CÂTEVA TESTE DE LA CONCURSUL

CANGURUL

Selecţie şi soluţii

Prof. CORNELIU MĂNESCU–AVRAM

1994, XI, 11. Numărul real n este media armonică a lui a şi b dacă $\frac{2}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Câte perechi de numere întregi (a, b), cu $a < b$ au media armonică 5?

A) *o infinitate* ***B)*** *3* ***C)*** *2* ***D)*** *1* ***E)*** *nici una*

1994, XI, 14. La concursul Kangourou participă 782 şcoli, 2921 colegii şi 929 licee. Există însă instituții înscrise în acelaşi timp la şcoli şi la licee, la şcoli şi la colegii, la colegii şi la licee şi 29 de instituții înscrise la şcoli, colegii şi licee în acelaşi timp. Însă 703 şcoli sunt numai şcoli, 2675 colegii sunt numai colegii şi 725 licee sunt numai licee. Câte instituții sunt înscrise la şcoli şi la licee în acelaşi timp (nu şi la colegii)?

A) *4* ***B)*** *25* ***C)*** *171* ***D)*** *70* ***E)*** *nu sunt suficiente date*

1994, XI, 30. Pentru care din funcțiile următoare nu există un punct P(a, b) aparținând graficului, ştiind că tangenta la grafic în P are panta b?

A) $x \to \sin x + 2$ ***B)*** $x \to \frac{1}{x}$ ***C)*** $x \to x + 3$ ***D)*** $x \to x^2 + 1$ ***E)*** $x \to \sqrt{x}$

1994, XII, 11. Un şir este definit astfel: $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, $u_0 = 0$ şi $u_{10} = 10$. Cât este u_1?

A) *Nu există un şir cu aceste proprietăți* ***B)*** *u_1 nu este definit în mod unic* ***C)*** $u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ***D)*** $u_1 = \frac{2}{11}$ ***E)*** $u_1 = 1$

1995, XI, 27. Numărul de extreme locale ale funcției $f(x) = 2x - x^3 + \sin x$ este:

A) *4* ***B)*** *2* ***C)*** *1* ***D)*** *0* ***E)*** *alt răspuns*

1995, XII, 15. Curba de ecuație $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, …

A) *este o porțiune dintr-o hiperbolă* ***B)*** *este o porțiune dintr-o curbă* ***C)*** *este o porțiune dintr-o dreaptă* ***D)*** *este o porțiune dintr-o parabolă* ***E)*** *nu este o porțiune dintr-o conică*

1996, XI, 26. O bilă de 10 cm diametru pluteşte pe apă. Punctul său cel mai înalt depăşeşte nivelul apei cu 2 cm. Care este diametrul cercului delimitat de suprafața apei pe bilă?

A) *6 cm* ***B)*** *7 cm* ***C)*** *8 cm* ***D)*** *9 cm* ***E)*** *alt răspuns*

1997, IX–X, 28. Câte soluțți întregi are ecuația

$x(x + 1) + (x + 1)(x + 2) + \ldots + (x + 9)(x + 10) = 1000x + 1997$?

A*) nici una* ***B****) una* ***C****) două* ***D****) trei* ***E****) o infinitate*

1997, XI–XII, 26. Câte soluții are ecuația $x^2 = \sin x - x\cos x$?

A*) una* ***B****) două* ***C****) nici una* ***D****) o infinitate* ***E****) alt răspuns*

1998, XI–XII, 16. Numărul Φ satisface relația $\Phi^2 = \Phi + 1$. Atunci $\Phi^5 = \ldots$

A*) 2Φ* ***B****) $3\Phi + 1$* ***C****) $4\Phi + 2$* ***D****) $5\Phi + 3$* ***E****) $6\Phi + 4$*

1999, IX–X, 30. Care este numărul divizorilor pozitivi ai numărului $6n$, dacă numărul $2n$ are 28 de divizori pozitivi şi numărul $3n$ are 30 de divizori pozitivi?

