

**CURSUL I. INTEGRALA NEDEFINITĂ.**

**1. Primitive. Proprietăți.**

Pe parcursul cursului, I este un interval;

**Definiția 1.** Fie  $f: I \rightarrow R$ . Se spune că f admite primitive pe I dacă  $\exists F: I \rightarrow R$  astfel încât

a) F este derivabilă pe I;

b)  $F'(x) = f(x), \forall x \in I$ .

**F se numește primitiva lui f.** ( I poate fi și o reuniune finită disjunctă de intervale).

**Teorema 1.1** Fie  $f: I \rightarrow R$ . Dacă  $F_1, F_2: I \rightarrow R$  sunt două primitive ale funcției f, atunci există o constantă  $c \in R$  astfel încât  $F_1(x) = F_2(x) + c, \forall x \in I$ .

Demonstrație : Dacă  $F_1, F_2$  sunt primitive atunci  $F_1, F_2$  sunt derivabile  $\Rightarrow F_1'(x) = F_2'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

$\Leftrightarrow (F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 0, x \in I. \Rightarrow F_1(x) - F_2(x) = c, c = \text{constantă}$

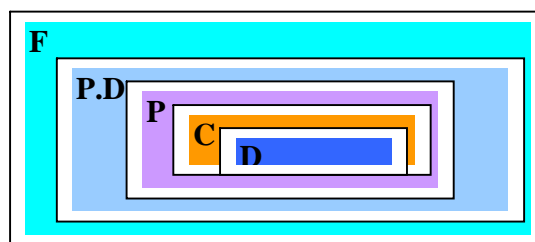
**OBS 1.** Fiind dată o primitivă  $F_0$  a unei funcții atunci orice primitivă F a lui f are forma  $F = F_0 + c, c = \text{constantă}$   
 $\Rightarrow$  f admite o infinitate de primitive.

**OBS 2.** Teorema nu mai rămâne adevărată dacă I este o reuniune disjunctă de intervale Expl:  $f: R - \{0\}, f(x) = x^2$

$F = \frac{x^3}{3}, G = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + 1 \\ \frac{x^3}{3} + 2 \end{cases}$  F, G sunt primitive ale lui f dar F-G nu e constantă . Contradicție cu T 1.1

**OBS 3.** Orice funcție care admite primitive are **Proprietatea lui Darboux.**

Se știe că derivata oricărei funcții are P. lui Darboux , rezultă că f are P lui Darboux.  $F' = f$ .



**OBS 4.** Dacă I este interval și  $f(I) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x) / x \in I\}$  nu este interval atunci f nu admite primitive.

Dacă presupunem că f admite primitive atunci din OBS 3 rezultă că f are P lui Darboux, rezultă  $f(I)$  este interval ceea ce este o contradicție.

**OBS 5.** Orice funcție continuă definită pe un interval admite primitive.

**Definiția 2.** Fie  $f: I \rightarrow R$  o funcție care admite primitive. Mulțimea tuturor primitivelor lui f se numește **integrala nedefinită** a funcției f și se notează prin simbolul  $\int f(x) dx$ . Operația de calculare a primitivelor unei funcții (care admite primitive) se numește **integrare**.

Simbolul  $\int$  a fost propus pentru prima dată de Leibniz, în 1675.

Fie  $F(I) = \{f: I \rightarrow R\}$  Pe această mulțime se introduc operațiile :

## CURS RAPID DE APROFUNDARE LA MATEMATICĂ

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x) \quad \forall x \in R, \alpha \text{ constantă}$$

$$C = \{f : I \rightarrow R / f \in R\}$$

$$\int f(x) dx = \{F \in F(I) / F \text{ primitivă a lui } f\}.$$

**Teorema 1.2** Dacă  $f, g: I \rightarrow R$  sunt funcții care admit primitive și  $a \in R, a \neq 0$ , atunci funcțiile  $f+g$ ,  $\alpha f$  admit de asemenea primitive și au loc relațiile:  $\int (f+g) = \int f + \int g$ ,  $\int \alpha f = \alpha \int f, \alpha \neq 0, \int f = \int f + C$

## 2. PRIMITIVELE FUNCȚILOR CONTINUE SIMPLE

$$1. \int c dx = c \cdot x + C, \quad c \in R$$

$$\text{Ex } \int 6 dx = 6x + C$$

$$2. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\text{Ex. } \int x^{10} dx = \frac{x^{11}}{11} + C$$

$$3. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

$$\text{Ex } \int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{x^4} + C$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\text{Ex } \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

$$5. \int e^x dx = e^x + C$$

$$6. \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$7. \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\text{ctgx} + C$$

$$8. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \text{tgx} + C$$

$$9. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$10. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$11. \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \text{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$\text{Ex } \int \frac{1}{x^2 + 5^2} dx = \frac{1}{5} \text{arctg} \frac{x}{5} + C$$

$$12. \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$\text{Ex } \int \frac{1}{x^2 - 25} dx = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{x-5}{x+5} \right| + C$$

$$13. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C$$

$$\text{Ex } \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4^2}} dx = \ln(x + \sqrt{4^2 + x^2}) + C$$

$$14. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$$

$$\text{Ex } \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 49}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 49} \right| + C$$

## CURS RAPID DE APROFUNDARE LA MATEMATICĂ

$$15. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\text{Ex } \int \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{4} + C$$

$$16. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$17. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$18. \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \sqrt{x^2 + a^2} + C$$

$$\text{Ex } \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 25}} dx = \sqrt{x^2 + 25} + C$$

$$19. \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \sqrt{x^2 - a^2} + C$$

$$\text{Ex } \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 36}} dx = \sqrt{x^2 - 36} + C$$

$$20. \int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$\text{Ex } \int \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} dx = -\sqrt{25 - x^2} + C$$

$$21. \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$$

$$\text{Ex } \int \sqrt{x^2 + 7} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + 7} + \frac{7}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + 7}| + C$$

$$22. \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$$\text{Ex } \int \sqrt{x^2 - 9} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 9} - \frac{9}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - 9}| + C$$

$$23. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\text{Ex } \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

