

ASUPRA UNEI CONJECTURI DESPRE NUMERE PRIME

DE NECULAI STANCIU, BUZĂU

În această notă, vom da o demonstrație elementară, în sensul că poate fi ușor înțeleasă de copii din gimnaziu, a *postulatului lui Bertrand*.

Este cunoscut că inelul \mathbb{Z} al numerelor întregi este inel factorial și un sistem complet de elemente ireductibile în \mathbb{Z} este mulțimea numerelor prime. Importanța numerelor prime în matematică este dovedită de teorema fundamentală a aritmeticii.

Interesantă este distribuția numerelor prime printre numerele naturale și faptul că problemele de această natură sunt formulate foarte simplu dar se demonstrează foarte greu.

O asemenea problemă a fost formulată în 1958 de matematicianul polonez *W. Sierpinski*:

Pentru toate numerele naturale $n > 1$ și $k \leq n$ există cel puțin un număr prim în intervalul $[kn, (k+1)n]$.

Cazul $k = 1$ a fost formulat în 1845 de către matematicianul francez *J. Bertrand* și demonstrat de către matematicianul rus *P.L. Cebâșev* (1850). O demonstrație simplificată a dat-o matematicianul *P. Erdős* în 1932, iar una recentă matematicianul român *M. Țena* în [3].

Cazul $k = 2$ a fost demonstrat în 2006 de către matematicianul *M. El Bachraoni* (vezi lucrarea [1]). Demonstrația dată de *M. El Bachraoni* este relativ scurtă și nu prea complicată. Aceasta se poate consulta gratuit pe internet la adresa [4].

Vom demonstra *postulatului lui Bertrand* plecând de la :

Propoziția 1. Pentru orice număr natural $n > 1$ există cel puțin un număr prim p astfel încât $2n < p < 3n$.

(vezi demonstrația din [1] sau [4]). Demonstrația este tipică ca pentru multe teoreme ale teoriei numerilor și se bazează pe mai multe inegalități valabile pentru valori mari ale lui n , care, se poate calcula efectiv. Pentru restul valorilor lui n se face tot felul de improvizații, elementare, dar dificil de urmărit.

Propoziția 2. Propoziția 1 $\Rightarrow n < p < \frac{3(n+1)}{2}$, $\forall n \geq 1$. (această propoziție este o rafinare a *postulatului lui Bertrand* – care se găsește de asemenea în [1] sau [4])

Demonstrație. Dacă $n = 1$, avem $1 < p < 3$, adevărată. Dacă $n = 2$, avem $2 < p < \frac{9}{2}$, adevărată. Pentru $n = \text{par}$, $n = 2k$, avem $n = 2k < p < 3k < \frac{3(2k+1)}{2} = \frac{3(n+1)}{2}$.

Pentru $n = \text{impar}$, $n = 2k + 1$, avem :

$$n = 2k + 1 < 2k + 2 = 2(k + 1) < p < 3(k + 1) = \frac{3(n+1)}{2}. \quad \square$$

*Nota de originalitate o reprezintă următoarele două propoziții de mai jos și faptul că în [1] sau [4] nu se menționează nimic despre *Postulatului lui Bertrand*.*

Propoziția 3. Propoziția 2 \Rightarrow *Postulatului lui Bertrand*: $n < p < 2n$, $\forall n > 3$.

Demonstrație. Propoziția 1 $\Rightarrow n < p < \frac{3(n+1)}{2}$. Deoarece $\frac{3(n+1)}{2} < 2n \Leftrightarrow n > 3$, rezultă $n < p < 2n, \forall n > 3$. \square

Un rezultat pozitiv al *Conjecturii Sierpinski* pentru orice $k \leq n$ implică un răspuns de asemenea pozitiv referitor la existența numerelor prime în intervalul $[n^2, n^2 + n]$ (*Conjectura lui Schinzel*).