A*) 32* ***B****) 34* ***C****) 35* ***D****) 36* ***E****) 38*

1999, XI–XII, 25. Punctul P este interior pătratului ABCD, PA = 2, PB = 7 şi PC = 9. Atunci PD = …

A*) 3* ***B****) 5* ***C****) 6* ***D****)7* ***E****) 10*

1999 baraj, IX–X, 27. Înmulțim numărul 1999 cu un număr format din 1999 de cifre 1. Care este suma cifrelor produsului astfel obținut?

A*) 1998* ***B****) 2026* ***C****) 2138* ***D****) 2972* ***E****) 3956*

1999 baraj, XI–XII, 5. Câte soluții reale are ecuația $x^2 = x\sin x + \cos x$?

A*) 0* ***B****) 1* ***C****) 2* ***D****) 3* ***E****) o infinitate*

1999 baraj, XI–XII, 6. Numărul 1994! se scrie cu un număr de cifre apropiat de:

A*) 1994* ***B****) 2500* ***C****) 5500* ***D****) 7500* ***E****) mai mare ca 8000*

1999 baraj, XI–XII, 11. Pentru $n \in \mathbb{N}$, fie a_n numărul întreg cel mai apropiat de $\sqrt{n}$. Suma $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{20}$ este egală cu:

A*) 57* ***B****) 58* ***C****) 59* ***D****) 60* ***E****) 61*

2000, XI–XII, 23. În câte moduri putem scrie 447 ca sumă de numere pozitive impare consecutive?

A*) 1* ***B****) 2* ***C****) 3* ***D****) 4* ***E****) nici unul*

2000, XI–XII, 27. Cel mai mare divizor propriu al unui număr este 91. Câte numere de acest fel există?

***A**) 1* ***B**) 2* ***C**) 5* ***D**) 4* ***E**) 3*

2000 baraj, IX–X, 19. Mulțimea A include numere naturale pentru care: 1) $1 \in A$; 2) dacă $n \in A$, atunci $2n + 1 \in A$; 3) dacă $n \in A$, atunci $5n + 1 \in A$. Câte elemente din {1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003} aparțin lui A?

***A**) 0* ***B**) 1* ***C**) 2* ***D**) 3* ***E**) 4*

2000 baraj, IX–X, 22. $49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52 + 1$ este pătrat perfect. Cât este $\sqrt{49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52 + 1}$?

***A**) 2529* ***B**) 2539* ***C**) 2549* ***D**) 2559* ***E**) 2569*

2001, IX–X, 7. Fiecare din literele K, L, M, N şi P înlocuiesc câte o cifră. Care cifră este înlocuită de M? $4 \times \overline{KLMNP4} = \overline{4KLMNP}$

***A**) 0* ***B**) 1* ***C**) 2* ***D**) 3* ***E**) 4*

2001, IX–X, 17. În expresia 2 * 4 * 6 * 8 * 10 * 12 * 14 înlocuieşte "*" cu "+" sau "–". Ce număr nu poate fi obținut astfel?

***A**) 0* ***B**) 4* ***C**) –4* ***D**) 48* ***E**) 30*

2001, XI–XII, 23. Câte din perechile de cifre 00, 11, 22, …, 88, 99 pot fi ultimele două cifre ale unui pătrat perfect?

***A**) 1* ***B**) 2* ***C**) 3* ***D**) 4* ***E**) mai mult de 4*

2001 baraj, IX–X, 10. De câte ori în viață vei avea vârsta de două ori mai mare decât suma cifrelor din care este formată?

***A**) 3* ***B**) 2* ***C**) 1* ***D**) 4* ***E**) 5*

2001 baraj, XI–XII, 3. De câte ori în viață vei avea vârsta de trei ori mai mare decât suma cifrelor din care este formată?