I. Să se calculeze primitivile următoarelor funcții.

$$1. \int (3x^5 - 2x^3 + 3x - 2) dx$$

$$2. \int x(x-1)(x-2) dx$$

$$3. \int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx$$

$$4. \int \left( \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^3 \sqrt{x}} \right) dx$$

$$5. \int (2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + 4\sqrt[5]{x}) dx$$

$$6. \int \left( \frac{5}{\sqrt[5]{x}} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$7. \int x \sqrt{(x-1)^3} dx$$

$$8. \int \left( 2x + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2} \right) dx$$

$$9. \int \left( e^x + \frac{1}{e^x} \right) dx$$

$$10. \int (x^5 + 5^x) dx$$

$$11. \int \left( \frac{5 + 4x}{x} \right)^2 dx$$

$$12. \int \frac{(x+2)^3}{x^3} dx$$

$$13. \int \sqrt{x^2 + 4} dx$$

$$14. \int \sqrt{x^2 - 9} dx$$

$$15. \int \sqrt{4 - x^2} dx$$

$$16^*. \int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} dx$$

## CURS RAPID DE APROFUNDARE LA MATEMATICĂ

17\*. 
$$\int \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x^2 + 2}} dx$$

19\*. 
$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$$

21\*. 
$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$$

18\*. 
$$\int \frac{x^2 - 2}{\sqrt{x^2 - 3}} dx$$

20\*. 
$$\int \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} dx$$

## 3. PRIMITIVELE FUNCȚILOR CONTINUE COMPUSE

1. 
$$\int \varphi'(x) dx = \varphi(x) + C, \quad \varphi(x) \in R$$

Ex 
$$\int (5x+1)' dx = 5x+1+C$$

2. 
$$\int \varphi(x) \cdot \varphi'(x) dx = \frac{\varphi(x)^2}{2} + C$$

Ex 
$$\int (4x+3) \cdot 4 dx = \frac{(4x+3)^2}{2} + C$$

3. 
$$\int \varphi(x)^n \cdot \varphi'(x) dx = \frac{\varphi(x)^{n+1}}{n+1} + C$$

Ex 
$$\int (5x+2)^7 \cdot 5 dx = \frac{(5x+2)^8}{8} + C$$

4. 
$$\int e^{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) dx = e^{\varphi(x)} + C$$

Ex 
$$\int e^{2x+4} \cdot 2 dx = e^{2x+4} + C$$

5. 
$$\int a^{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) dx = \frac{a^{\varphi(x)}}{\ln a} + C$$

Ex 
$$\int 4^{3x} \cdot 3 dx = \frac{4^{3x}}{\ln 4} + C$$

6. 
$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \ln|\varphi(x)| + C$$

Ex 
$$\int \frac{12}{12x+7} dx = \ln|12x+7| + C$$

7. 
$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^n(x)} dx = \frac{-1}{n-1} \cdot \frac{1}{\varphi^{n-1}(x)} + C$$

Ex 
$$\int \frac{2}{(2x-4)^6} dx = \frac{-1}{5} \cdot \frac{1}{(2x-4)^5} + C$$

8. 
$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x) - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{\varphi(x) - a}{\varphi(x) + a} \right| + C$$

Ex 
$$\int \frac{4}{16x^2 - 9} dx = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{4x-3}{4x+3} \right| + C$$

9. 
$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x) + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{\varphi(x)}{a} + C$$

Ex 
$$\int \frac{5}{25x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{5x}{2} + C$$

10. 
$$\int \varphi'(x) \cdot \sin \varphi(x) dx = -\cos \varphi(x) + C$$

Ex 
$$\int 4 \cdot \sin(4x-5) dx = -\cos(4x-5) + C$$

11. 
$$\int \varphi'(x) \cdot \cos \varphi(x) dx = \sin \varphi(x) + C$$

Ex 
$$\int 6x \cdot \cos(3x^2 + 7) dx = \sin(3x^2 + 7) + C$$

12. 
$$\int \varphi'(x) \cdot \operatorname{tg} \varphi(x) dx = -\ln|\cos \varphi(x)| + C$$

Ex 
$$\int 5 \cdot \operatorname{tg}(5x-7) dx = -\ln|\cos(5x-7)| + C$$

## CURS RAPID DE APROFUNDARE LA MATEMATICĂ

$$13. \int \varphi'(x) \cdot \operatorname{ctg} \varphi(x) dx = \ln |\sin \varphi(x)| + C \quad \text{Ex } \int 8 \cdot \operatorname{ctg}(8x+6) dx = \ln |\sin(8x+6)| + C$$

$$14. \int \frac{\varphi'(x)}{\cos^2 \varphi(x)} dx = \operatorname{tg} \varphi(x) + C \quad \text{Ex } \int \frac{6}{\cos^2 6x} dx = \operatorname{tg} 6x + C$$

$$15. \int \frac{\varphi'(x)}{\sin^2 \varphi(x)} dx = -\operatorname{ctg} \varphi(x) + C \quad \text{Ex } \int \frac{5}{\sin^2(5x-9)} dx = -\operatorname{ctg}(5x-9) + C$$

$$16. \int \frac{\varphi(x)\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)-a^2}} dx = \sqrt{\varphi^2(x)-a^2} + C \quad \text{Ex } \int \frac{3x \cdot 3}{\sqrt{9x^2-4}} dx = \sqrt{9x^2-4} + C$$

$$17. \int \frac{\varphi(x)\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+a^2}} dx = \sqrt{\varphi^2(x)+a^2} + C \quad \text{Ex } \int \frac{4x \cdot 4}{\sqrt{16x^2+25}} dx = \sqrt{16x^2+25} + C$$

