_p})\frac{dt}{t} = \int R_1(t)dt$ cu R_1 o funcție rațională în t.

V. Integrale de forma $\int P_n(x)f(x)dx$

Unde $P_n \in \mathbf{R}[X]$ şi f este una dintre funcțiile elementare: e^x, a^x, ln$x$, log$_a x$, arcsin$x$, arccos$x$, arctg$x$, arcctg$x$, etc. se calculează prin metoda integrării prin părți cu scopul de a reduce treptat cu câte o unitate gradul polinomului P_n, gr$P_n = n$ ($n \in \mathbf{N}$). Se întâlnesc următoarele cazuri:

1°) $\int P_n(x)e^x dx = e^x P_n(x) - \int P_n'(x)e^x dx = e^x P_n(x) - \int Q_{n-1}(x)e^x dx$

($Q_{n-1} = P_n'$ şi gr$Q_{n-1} = n - 1$)

2°) $\int P_n(x)\ln x dx = Q_{n+1}(x)\ln x - \int Q_{n+1}(x)\frac{dx}{x} = \int \widetilde{Q}_n(x)dx$, unde:

$Q_{n+1}(x) = \int P_n(x)dx$ cu grQ_{n+1}=n+1 şi $\widetilde{Q}_n(x)$ polinom cu gr$\widetilde{Q}$=n.

3°) $\int P_n(x)\arcsin x dx = Q_{n+1}(x)\arcsin x - \int \frac{Q_{n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$

cu $Q_{n+1}(x) = \int P_n(x)dx$ polinom de grad (n+1); se elimină radicalul din ultima integrală prin una dintre substituţiile lui Euler. De asemenea, în unele cazuri sunt convenabile substituţiile trigonometrice:

$$\begin{cases} x = \sin t \quad (x = \cos t) \\ dx = \cos t dt \quad (dx = -\sin t dt) \\ \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = |\cos t| \quad (\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = |\sin t|) \end{cases}$$

şi se obţine integrala unei funcţii raţionale în sin$t$ şi cos$t$.

4°) $\int P_n(x)\text{arctg}x dx = Q_{n+1}(x)arctgx - \int Q_{n+1}(x)\frac{dx}{1+x^2} =$

$= Q_{n+1}(x)arctgx - \int R(x)dx$

cu R funcţie raţională în x şi $Q_{n+1}(x) = \int P_n(x)dx$ polinom.

5°) $\int P_n(x)a^x dx = P_n(x)\frac{a^x}{\ln a} - \frac{1}{\ln a}\int P_n'(x)a^x dx =$

$= P_n(x)\frac{a^x}{\ln a} - \frac{1}{\ln a}\int Q_{n-1}(x)a^x dx$ (gr$Q_{n-1}(x) = n - 1$).

VI. Integrale eliptice

În cazul $\int R\left(x, \sqrt{P_n(x)}\right)dx$ cu grP_n = $n \geq 3$, primitivele nu se pot exprima, în general , prin combinaţii finite de funcţii elementare şi această clasă de integrale se numesc **integrale eliptice**.

Integralele eliptice se pot reprezenta sub una dintre formele:

$$1°)\begin{cases} I(k,t)=\int \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} \qquad (0\le k\le 1) \\ I(0,t)=t+C; \\ I(1,t)=\int \frac{dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}}=\int \frac{dt}{|\cos t|}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|+C_1 \quad (tg\,\frac{t}{2}=u) \end{cases}$$

$$2°)\begin{cases} E(k,t)=\int \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt \qquad (0\le k\le 1) \\ E(0,t)=t+C_2; \\ E(1,t)=\int \sqrt{1-\sin^2 t}\,dt=\int |\cos t|\,dt=\sin t+C_3 \end{cases}$$

funcțiile *I(k,t)*, *E(k,t)* se numesc **funcții eliptice**; integrale de acest tip apar în calculul lungimii unui arc de elipsă din plan.