***A**) 2* ***B**) 1* ***C**) 3* ***D**) 4* ***E**) 5*

2001 baraj, XI–XII, 27. Într-un hotel sunt camere simple şi duble Într-o zi, 25 de clienți (singuri sau perechi) au ocupat toate camerele. În altă zi, 33 de clienți (singuri sau parechi) au ocupat, din nou, toate camerele. Care este numărul minim de camere din hotel?

***A**) 18* ***B**) 25* ***C**) 33* ***D**) 11* ***E**) 17*

2001 baraj, XI–XII, 29. Numărul 123456789 se modifică astfel: 234516789 (modificarea 1), 234591678 (modificarea 2), 345921678 (modificarea 3), 345982167 (modificarea 4). După câte modificări ajungem la numărul inițial?

***A**) 6* ***B**) 12* ***C**) 18* ***D**) 20* ***E**) 24*

2002, XI–XII, 16. Un robot poate transforma numărul real x fie în $x + 3$, fie în $x - 2$, fie în $\frac{1}{x}$, fie în x^2. El începe cu1,99. Fie y numărul maxim pe care îl poate obține după trei paşi. Atunci:

***A**) $y = 1{,}99^8$* ***B**) $y = 4{,}99^4$* ***C**) $y = 7{,}99^2$* ***D**) $y > 1000$* ***E**) $y > 20000$*

2002, XI–XII, 24. În două clase sunt mai mult de 27 de elevi. În prima clasă sunt mai mulți decât dublul numărului celor din a doua clasă micşorat cu 12, iar în a doua clasă sunt mai mulți decât de 9 ori numărul celor din prima clasă micşorat cu 10. Câți elevi sunt în fiecare clasă?

***A**) 12 şi 18* ***B**) 11 şi 17* ***C**) 10 şi 20* ***D**) 13 şi 15* ***E**) imposibil de aflat*

2003, IX–X, 11. A este numărul 111 … 111 format cu 2003 cifre de 1. Care este suma cifrelor produsului $2003 \times A$?

***A**) 10000* ***B**) 10015* ***C**) 10020* ***D**) 10030* ***E**) 2003×2003*

2003, IX–X, 24. Fiind date x şi y numere reale, câte perechi distincte (x, y) satisfac ecuația $(x + y)^2 = (x + 3)(y - 3)$?

***A**) 0* ***B**) 1* ***C**) 2* ***D**) 3* ***E**) o infinitate*

2003, IX–X, 26. Numărul maxim de numere naturale consecutive dintre care nici unul nu are suma cifrelor divizibilă cu 5 este:

***A**) 5* ***B**) 6* ***C**) 7* ***D**) 8* ***E**) 4*

2003, XI–XII, 16. $\sqrt{1 + 2000\sqrt{1 + 2001\sqrt{1 + 2002\sqrt{1 + 2003 \times 2005}}}} =$

***A**) 2000* ***B**) 2001* ***C**) 2002* ***D**) 2003* ***E**) 2004*

2003 , XI–XII, 17. Şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este definit astfel: $a_0 = 4$, $a_1 = 6$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, $n \geq 1$. Atunci a_{2003} este egal cu:

***A**) $\frac{3}{2}$* ***B**) $\frac{2}{3}$* ***C**) 4* ***D**) $\frac{1}{4}$* ***E**) $\mathbf{\frac{1}{6}}$*

2003, XI–XII, 28. Dacă $10^n + 1$ este multiplu al lui 101 şi n este un număr de două cifre, care este valoarea maximă a lui n ?

A) 92 *B) 94* *C) 96* *D) 98* *E) 99*

2003 baraj, XI–XII, 9. Care număr este mai mare?

A) π^e *B)* e^π *C)* 3^e *D)* e^3 *E) 10*

2003 baraj, XI–XII, 11. c.m.m.d.c. ($a, b, c,$) = d şi c.m.m.d.c. ($a + b, a + c, b + c$) = kd. Atunci k nu poate fi:

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) nici un număr diferit de 1* *E) alt răspuns*

2003 baraj, XI–XII, 21. Câte numere există între 5 şi 555 (inclusiv) cu proprietatea că suma cifrelor lor este divizibilă cu 5?