$$18. \int \frac{\varphi(x)\varphi'(x)}{\sqrt{a^2-\varphi^2(x)}} dx = -\sqrt{a^2-\varphi^2(x)} + C \quad \text{Ex } \int \frac{2x \cdot 2}{\sqrt{9-4x^2}} dx = -\sqrt{9-4x^2} + C$$

$$19. \int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi(x)^2+a^2}} dx = \ln(\varphi(x) + \sqrt{\varphi(x)^2+a^2}) + C \quad \text{Ex } \int \frac{5}{\sqrt{25x^2+7^2}} dx = \ln(5x + \sqrt{25x^2+7^2}) + C$$

$$20. \int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi(x)^2-a^2}} dx = \ln |\varphi(x) + \sqrt{\varphi(x)^2-a^2}| + C \quad \text{Ex } \int \frac{3}{\sqrt{9x^2-4^2}} dx = \ln |3x + \sqrt{9x^2-4^2}| + C$$

$$21. \int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{a^2-\varphi(x)^2}} dx = \arcsin \frac{\varphi(x)}{a} + C \quad \text{Ex } \int \frac{2}{\sqrt{5^2-4x^2}} dx = \arcsin \frac{2x}{5} + C$$

$$22. \int \sqrt{\varphi(x)^2+a^2} dx = \frac{\varphi(x)}{2} \sqrt{\varphi(x)^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |\varphi(x) + \sqrt{\varphi(x)^2+a^2}| + C$$

$$23. \int \sqrt{\varphi(x)^2-a^2} dx = \frac{\varphi(x)}{2} \sqrt{\varphi(x)^2-a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |\varphi(x) + \sqrt{\varphi(x)^2-a^2}| + C$$

$$24. \int \sqrt{a^2-\varphi(x)^2} dx = \frac{\varphi(x)}{2} \sqrt{a^2-\varphi(x)^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{\varphi(x)}{a} + C$$

II. Să se calculeze primitivele următoarelor funcții compuse.

$$1. \int 5 \cdot 2^{5x} dx$$

$$2. \int 3^{4x} dx$$

$$3. \int 4 \sin 4x dx$$

$$4. \int 3 \cos 3x dx$$

$$5. \int \frac{1}{5x+3} dx$$

$$6. \int \frac{1}{4x^2+9} dx$$

$$7. \int \frac{1}{4x^2-16} dx$$

$$8. \int \frac{1}{25-9x^2} dx$$

## CURS RAPID DE APROFUNDARE LA MATEMATICĂ

$$9. \int \frac{1}{\cos^2 3x} dx \quad 10. \int \frac{1}{\sin^2 5x} dx \quad 11. \int \operatorname{tg} 4x dx \quad 12. \int 2 \operatorname{ctg} 2x dx$$

$$13. \int \frac{1}{\sqrt{16x^2 + 4^2}} dx \quad 14. \int \frac{1}{\sqrt{9 - 16x^2}} dx$$

III. Să se arate că următoarele funcții nu admit primitive.

$$1. f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad 2. f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [x] \text{ (partea întregă din } x)$$

$$3. f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad 4. f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [X] + X$$

$$5. f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, 0] \\ x + 1, & x \in (0, +\infty) \end{cases} \quad 6. f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

IV. Să se determine a, b numere reale astfel încât F să fie primitiva unei funcții f.

$$1^*. F(x) = \begin{cases} \ln(ax + b), & x > 1 \\ \frac{x+1}{x^2+1}, & x \leq 1 \end{cases} \quad 2^*. F(x) = \begin{cases} 1 + \ln^2 x, & x \in [1, e) \\ (2a-3)x + b^2, & x \in [e, e^2] \end{cases}$$

$$3^*. F(x) = \begin{cases} 2a \cdot e^{3x} + b, & x \leq 0 \\ \sqrt{2x^2 - 4x + 1}, & x > 0 \end{cases} \quad 4^*. F(x) = \begin{cases} \frac{ax+b}{x^2+1}, & x \leq 0 \\ \sqrt{x^2 - 6x + 9}, & x > 0 \end{cases}$$

$$5^*. F(x) = \begin{cases} a \cdot e^{2x} + 2bx + 1, & x \leq 0 \\ \frac{3x+a}{x^2+2}, & x > 0 \end{cases} \quad 6^*. F(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x > 0 \\ \sin x + 3 \cos x, & x \leq 0 \end{cases}$$

V. Să se verifice dacă următoarele funcții admit primitive și în caz afirmativ să se determine o primitivă.

$$1. f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & x < 0 \\ e^x + 2, & x \geq 0 \end{cases} \quad 2. f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + 4}, & x \leq 0 \\ \frac{1}{4} - \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$$

$$3^*. f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}, & x \in [0, 1) \\ \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x \geq 1 \end{cases} \quad 4^*. f: [-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2^x}{3}, & x \geq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}, & x \in [-2, 0) \end{cases}$$

