Revista MateInfo.Ro ISSN 2065 - 6432 mai 2009

Revista Mateinfo.ro

Probleme propuse pentru concursurile scolare

Prof. Iuliana Traşcă

Sc. cu cls. I-VIII Mărgineni-Slobozia

Oraş Scorniceşti, jud. Olt

Clasa a V-a

1. Să se afle $A=\overline{aabc}$ divizibil cu 45 ştiind că $B=\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$ se divide cu 57.

Soluţie:

$B=111(a+b+c)$

$B=3\cdot 37(a+b+c)$

$57=3\cdot 19$

Cum B se divide cu 57 $\Rightarrow$ 19/ (a+b+c), deci a+b+c=19, pentru că a,b,c$\in$ {1,2,3,...,9}

Dar 9/A, cum A= 999a+99a+9b+a+a+b+c, avem:

A/(2a+b+c), adică A/ (a+19) $\Rightarrow$a=8, deci b+c=11

5/A , dar A= 1000a+100a+10b+c deci c=5 şi rezultă b=6

Deci A=8865

Clasa a VI-a

2. Rezolvați în NxN ecuația :

$$\frac{1}{a+2008}+\frac{2009}{b+2009}=1, \text{ daca } a-b\in N^*.$$

Soluție:

Din $a-b\in N^* \Rightarrow a-b\geq 1 \Rightarrow a\geq b+1 \Rightarrow a+2008\geq b+2009 \Rightarrow \frac{1}{a+2008}\leq \frac{1}{b+2009}$

Avem $\frac{1}{a+2008}+\frac{2009}{b+2009}\leq \frac{1}{b+2009}+\frac{2009}{b+2009}=\frac{2010}{b+2009}\Rightarrow 1\leq \frac{2010}{b+2009}\Rightarrow b\leq 1$

De unde $b\in \{0,1\}$.

Pentru $b=0 \Rightarrow \frac{1}{a+2010}=0 \Rightarrow$ nu avem solutie;

Pentru $b=1 \Rightarrow a=2$.

Solutia este $a=2, b=1$.

Clasa a VI-a

3.Arãtați cã fracția:

$\frac{5n+3}{6n^2+7n+2}$ este ireductibilă $\forall \ n\in N$

Soluție:

$6n^2+7n+2=6n^2+4n+3n+2=2n(3n+2)+(3n+2)=(2n+1)(3n+2)$

$Avem\ \dfrac{5n+3}{6n^2+7n+2}=\dfrac{5n+3}{(2n+1)(3n+2)}$

$Daca\ (5n+3,2n+1)=d\Rightarrow\begin{cases}d/(5n+3)\Rightarrow d/2(5n+3)\\ d/(2n+1)\Rightarrow d/5(2n+1)\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow d/[2(5n+3)-5(2n+1)]\Rightarrow d/1\Rightarrow d=1\Rightarrow$

$\Rightarrow (1)\ (5n+3,2n+1)=1.$

$\text{Daca } (5n+3,3n+2)=d\Rightarrow\begin{cases}d/(5n+3)\Rightarrow d/3(5n+3)\\ d/(3n+2)\Rightarrow d/5(3n+2)\end{cases}\Rightarrow$

$d/[5(3n+2)-3(5n+3)]\Rightarrow d/1\Rightarrow d=1\Rightarrow$

$\Rightarrow (2)\ (5n+3,3n+2)=1.$

Din (1) şi (2) rezultă că fracția este ireductibilă.

4. Sã se rezolve în **ZXZ** ecuația:

$$a^2+b^2=\frac{2003^2+2004^2+2005^2+2006^2+2007^2+2008^2+2009^2}{7}$$

Soluție:

Se observă că: 2003=2006-3, 2004=2006-2, 2005=2006-1, 2007=2006+1, 2008=2006+2 şi 2009=2006+3.

Atunci $2003^2+2004^2+2005^2+2006^2+2007^2+2008^2+2009^2=(2006-3)^2+(2006-2)^2+$
$+(2006-1)^2+2006^2+(2006+1)^2+(2006+2)^2+(2006+3)^2=7\cdot 2006^2+28=$
$=7\left(2006^2+4\right)=7\left(2006^2+2^2\right).$

Prin urmare soluția ecuației este :

$(a,b)\in\{(2006,2);(2,2006);(-2,2006);(-2006,2);(-2,-2006);(-2006,-2);(2,-2006),(-2006,2)\}.$

Clasa a VII- a

5. Să se arate că dacă laturile unui triunghi dreptunghic sunt numere naturale atunci aria şi semiperimetrul acestuia sunt numere naturale.

Soluție

Într-un triunghi dreptunghic avem : $b^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow (b+c)^2 - 2bc = a^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2bc = (b+c)^2 - a^2 \Leftrightarrow (*) bc = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2}.$$

Însă produsul bc este număr natural , rezultă atunci că produsul :

$(b+c+a)(b+c-a)$ trebuie să fie divizibil cu 2, adică unul din factorii $(b+c+a)$, sau $(b+c-a)$ trebuie să fie par .Fie k un număr natural :

(1) Să presupunem că $b+c+a = 2k \Rightarrow b+c-a = 2(k-a)$, şi prin urmare din

$$(*) \Rightarrow bc = 2k(k-a) = par \Rightarrow \begin{cases} S = \dfrac{bc}{2} = k(k-a) \in N \\ p = \dfrac{a+b+c}{2} = k \in N \end{cases},$$

(2) Să presupunem că $b+c-a = 2k \Rightarrow b+c+a = 2(k+a)$, şi prin urmare din

$$(*) \Rightarrow bc = 2k(k+a) = par \Rightarrow \begin{cases} S = \dfrac{bc}{2} = k(k+a) \in N \\ p = \dfrac{a+b+c}{2} = k+a \in N \end{cases}$$

Din (1) şi (2) rezultă că în ambele cazuri aria şi semiperimetrul sunt numere naturale.

Clasa a VIII- a

6. Sã se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\ldots-\frac{1}{2007}+\frac{1}{2008}-\frac{1}{2009}+\frac{1}{2010}<0{,}2$$

Soluție:

Notam $S=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\ldots-\frac{1}{2007}+\frac{1}{2008}-\frac{1}{2009}+\frac{1}{2010}$

Conform identitati i Catalan :

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}$, avem :

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2007}-\frac{1}{2008}+\frac{1}{2009}-\frac{1}{2010}=\frac{1}{1006}+\frac{1}{1007}+\frac{1}{1008}+\ldots+\frac{1}{2009}+\frac{1}{2010}$, rezulta :

$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-S=\frac{1}{1006}+\frac{1}{1007}+\frac{1}{1008}+\ldots+\frac{1}{2009}+\frac{1}{2010}>\frac{1005^2}{1006+1007+\ldots+2010}=\frac{1005}{1508}$ (s - a utilizat inegalitat ea mediilor $(a_1+a_2+\ldots+a_n)(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n})\geq n^2$)

Deci $\frac{5}{6}-S>\frac{1005}{1508}\Rightarrow S<\frac{1510}{6\cdot 1508}<\frac{1}{5}=0{,}2$.