A) 100 *B) 109* *C) 110* *D) 111* *E) 112*

2004, IX–X, 24. Câte numere de 10 cifre, ale căror cifre sunt numai 0 sau 1 ($a_1 = 1$), au proprietatea

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$?

A) 2^9 *B) 126* *C) 81* *D) 32* *E) 110*

2004, XI–XII, 28. Câţi întregi strict pozitivi pot fi scrişi astfel:

$a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 + a_3 \cdot 3^3 + a_4 \cdot 3^4$, dacă $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{-1, 0, 1\}$?

A) 5 *B) 80* *C) 81* *D) 121* *E) 243*

2004 baraj, IX–X, 9. Câte perechi de numere naturale (a, b) au proprietatea că cel mai mare divizor comun este 24 şi cel mai mic multiplu comun este 2496?

A) 4 *B) 6* *C) 2* *D) 0* *E) o infinitate*

2004 baraj, IX–X, 15. Care este penultima cifră a numărului 11^{2004} ?

A) 0 *B) 1* *C) 2* *D) 3* *E) 4*

2004 baraj, XI–XII, 11. Fie şirul 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, … . Câte dintre numerele aflate între 3 şi 89 (inclusiv) nu pot fi scrise ca sumă de doi termeni ai acestui şir?

A) 0 *B) 26* *C) 29* *D) 51* *E) 55*

2004 baraj, XI–XII, 12. Primul element dintr-un şir este 2, iar al doilea este 3. Începând cu al doilea, fiecare element din şir este cu 1 mai mic decât produsul dintre elementele care îl încadrează (cel din faţa lui şi cel care urmează după el). Cât va fi suma primelor 2004 elemente din şir?

A) 2359 *B) 2990* *C) 3242* *D) 3608* *E) 3746*

2004 baraj, XI–XII, 19. Valoarea expresiei $\sin^8 75° - \cos^8 75°$ este:

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ *B)* $\sqrt{3}$ *C)* $\frac{7\sqrt{3}}{16}$ *D) 1* *E) 0*

2004 baraj, XI–XII, 28. Andrei înmulţeşte un număr de o cifră cu un număr de două cifre şi obține un număr de 3 cifre, cu toate cifrele egale. Dacă adună numărul de o cifră cu numărul de două cifre, obține un număr de douâ cifre având toate cifrele egale. Care este diferența dintre numerele inițiale?

A) 60 *B) 68* *C) 65* *D) 71* *E) 74*

2004 baraj, XI–XII, 29. Diferența dintre două numere de patru cifre este 7. Diferența dintre suma cifrelor acestor numere nu poate fi:

A) 2 *B) 7* *C) 11* *D) 13* *E) 20*

2005, XI–XII, 21. Dacă suma cifrelor lui *m* este 30, atunci suma cifrelor lui *m* + 3 nu poate fi:

A) 6 *B) 15* *C) 21* *D) 24* *E) 33*

2005 baraj, IX–X, 25. Suma unor numere naturale consecutive nu poate fi egală cu …

A) 14 *B) 24* *C) 64* *D) 102* *E) 2005*

2005 baraj, IX–X, 29. 100 de copii au primit dulciuri: 90 dintre ei au primit acadele, 85 au primit ciocolate, 80 au primit bomboane şi 75, napolitane. Care este numărul minim de copii care au primit din toate aceste dulciuri?

A) 65 *B) 75* *C) 55* *D) 45* *E) 30*

2005 baraj, IX–X, 30. Bunica împarte toate perele din coş nepoților ei. Primului îi dă o pară şi o şesime din ce a rămas, celui de al doilea îi dă 2 pere şi o şesime din ce a rămas, celui de-al treilea îi dă 3 pere şi o şesime din ce a rămas şi aşa mai departe. Spre marea lor uimire, toți au primit acelaşi număr de pere. Câte pere a avut bunica?