## CURS RAPID DE APROFUNDARE LA MATEMATICĂ

## DERIVATE

Nr	FUNCTIA	DERIVATA	MULTIMEA PE CARE FUNCTIA ESTE DERIVABILĂ	FUNCTIA COMPUSĂ	DERIVATA
1.	<b>C</b>	0	R		
2.	<b>x</b>	1	R	u	u'
3.	<b>x<sup>n</sup></b>	nx <sup>n-1</sup>	R	u <sup>n</sup>	n.u <sup>n-1</sup> .u'
4.	<b>x<sup>a</sup></b>	ax <sup>a-1</sup>	[0, ∞ ]	u <sup>a</sup>	au <sup>a-1</sup> .u'
5.	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	R*	$\frac{1}{u}$	$-\frac{1}{u^2} \cdot u'$
6.	$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	R*	$\frac{1}{u^n}$	$-n/u^{n+1} \cdot u'$
7.	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	R* <sub>+</sub>	$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2\sqrt{u}} u'$
8.	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	R* <sub>+,n par</sub> R* <sub>,n impar</sub>	$\sqrt[n]{u}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} u'$
9.	<b>sin x</b>	cosx	R	sin u	u'cos u
10.	<b>cos x</b>	-sinx	R	cos u	-u'sin u
11.	<b>tg x</b>	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$R \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\}$	tg u	$\frac{1}{\cos^2 u} u'$
12.	<b>ctg x</b>	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$R \setminus \{k\pi \mid k \in Z\}$	ctg u	$-\frac{1}{\sin^2 u} u'$
13.	<b>arcsin x</b>	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(-1,1)	arcsin u	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$
14.	<b>arccos x</b>	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(-1,1)	arccos u	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$
15.	<b>arctg x</b>	$\frac{1}{1+x^2}$	R	arctg u	$\frac{1}{1+u^2} u'$
16.	<b>arcctg x</b>	$-\frac{1}{1+x^2}$	R	arcctg u	$-\frac{1}{1+u^2} u'$
17.	<b>a<sup>x</sup></b>	a <sup>x</sup> lna	R	a <sup>u</sup>	a <sup>u</sup> .lna.u'
18.	<b>e<sup>x</sup></b>	e <sup>x</sup>	R	e <sup>u</sup>	e <sup>u</sup> .u'
19.	<b>lnx</b>	$\frac{1}{x}$	R* <sub>+</sub>	lnu	$\frac{1}{u} \cdot u'$
20.	<b>log<sub>a</sub> x</b>	$\frac{1}{x \ln a}$	R* <sub>+</sub>	log <sub>a</sub> u	$\frac{1}{u \ln a} u'$
21.	<b>u<sup>v</sup></b>	(u <sup>v</sup> )' =	v . u <sup>v-1</sup> . u' + u <sup>v</sup> . v' . lnu		

CURS RAPID DE APROFUNDARE LA MATEMATICĂ

**LIMITE DE FUNCTII**

$P(X)=a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n, a_0 \neq 0$        $Q(X)=b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_n, b_0 \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(X)}{Q(X)} = \begin{cases} \begin{matrix} \mathbf{0} & n < m \\ \frac{a_0}{b_0} & n = m \\ \left(\frac{a_0}{b_0}\right)_{\infty} & n > m, \frac{a_0}{b_0} > 0 \\ \left(\frac{a_0}{b_0}\right)_{-\infty} & n > m, \frac{a_0}{b_0} < 0 \\ \left(\frac{a_0}{b_0}\right)_{(-\infty)^{n-m}} & n > m, n-m \text{ par} \\ \left(\frac{a_0}{b_0}\right)_{(-\infty)^{n-m}} & n > m, n-m \text{ impar} \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \rightarrow \infty \\ x \rightarrow -\infty \end{matrix} \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = a_0(\pm\infty)^n$

$\lim_{x \rightarrow \infty} q^x = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{dacă } q \in (-1, 1) \\ \mathbf{1}, & \text{dacă } q = 1 \\ \infty, & \text{dacă } q > 1 \\ \text{nu există,} & \text{dacă } q \leq -1 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} tgx = -\infty$

$x > \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} tgx = +\infty$

$a > 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty \quad \lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = -\infty$

$x < \frac{\pi}{2}$

$a \in (0, 1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = \infty$

$a \in (0, 1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tgx}{x} = 1$	$\lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$	$\lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{tgu(x)}{u(x)} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{arctgx}{x} = 1$	$\lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{\arcsin u(x)}{u(x)} = 1$	$\lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{arctgu(x)}{u(x)} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	$\lim_{u(x) \rightarrow 0} (1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}} = e$	$\lim_{u(x) \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)} = e$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$	$\lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u(x))}{u(x)} = 1$	$\lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{a^{u(x)} - 1}{u(x)} = \ln a$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{a^x} = 0$	$\lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{(1+u(x))^r - 1}{u(x)} = r$	$\lim_{u(x) \rightarrow \infty} \frac{u(x)^k}{a^{u(x)}} = 0$
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^k} = 0$		$\lim_{u(x) \rightarrow \infty} \frac{\ln u(x)}{u(x)^k} = 0$	8

**CURSUL II. METODE DE CALCUL AL INTEGRALELOR.****1. Formula de integrare prin părți.**

**Teorema 1.1** Dacă  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sunt funcții derivabile cu derivatele continue, atunci funcțiile  $fg$ ,  $f'g$ ,  $fg'$  admit primitive și are loc relația:  $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

Demonstrație:  $f, g$  derivabile  $\Rightarrow f, g$  continue  $\Rightarrow f'g, fg, fg'$  continue și deci admit primitive.  
Cum  $(fg)' = f'g + g'f$  rezultă prin integrare ceea ce trebuia de demonstrat.