VII. Integrale care nu se exprimă prin combinații liniare finite de funcții elementare: $\int \frac{\sin x}{x}dx$ (sinusul integral); $\int \frac{\cos x}{x}dx$ (cosinusul integral); $\int \frac{dx}{\ln x}$ (logaritmul integral); $\int \frac{e^x}{x}dx$ (exponențialul integral); $\int e^{-x^2}dx$ (integrala lui Poisson); $\int \cos x^2 dx$ şi $\int \sin x^2 dx$ (integralele lui Fresnel) şi **integralele eliptice** $\int R(x,\sqrt{P_n(x)})dx$ (gr$P_n = n \ge 3$).

Aplicații:

1. $\int \frac{x^2dx}{1+x^2}=\int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx=x-arctgx+C$

2. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int \frac{dx}{\sin^2 x}-\int \frac{dx}{\cos^2 x}=$

$=-ctgx-tgx+C$

3. $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\underbrace{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}}_{(a\neq 0;\quad \Delta=b^2-4ac)}} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\Delta}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{\Delta}}{2ax+b+\sqrt{\Delta}}\right| + C; \Delta > 0 \\ -\frac{2}{2ax+b} + C; \Delta = 0 \\ \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\, arctg\, \frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} + C; \Delta < 0 \end{cases}$$ prin substituția: $\begin{cases} x+\frac{b}{2a} = t \\ dx = dt \end{cases}$

4. $$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\, a\cos t dt = a^2\int \cos^2 t dt =$$

$x\in[-a,a]$ $\begin{cases} x = a\sin t; dx = a\cos t dt \\ t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \end{cases}$

$$= \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\sin t\cos t + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right] + C$$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ cu $a\neq 0$ şi $I\subseteq \mathbf{R}$ astfel încât $ax^2+bx+c>0$, $\forall x\in I$

$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]}}$ şi apar două cazuri după cum

$a>0$ şi $a<0$:

I. $a > 0 \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{d\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{(x+\frac{b}{2a})^2 \ \mu \ (\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a})^2}} =$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln[x+\frac{b}{2a}+\sqrt{(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}}]+C_1; \text{daca } \Delta > 0 \text{ (se ia semnul+)} \\ \frac{1}{\sqrt{\mathrm{a}}} \ln[x+\frac{b}{2a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{ax^2+bx+c}]+C_2; \text{daca } \Delta < 0 \text{ (se ia semnul -)} \end{cases}$$

II. $a < 0 \Rightarrow \Delta > 0$ şi avem:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{d\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 - \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{x+\frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}} + C_3 = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} + C_3$$

6. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x - 1} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C =$

$$= \frac{1}{2} \ln\left|\frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}}\right| + C = \frac{1}{2} \ln\left|tg^2 \frac{x}{2}\right| + C = \ln\left|tg \frac{x}{2}\right| + C$$

7. $\int \mathrm{arctg} x dx = \int (x)' \mathrm{arctg} x dx = x \mathrm{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \mathrm{arctg} x -$

$\frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x \mathrm{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$

$$8.\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \int (x)'\sqrt{x^2+a^2}\,dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}} =$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} =$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx + a^2 \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$9.\ \underset{n\in\mathbf{N}}{I_n} = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \int \frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \int x\frac{xdx}{(x^2+a^2)^{n+1}} + a^2 I_{n+1} \Rightarrow$$

$$I_n = a^2 I_{n+1} + \int x\left(\frac{1}{2n(x^2+a^2)^n}\right)' dx = a^2 I_{n+1} - \frac{x}{2n(x^2+a^2)^n} + \frac{1}{2n}I_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_{n+1} = \dfrac{1}{a^2}\left[\dfrac{x}{2n(x^2+a^2)^n} + \dfrac{2n-1}{2n}I_n\right]; n\ge 1 \\ I_0 = x + C_1; I_1 = \displaystyle\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}arctg\,\dfrac{x}{a} + C_2 \end{cases}$$

$$10.I_n = \int tg^n x dx = \int tg^{n-2}x(tg^2x+1-1)dx = \int tg^{n-2}x\frac{dx}{\cos^2 x} - I_{n-2} =$$

$$\int tg^{n-2}xd(tgx) - I_{n-2} = \frac{tg^{n-1}x}{n-1} - I_{n-2}, \text{cu } n\ge 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_n = \dfrac{tg^{n-1}x}{n-1} - I_{n-2} \\ I_0 = x + C_1; I_1 = \displaystyle\int tgxdx = \int \dfrac{\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x| + C_2 \end{cases}$$

$$11.\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx = \int\left[\frac{1}{x-2} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} - \frac{x+2}{x^2+1}\right]dx =$$

$$= \ln|x-2| + \frac{3}{2}\frac{1}{x^2+1} - 4\left(\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}arctgx\right) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 2arctgx + C$$