A) 32 *B) 17* *C) 5* *D) 10* *E) 25*

2005 baraj, XI–XII, 3. Produsul a 100 de numere naturale este 100. Care este cea mai mică valoare a sumei acestor numere?

A) 29 *B) 100* *C) 110* *D) 127* *E) 199*

2005 baraj, XI–XII, 12. În pădure locuiesc 100 de veverițe care şi-au făcut provizii pentru iarnă: 90 dintre ele au adunat ghinde, 85 dintre ele s-au aprovizoinat cu alone, 80 dintre ele au făcut depozite cu nuci ți 75 de veverițe au cules fistic. Care este numărul minim de veverițe care s-au aprovizionat sigur cu toate cele 4 tipuri de provizii?

***A**) 65* ***B**) 75* ***C**) 55* ***D**) 45* ***E**) 30*

2005 baraj, XI–XII, 14. Cinci fete au cumpărat banane. Dacă oricare două fete nu au acelaşi număr de banane şi oricare trei fete au împreună mai multe banane decât celelalte două, cel mai mic număr de banane pe care le poate avea o fată este …

***A**) 2* ***B**) 3* ***C**) 4* ***D**) 5* ***E**) 6*

2005 baraj, XI–XII, 19. O maşină de calculat poate face următoarele două acțiuni: fie adună 3 la un număr, fie îl înmulţeşte cu 2. Dacă s-a început cu numărul 2 şi s-a obținut numărul 79, care este numărul minim de acțiuni aplicate?

***A**) 6* ***B**) 7* ***C**) 8* ***D**) 9* ***E**) 10*

2005 baraj, XI–XII, 30. În produsul $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 99! \cdot 100!$ ce factorial trebuie şters pentru ca produsul rămas să fie un pătrat perfect?

***A**) 13!* ***B**) 42!* ***C**) 47!* ***D**) 50!* ***E**) este imposibil de aflat*

2006, IX–X, 18. Suma a trei numere pozitive este 20,1. Produsul celor mai mari două numere dintre ele nu poate fi:

***A**) mai mare decât 99* ***B**) mai mic decât 0,01* ***C**) egal cu 75* ***D**) egal cu 25* ***E**) egal cu 105*

2006, IX–X, 30. Presupunem că rezultatul final al meciului de fotbal este 5–4 pentru rchipa gazdă. Dacă ştim că echipa gazdă a înscris prima şi a păstrat conducerea până la sfârşit,în câte moduri diferite ar fi putut evolua scorul?

***A**) 17* ***B**) 3* ***C**) 25* ***D**) 14* ***E**) 29*

2006, XI–XII, 9. Fie numerele prime *a, b, c,* cu $a > b > c$. Dacă $a + b + c = 78$ şi $a - b - c = 40$, atunci $abc = \ldots$

***A**) 438* ***B**) 590* ***C**) 1062* ***D**) 1239* ***E**) 2006*

2006, XI–XII, 29. Un test conține 10 întrebări, fiecare având două răspunsuri posibile: A sau B. Dacă răspunzi A la oricare 5 întrebări şi B la oricare 5 întrebări, numărul răspunsurilor corecte este cel puțin 4. Câte grile de răspunsuri pot exista?

***A**) 5^5* ***B**) 252* ***C**) 2* ***D**) 10* ***E**) 22*

2006 baraj, IX–X, 21. Se scriu toate numerele de 5 cifre formate cu cifrele 13579 (folosite o singură dată fiecare) şi se ordonează crescător. Care număr se află pe poziția 86?

A) 51379 *B) 93157* *C) 97531* *D) 59731* *E) 75193*

2006 baraj, IX–X, 23. În câte submulțimi nevide ale mulțimii $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ suma dintre cel mai mare şi cel mai mic element al mulțimii este 13?