**Să se calculeze integralele:**

- |  |                                      |  |                                   |
|--|--------------------------------------|--|-----------------------------------|
| 1. $\int \ln x dx$                       | 2. $\int x \ln x dx$                 | 3. $\int x^2 \cdot \ln x dx$                               | 4. $\int \frac{1}{x} \ln x dx$    |
| 5. $\int \frac{1}{x^2} \ln x dx$         | 6. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$    | 7. $\int \ln^2 x dx$                                       | 8. $\int \ln(1 + \frac{2}{x}) dx$ |
| 9*. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx$        | 10. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$    | 11. $\int \cos(\ln x) dx$                                  | 12. $\int \sin(\ln x) dx$         |
| 13. $\int (x^2 - 2x + 3) \ln x dx$       | 14. $\int x \ln(x-1) dx$             | 15. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \ln(1 + \sqrt{x^2+1}) dx$ |                                   |
| 16*. $\int x \ln \frac{x-1}{x+1} dx$     | 17. $\int (x^2+1) \cdot e^x dx$      | 18. $\int x \cdot e^{-x} dx$                               |                                   |
| 19. $\int (x^2+2x) \cdot e^{3x} dx$      | 20. $\int x^2 \cdot e^x dx$          | 21. $\int x^2 \cdot e^{2x} dx$                             |                                   |
| 22*. $\int (x^3+5x^2-2) \cdot e^{2x} dx$ | 23. $\int x^2 \cdot e^{-x} dx$       | 24*. $\int \frac{3 \cdot 2^x + 2 \cdot e^x}{2^x} dx$       |                                   |
| 25. $\int e^x \cdot \sin x dx$           | 26. $\int e^x \cdot \cos x dx$       | 27. $\int e^x \cdot \sin 2x dx$                            |                                   |
| 28. $\int e^x \cdot \cos 2x dx$          | 29. $\int x \cdot \sin x dx$         | 30. $\int x \cdot \cos x dx$                               |                                   |
| 31. $\int x^2 \cdot \sin x dx$           | 32. $\int x^2 \cdot \cos x dx$       | 33*. $\int x^2 \cdot \sin 2x dx$                           |                                   |
| 34*. $\int x^2 \cdot \cos 2x dx$         | 35. $\int x \cdot \sin^2 x dx$       | 36. $\int x \cdot \cos^2 x dx$                             |                                   |
| 37. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$         | 38. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$     | 39. $\int \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$       |                                   |
| 40. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$      | 41*. $\int e^{-x} \cdot \sin^2 x dx$ | 42*. $\int \cos^2(\ln x) dx$                               |                                   |
| 43*. $\int x \cdot \sqrt{x^2-9} dx$      | 44*. $\int x \cdot \sqrt{x^2+16} dx$ | 45*. $\int x \cdot \sqrt{4-x^2} dx$                        |                                   |
| 46. $\int \sqrt{x} \ln x dx$             | 47*. $\int \frac{x^2-2x+5}{e^x} dx$  |  |                                   |

Rezolvări:

$$1. \int \ln x dx = \int x' \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

$$2. \int x \cdot \ln x dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$$

4.

$$\int \frac{1}{x} \ln x dx = \int (\ln x)' \ln x dx = (\ln x)^2 - \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \Rightarrow 2 \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = (\ln x)^2 \Rightarrow \int \frac{1}{x} \ln x dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$$

**Observație:** La integralele care conțin funcția logaritmică nu se umblă la ea ci se scriu celelalte funcții ca f'

$$20. \int x^2 \cdot e^x dx = \int x^2 (e^x)' dx = x^2 e^x - \int 2x \cdot e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x \cdot (e^x)' dx = x^2 e^x - 2[x \cdot e^x - \int e^x dx] = x^2 e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

$$25. \int e^x \cdot \sin x dx = \int (e^x)' \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cdot \cos x dx = e^x \sin x - [e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot (-\sin x) dx] \Rightarrow$$

$$\text{Notând cu } I \text{ integrala } \int e^x \cdot \sin x dx \text{ rezultă: } I = e^x \sin x - e^x \cos x - I \Rightarrow I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

**Observație:** La integralele unde apare funcția exponențială, se va scrie aceasta ca f'

$$29. \int x \cdot \sin x dx = \int x \cdot (-\cos x)' dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

$$32. \int x^2 \cdot \cos x dx = \int x^2 \cdot (\sin x)' dx = x^2 \sin x - \int 2x \cdot \sin x dx = x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \sin x) + C, \text{ vezi } 29$$

$$37. \int \frac{x}{\cos^2 x} dx = \int (tg x)' \cdot x dx = x \cdot tg x - \int tg x dx = x \cdot tg x - (-\ln|\cos x|) = x \cdot tg x + \ln|\cos x| + C$$

**Observație:** La integralele care conțin funcții polinomiale și funcții trigonometrice nu se va umbla la funcțiile polinomiale ci doar la funcțiile trigonometrice care se vor scrie ca f'

## CURS RAPID DE APROFUNDARE LA MATEMATICĂ

$$41^*. \text{ Se știe că: } \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \Rightarrow$$

$$\int e^{-x} \cdot \sin^2 x dx = \int e^{-x} \cdot \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int e^{-x} dx - \frac{1}{2} \int e^{-x} \cos 2x dx = \frac{-e^{-x}}{2} - \frac{1}{2} I$$

$$I = \int e^{-x} \cos 2x dx = \int e^{-x} \left( \frac{\sin 2x}{2} \right)' dx = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x - \int (-e^{-x}) \frac{\sin 2x}{2} dx = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x + \frac{1}{2} \int e^{-x} \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x + \frac{1}{2} \int e^{-x} \left( \frac{-\cos 2x}{2} \right)' dx = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x - \frac{e^{-x} \cos 2x}{4} + \frac{1}{4} \int e^{-x} \cos 2x dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x - \frac{e^{-x} \cos 2x}{4} + \frac{1}{4} I \Rightarrow I = \frac{4}{3} \left( \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x - \frac{e^{-x} \cos 2x}{4} \right) + C$$

**CURSUL III. METODE DE CALCUL AL INTEGRALELOR****2. FORMULA SCHIMBĂRII DE VARIABILĂ (SAU METODA SUBSTITUȚIEI).**

**Teoremă:** Fie  $I, J$  intervale din  $\mathbf{R}$  și  $\varphi : I \rightarrow J, f : J \rightarrow \mathbf{R}$ , funcții cu proprietățile :

1)  $\varphi$  este derivabilă pe  $I$ ;

2)  $f$  admite primitive. (Fie  $F$  o primitivă a sa.)