$(I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ caz particular din 10.)

$$12.\int \frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \int \frac{\frac{t(t+2)}{2(t+1)}}{t}\frac{1}{2}\frac{t^2+2t+2}{(t+1)^2}dt = \frac{1}{4}\int \frac{t^3+4t^2+6t+4}{(t+1)^3}dt$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+2x+2} = t-x \\ x = \dfrac{t^2-2}{2(t+1)} \\ dx = \dfrac{1}{2}\dfrac{t^2+2t+2}{(t+1)^2}dt \\ \sqrt{x^2+2x+2} = \dfrac{t^2+2t+2}{2(t+1)} \\ x+\sqrt{x^2+2x+2} = t \end{cases}$$

$$= \frac{1}{4}\int dt + \frac{1}{4}\int \frac{t^3+3t+3}{(t+1)^3}dt = \frac{t}{4} + \frac{1}{4}\int \frac{(t+1)^2+(t+1)+1}{(t+1)^3}d(t+1) =$$

$$= \frac{t}{4} + \frac{1}{4}\ln|t+1| - \frac{1}{4}\frac{1}{t+1} - \frac{1}{8}\frac{1}{(t+1)^2} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \frac{1}{4}(x+\sqrt{x^2+2x+2}) + \frac{1}{4}\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}| -$$

$$- \frac{2x+3-2\sqrt{x^2+2x+2}}{8(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})^2} + C$$

$$13.\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}dx$$

$$p = \frac{1}{3} \notin \mathbf{Z}; \frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2 \in \mathbf{Z} \Rightarrow 1+\sqrt[4]{x} = t^3 \Rightarrow \sqrt[4]{x} = t^3-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = (t^3-1)^4 \\ dx = 4(t^3-1)^3 \cdot 3t^2 dt \end{cases}$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int [(t^3-1)^4]^{-\frac{1}{2}} \cdot t \cdot 12t^2(t^3-1)^3dt = 12\int (t^6-t^3)dt =$$

$$\frac{12}{7}t^7 - \frac{12}{4}t^4 + C = \frac{12}{7}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^7} - 3\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4} + C$$

$$14. \int \frac{\sqrt[3]{(2x^3+1)^2}}{x^6}dx = \int x^{-6}(1+2x^3)^{\frac{2}{3}}dx$$

$$m=-6, n=3, p=\frac{2}{3} \notin \mathbf{Z}; \frac{m+1}{n} = \frac{-5}{3} \notin \mathbf{Z}; \frac{m+1}{n}+p = \frac{-5}{3}+\frac{2}{3} = -1 \in \mathbf{Z}$$

$$\frac{1+2x^3}{x^3} = t^3 \Leftrightarrow 2+x^{-3} = t^{-3} \Rightarrow -3x^{-4}dx = 3t^2dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int x^{-6}\left(\frac{1+2x^3}{x^3}\cdot x^3\right)^{\frac{2}{3}}dx = \int x^{-4}\left(\frac{1+2x^3}{x^3}\right)^{\frac{2}{3}}dx = -\int (t^3)^{\frac{2}{3}}t^2dt = -\int t^4dt =$$

$$= -\frac{t^5}{5} + C = -\frac{1}{5}\sqrt[3]{\left(\frac{1+2x^3}{x^3}\right)^5} + C$$

Bibliografie:

Ion Petrică, Emil Constantinescu, Dumitru Petre "Probleme de Analiză Matematică"
Mircea Ganga "Matematică - Manual pentru cls. a XII a"
Traian Cohal, Gheorghe Iurea - Probleme de matematica