Propoziția 4. *Propoziția 1. \Rightarrow Postulatul lui Bertrand.*

Demonstrație.

Cazul I.

$$n = \text{par} = 2k < p < 3k < 4k = 2n.$$

Cazul II.

$$n = \text{impar} = 2k + 1 < 2k + 2 = 2(k + 1) < p < 3(k + 1) < 4k + 2 = 2(2k + 1) = 2n.$$

Remarca 1. *demonstrația de mai sus reprezintă cea mai simplă demonstrație dată până în prezent pentru Postulatul lui Bertrand.*

Remarca 2. Problema conjecturilor referitoare la distribuția numerelor prime printre numerele naturale, se pare că va fi rezolvată, deoarece, recent (2008), s-a demonstrat o formulă care generează numerele prime. Rezultatul se datorează matematicianului *Rafael Jakimczuk* și este demonstrat în [2]. De asemenea lucrarea se poate consulta gratuit la adresa [5]. Teorema este formulată astfel:

Propoziția 5. Fie p_n al n -lea număr prim. Dacă $n \geq 4$ atunci are loc următoarea formulă :

$$p_n = n \log n + \log(n \log n) (n - Li(n \log n)) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k Q_{k-1}(\log(n \log n))}{k! n^{k-2} \log^{k-2} n} (n - Li(n \log n))^k + O(h(n)).$$

Unde $Li(x)$ este bine - cunoscuta funcție clasică $\int_2^x \frac{1}{\log t} dt$, $h(n) = \frac{n \log^3 n}{\exp(d\sqrt{\log n})}$ și $Q_k(x)$ este o funcție polinomială care se obține din următoarele formule recursive

$$Q_1(x) = x$$

$$Q_k(x) = x((k-1)Q_{k-1}(x) - Q_{k-1}'(x)) \quad (k \geq 2).$$

Termenul $O(h(n))$ din formulă este mai bun decât termenul lipsă din alte formule anterioare care aproximează pe p_n .

Dacă *ipoteza Riemann* este adevărată atunci $h(n) = \sqrt{n} \log^{5/2} n$.

(vezi demonstrația din [2] sau [5]).

Demonstrația utilizează proprietăți de analiză matematică fiind relativ lungă și complicată.

Remarca 3. *Fundația Electronic Frontier* oferă pentru primul număr prim care are peste 10 milioane de cifre un premiu de 100.000 de dolari.

Acest număr a fost descoperit la finele anului 2008 de către un grup de cercetători matematicieni de la Universitatea din California la Los Angeles (UCLA).

Numărul are 12978189 cifre și în plus față de a fi cel mai mare număr prim descoperit până în prezent este și un număr prim special, numit număr prim *Marsenne*¹.

Numărul descoperit este $2^{43112609} - 1$.

Căutarea de numere prime tot mai mari și de numere *Marsenne* continuă, căci fundația Electronic Frontier oferă premii pentru descoperirea unui număr prim cu cel puțin 100 de milioane de cifre (150.000 \$) și a unui număr prim cu peste un miliard de cifre (250.000\$). De asemenea pentru prima demonstrație completă a ipotezei Riemann Institutul Matematic Clay oferă 1.000.000 \$.

BIBLIOGRAFIE

[1] M. El Bachraoui, Primes in the Interval $[2n, 3n]$, Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 1, 2006, no. 13, 617 – 621.

[2] R. Jakimczuk, An approximate formula for prime numbers, Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 3, 2008, no. 22, 1069 – 1086.

[3] M. Țena, O demonstrație a postulatului lui Bertrand, G.M.- B 10, 2008.

[4] <http://math.usask.ca/~mebachr/publications/primes2n3n.pdf>

[5] <http://www.m-hikari.com/ijcms-password2008/21-24-2008/jakimczukIJCMS21-24-2008.pdf>

¹ Marin Marsenne (1588 – 1648) – a rămas în istorie drept părintele acusticii.