Atunci funcția  $(f \circ \varphi) \varphi'$  admite primitive, iar funcția  $F \circ \varphi$  este o primitivă a lui  $(f \circ \varphi) \varphi'$  adică:

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F \circ \varphi + C$$

**Să se calculeze integralele:**

1.  $\int (ax+b)^n dx$

2.  $\int (2x-1)^9 dx$

3.  $\int x(2x-1)^9 dx$

4.  $\int x(5x^2-3)^7 dx$

5.  $\int x^2(x^3+1)^6 dx$

6.  $\int x^k(x^{k+1}+1)^n dx$

7.  $\int x \cdot 7^{x^2} dx$

8.  $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$

9.  $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx$

10.  $\int e^{\sqrt{x}} dx$

11.  $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

12.  $\int \frac{e^{2x}}{e^x-1} dx$

13.  $\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}-1} dx$

14.  $\int x\sqrt{x-1} dx$

15.  $\int \sqrt{2x+5} dx$

16.  $\int x\sqrt{1+x^2} dx$

17.  $\int x^3\sqrt{1-x^4} dx$

18.  $\int x^2\sqrt[3]{x^3+2} dx$

19.  $\int \sqrt[3]{2x+5} dx$

20.  $\int \sqrt{x^2-6x-7} dx$

21.  $\int \sqrt{-x^2-x+2} dx$

22.  $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$

23.  $\int \frac{\ln \sqrt{x}}{x} dx$

24.  $\int \sqrt{x} \ln x dx$

25.  $\int \frac{x-2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$

26.  $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx$

27.  $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+2x-3}} dx$

28.  $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+3x+4}} dx$

29.  $\int \frac{x}{\sqrt[4]{x+1}} dx$

30.  $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

31.  $\int \frac{1}{x(1+\ln x)^4} dx$

32.  $\int \frac{1}{x(\ln^2 x+8)} dx$

33.  $\int \frac{1}{x\sqrt{3-\ln^2 x}} dx$

34.  $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

35.  $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx$

36.  $\int x^3 \sqrt{x^2+2} dx$

37.  $\int \frac{1}{x(2005+\ln x)^{2006}} dx$

38.  $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$

## CURS RAPID DE APROFUNDARE LA MATEMATICĂ

**Rezolvări:**

$$1. \int (ax+b)^n dx = \int t^n \frac{dt}{a} = \frac{1}{a} \frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C \quad \text{unde } ax+b=t \Rightarrow adx=dt \quad dx=\frac{dt}{a}$$

$$2. \int (2x-1)^9 dx = \int t^9 \frac{dt}{2} = \frac{t^{10}}{20} + C = \frac{(2x-1)^{10}}{20} + C \quad \text{unde } 2x-1=t \Rightarrow 2dx=dt$$

$$3. \int x(2x-1)^9 dx = \int \frac{t+1}{2} \cdot t^9 dt = \frac{1}{2} \int (t^{10} + t^9) dt = \frac{t^{11}}{22} + \frac{t^{10}}{20} + C = \frac{(2x-1)^{11}}{22} + \frac{(2x-1)^{10}}{20} + C$$

$$4. \int x(5x^2-3)^7 dx = \int t^7 \cdot \frac{dt}{10} = \frac{1}{10} \cdot \frac{t^8}{8} + C = \frac{(5x^2-3)^8}{80} + C, \text{ unde } 5x^2-3=t \Rightarrow 10x dx = dt$$

$$7. \int x \cdot 7^{x^2} dx = \int 7^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \frac{7^t}{\ln 7} + C = \frac{1}{2} \frac{7^{x^2}}{\ln 7} + C, \text{ unde } x^2=t, 2x dx = dt$$

$$8. \int \frac{e^x}{e^x+1} dx \quad \text{Notăm: } e^x+1=t \Rightarrow e^x dx = dt \Rightarrow \int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln t + C = \ln(e^x+1) + C$$

$$15. \int \sqrt{2x+5} dx \quad \text{Notăm: } \sqrt{2x+5}=t \text{ sau } 2x+5=t^2 \Rightarrow 2dx=2t dt \Rightarrow dx=t dt$$

$$\int \sqrt{2x+5} dx = \int t \cdot t dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sqrt{2x+5}^3}{3} + C$$

$$20. \int \sqrt{x^2-6x-7} dx = \sqrt{(x-3)^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2} = \frac{x-3}{2} \sqrt{x^2-6x-7} - \frac{16}{2} \ln|x-3+\sqrt{x^2-6x-7}| + C$$

deoarece:

$$\boxed{ax^2+bx+c = a \left[ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \right] \text{ dacă } \Delta > 0 \text{ sau}} \\ \boxed{ax^2+bx+c = a \left[ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2 \right] \text{ dacă } \Delta < 0}$$

$$23. \int \frac{\ln \sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{\ln t}{t^2} \cdot 2t dt = 2 \int \frac{\ln t}{t} dt = 2 \int z dz \text{ deoarece } x=t^2 \Rightarrow dx=2t dt, \ln t=z \Rightarrow \frac{1}{t} dt = dz \Rightarrow$$

$$\int \frac{\ln \sqrt{x}}{x} dx = 2 \frac{z^2}{2} = (\ln t)^2 = (\ln \sqrt{x})^2 + C$$

28

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+3x+4}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2}} dx = \arcsin \frac{2x-3}{\frac{5}{2}} + C = \arcsin \frac{2x-3}{5} + C, \text{ putem nota } \frac{2x-3}{2} \text{ cu } t$$

## CURS RAPID DE APROFUNDARE LA MATEMATICĂ

## INTEGRAREA FUNCȚIILOR TRIGONOMETRICE

Calculul integralelor trigonometrice se poate face fie folosind **formula integrării prin părți**, fie **metoda substituției**. În acest caz se pot face substituțiile:

1. Dacă funcția este impară în  $\sin x$ ,  $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$  atunci  $\cos x = t$ .
2. Dacă funcția este impară în  $\cos x$ ,  $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$  atunci  $\sin x = t$ .
3. Dacă funcția este pară în raport cu ambele variabile  $R(-\sin x, -\cos x)$  atunci  $\operatorname{tg} x = t$ .
4. Dacă o funcție nu se încadrează în cazurile 1,2,3, atunci se utilizează substituțiile universale:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ unde } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

5. Se mai pot folosi și alte formule trigonometrice:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x, \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Să se calculeze:

1.  $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx$
2.  $\int \cos^3 x \cdot \sin 2x dx$
3.  $\int \sin(2x + 5) dx$
4.  $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx$
5.  $\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x) dx$
6.  $\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$
7.  $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$
8.  $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} dx$
9.  $\int \frac{x}{1 - \cos x} dx$
10.  $\int \sin^3 x dx$
11.  $\int \cos^3 x dx$
12.  $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
13.  $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 4} dx$
14.  $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - (\cos^2 x)^2}} dx$
15.  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin^2 x} dx$
16.  $\int \frac{1}{\sin x} dx$
17.  $\int \frac{1}{\cos x} dx$
18.  $\int \sin^{10} x \cdot \cos^3 x dx$
19.  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \cdot (2005 + \arcsin x)^{2006}} dx$
20.  $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^{2006}}{1+x^2} dx$

Rezolvări:

$$1. \text{ Notăm } \sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt \Rightarrow \int \sin^3 x \cdot \cos x dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\cos^4 x}{4} + C$$

$$2. \text{ Notăm } \cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$$

$$\int \cos^3 x \cdot \sin 2x dx = \int \cos^3 x \cdot 2 \sin x \cos x dx = 2 \int \cos^4 x \sin x dx = -2 \int t^4 dt = -2 \cdot \frac{t^5}{5} + C = -\frac{2}{5} \cdot \cos^5 x + C$$

$$10. \int \sin^3 x dx = \int \sin x \sin^2 x dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x) dx = -\int (1 - t^2) dt = -t + \frac{t^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

$$12. \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx \text{ Notăm cu } t \text{ pe } \arcsin x \Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = dt \Rightarrow$$

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\arcsin x)^2}{2} + C$$

## CURS RAPID DE APROFUNDARE LA MATEMATICĂ

## CURSUL IV. INTEGRAREA FUNCȚIILOR RAȚIONALE

**Definiție:** O funcție  $f:I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval, se numește rațională dacă  $R(x) =$

$$\frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0, x \in I, \text{ unde } f, g \text{ sunt funcții polinomiale.}$$

**Dacă**  $\text{grad } f \geq \text{grad } g$ , atunci se efectuează împărțirea lui  $f$  la  $g \Rightarrow f = gq + r$ ,  $0 \leq \text{grad } r < \text{grad } g$  și deci

$$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}. \text{ Pentru } R(x) \text{ se face scrierea ca sumă de funcții raționale simple.}$$

$$1. \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$$

$$\text{Ex. } \int \frac{1}{2x-7} dx = \frac{1}{2} \ln|2x-7| + C$$

$$2. \int \frac{1}{(ax+b)^n} dx = -\frac{1}{(n-1)(ax+b)^{n-1}} \cdot \frac{1}{a} + C$$

$$\text{Ex } \int \frac{1}{(3x+8)^7} dx = -\frac{1}{6(3x+8)^6} \cdot \frac{1}{3} + C$$

$$3. \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C$$

$$\text{Ex } \int \frac{1}{x^2+5^2} dx = \frac{1}{5} \arctg \frac{x}{5} + C$$

$$4. \int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$\text{Ex } \int \frac{1}{x^2-25} dx = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{x-5}{x+5} \right| + C$$

$$5^* \int \frac{1}{(x^2+a^2)^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^2} + C = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{x^2+a^2} dx - \frac{1}{a^2} \int x \cdot \left( \frac{-1}{2(x^2+a^2)} \right)' dx$$

$$\text{Ex. } \int \frac{1}{(x^2+16)^2} dx = \int \frac{x^2+16-x^2}{(x^2+16)^2} + C = \frac{1}{16} \int \frac{1}{x^2+16} dx - \frac{1}{16} \int x \cdot \left( \frac{-1}{2(x^2+16)} \right)' dx$$

$$\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} \arctg \frac{x}{4} - \frac{1}{16} \left[ -\frac{x}{2x^2+32} + \int \frac{1}{2(x^2+4^2)} \right]$$

$$6. \int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \begin{cases} \int \frac{1}{a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right]} dx, & \Delta > 0 \\ \int \frac{1}{a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)^2 \right]} dx, & \Delta < 0 \end{cases}$$

$$\text{Ex. } \int \frac{1}{4x^2-5x+1} dx = \int \frac{1}{4 \left[ \left( x - \frac{5}{8} \right)^2 - \left( \frac{3}{8} \right)^2 \right]} dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{3}{8}} \ln \left| \frac{x - \frac{5}{8} - \frac{3}{8}}{x - \frac{5}{8} + \frac{3}{8}} \right| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{8x-8}{8x-2} \right| + C$$

## CURS RAPID DE APROFUNDARE LA MATEMATICĂ

$$\text{Ex. } \int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx = \int \frac{1}{(x+2)^2 + 1} dx = \arctg(x+1) + C$$

$$7. \int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx = \ln|ax^2+bx+c| + C$$

$$\text{Ex. } \int \frac{8x-6}{4x^2-6x+7} dx = \ln|4x^2-6x+7| + C$$

$$8^*. \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{m(2ax+b)+n}{ax^2+bx+c} dx = m \cdot \ln|ax^2+bx+c| + n \cdot \int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx$$

Ex.

$$\int \frac{3x+4}{2x^2+5x-4} dx = \int \frac{\frac{3}{4} \cdot (4x+5) + 4 - \frac{15}{4}}{2x^2+5x-4} dx = \frac{3}{4} \ln|2x^2+5x-4| + \frac{1}{4} \int \frac{1}{2x^2+5x-4} dx =$$

$$\frac{3}{4} \ln|2x^2+5x-4| + \frac{1}{4} \int \frac{1}{2 \left[ \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{57}}{4}\right)^2 \right]} dx = \frac{3}{4} \ln|2x^2+5x-4| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{57}}{4}} \ln \left| \frac{4x+5-\sqrt{57}}{4x+5+\sqrt{57}} \right| + C$$

Să se calculeze:

$$1. \int \frac{1}{3x+5} dx$$

$$2. \int \frac{2x+3}{2x+1} dx$$

$$3. \int \frac{x}{x+4} dx$$

$$4. \int \frac{1-3x}{2x+3} dx$$

$$5. \int \frac{1}{(2x+3)^{2005}} dx$$

$$6. \int \frac{1}{x^2-9} dx$$

$$7. \int \frac{1}{x^2+4} dx$$

$$8. \int \frac{x^2}{x^2-2} dx$$

$$9. \int \frac{x^2}{x^2+1} dx$$

$$10. \int \frac{1}{3x^2+5} dx$$

$$11. \int \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx$$

$$12. \int \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$$

$$13. \int \frac{1}{x(x+2)} dx$$

$$14. \int \frac{1}{x^2-3x+2} dx$$

$$15. \int \frac{1}{2x^2-x-3} dx$$

$$16. \int \frac{1}{3x^2+x+1} dx$$

$$17. \int \frac{1}{x^2-2x+5} dx$$

$$18. \int \frac{4x-3}{2x^2-3x+1} dx$$

$$19. \int \frac{6x-2}{3x^2-2x+5} dx$$

$$20. \int \frac{3x-2}{x^2-5x+6} dx$$

$$21. \int \frac{5x-2}{x^2+4} dx$$

$$22. \int \frac{x+1}{x^2+2x+10} dx$$

$$23. \int \frac{x^2}{x^6-3} dx$$

$$24. \int \frac{x}{x^4 + \frac{1}{4}} dx$$

$$25. \int \frac{2x}{1+x^4} dx$$

$$26. \int \frac{x^3}{1+x^8} dx$$

$$27. \int \frac{x^3}{(x-1)^{12}} dx$$

$$28. \int \frac{x}{(x-1)^{10}} dx$$

## CURS RAPID DE APROFUNDARE LA MATEMATICĂ

29.  $\int \frac{x^2}{x^6 + 4} dx$

**Rezolvări.**

23. Notăm  $x^3$  cu  $t \Rightarrow 3x^2 dx = dt \Rightarrow$

$$\int \frac{x^2}{x^6 - 3} dx = \int \frac{1}{t^2 - 3} \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{3}}{t + \sqrt{3}} \right| + C = \frac{1}{6\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x^3 - \sqrt{3}}{x^3 + \sqrt{3}} \right| + C$$

26. Notăm pe  $x^4$  cu  $t \Rightarrow 4x^3 dx = dt \Rightarrow$

$$\int \frac{x^3}{1 + x^8} dx = \int \frac{1}{t^2 + 1} \cdot \frac{dt}{4} = \frac{1}{4} \cdot \arctg t + C = \frac{1}{4} \arctg x^4 + C$$

27. Notăm pe  $x-1$  cu  $t \Rightarrow x=t+1 \Rightarrow dx=dt \Rightarrow$

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^{12}} dx = \int \frac{(t+1)^3}{t^{12}} dt = \int \frac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{t^{12}} dt = \int (t^{-9} + 3t^{-10} + 3t^{-11} + t^{-12}) dt = \frac{t^{-8}}{-8} + 3 \frac{t^{-9}}{-9} + 3 \frac{t^{-10}}{-10} + \frac{t^{-11}}{-11} + C$$

$$= -\frac{1}{8(x-1)^8} - \frac{1}{3(x-1)^9} - \frac{3}{10(x-1)^{10}} - \frac{1}{11(x-1)^{11}} + C$$

28. Notăm pe  $x-1$  cu  $t \Rightarrow$

$$\int \frac{x}{(x-1)^{10}} dx = \int \frac{t+1}{t^{10}} dt = \int t^{-9} dt + \int t^{-10} dt = \frac{t^{-8}}{-8} + \frac{t^{-9}}{-9} + C = -\frac{1}{8(x-1)^8} - \frac{1}{9(x-1)^9} + C$$

**Să se calculeze integralele folosind descompunerea în fracții raționale simple.**

30.  $\int \frac{x-4}{(x-2) \cdot (x-3)} dx$  31.  $\int \frac{1}{(x+2) \cdot (x+5)} dx$  32.  $\int \frac{x^2 + 5x + 7}{x+3} dx$  33.  $\int \frac{(x+1)^3}{x^2 - x} dx$

34.  $\int \frac{x^3}{x-2} dx$  34.  $\int \frac{x^2 + 1}{x-1} dx$  35.  $\int \frac{x^4 + x + 1}{x-1} dx$  36.  $\int \frac{1}{x^2 - 2x} dx$

37.  $\int \frac{1}{x^2 + 4x} dx$  38.  $\int \frac{x}{x^2 - 6x + 5} dx$  39.  $\int \frac{1}{6x^3 - 7x^2 - 3x} dx$  40.  $\int \frac{1}{x(x+1)(x+2)} dx$

41.  $\int \frac{x^2 + x + 2}{(x+1)(x^2 + 1)} dx$  42.  $\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 + x} dx$  43.  $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^2(x-2)^2} dx$  44.  $\int \frac{1}{x^4 - x^2} dx$

45.  $\int \frac{x}{(x+1)(x+3)(x+5)} dx$