A) *B)* *C)* *D)* *E)*

2006 baraj, IX–X, 26. Găsiți cel mai mic număr natural *n* astfel încât din oricare *n* numere să putem alege 10 numere care dau acelaşi rest la împărțirea cu 10.

A0 91 *B) 10* *C) 90* *D) 81* *E) 2000*

2006 baraj, IX–X, 29. Am scris şase numere în jurul unui cerc şi, între fiecare două numere, suma acestora. Mihai mi-a şters însă numerele de pe cerc şi una dintre sumele a două numere. Care a fost suma ştearsă?

A) 3 *B) 4* *C) 5* *D) 6* *E) 7*

2006 baraj, XI–XII, 13. Câte sume întregi, cuprinse între 1 şi 2006 euro, nu pot fi plătite numai cu monede de 2 euro şi 5 euro?

A) 0 *B) 1* *C) 2* *D) 45* *E) 90*

2006 baraj, XI–XII, 14. Câte numere de 3 cifre $\overline{abc}$ au proprietatea: $\overline{abc} = a! + b! + c!$?

A) 1 *B) 6* *C) 2* *D) 3* *E) 5*

2006 baraj, XI–XII, 17. Toate numerele naturale având suma cifrelor divizibilă cu 5 se aşază în ordine crescătoare (5, 14, 19, 23, 28, …). Care este diferența minimă dintre doi termeni ai şirului obținut?

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

2006 baraj, XI–XII, 23. Care este ultima cifră a lui $2^{3^{4^{2006}}}$?

A) 0 *B) 2* *C) 4* *D) 6* *E) 8*

2006 baraj, XI–XII, 25. Fiecare fată din clasă are exact trei prietene în aceeaşi clasă. Care poate fi numărul fetelor din clasă?

A) 5 *B) 9* *C) 7* *D) 10* *E) 15*

2006 baraj, XI–XII, 27. David şi Petra au fost de acord să se întâlnească între ora 12^{00} şi 13^{00}, să se aştepte unul pe altul cel mult un sfert de oră şi dacă cel aşteptat nu vine, să plece. Care este probabilitatea ca ei să se întâlnească în aceste condiții?

A) $\frac{4}{16}$ *B)* $\frac{5}{16}$ *C)* $\frac{6}{16}$ *D)* $\frac{7}{16}$ *E)* $\frac{10}{16}$

2007, XI–XII, 30. Şirul crescător 1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, … cuprinde toate puterile lui 3 şi toate numerele care se pot scrie ca sumă de puteri distincte ale lui 3. Care este al 100-lea element al şirului?

A) 150 *B) 981* *C) 1234* *D) 2401* *E)* 3^{100}

2007 baraj, IX–X, 20. Care din următoarele numere nu este divizor al numărului $2^{1650} - 1$?

A) 3 *B) 7* *C) 31* *D) 127* *E) 2047*

2007 baraj, IX–X, 25. Exercițiul dat de profesor era acesta: "Scrie un număr de 4 cifre. Mută prima cifră la sfârşitul numărului şi adună numărul astfel obținut cu numărul inițial (ex: 2537 + + 5372 = 7909)". Din nefericire, dintre rezultatele obținute de cei 5 copii doar unul este corect. Care?

A) 4929 *B) 4587* *C) 7314* *D) 1988* *E) 3572*

2007 baraj, IX–X, 30. Câte numere de două cifre se impart exact la suma cifrelor lor?

A) 11 *B) 14* *C) 19* *D) 20* *E) 23*

2007 baraj, XI–XII, 14. Numărul $3^{32} - 1$ are exact 2 divizori între 75 şi 85. Care este produsul acestor 2 divizori?

A) 5852 *B) 6804* *C) 6560* *D) 6888* *E) 6972*

2007 baraj, XI–XII, 20. Pătratul numărului de două cifre $\overline{ab}$ are ultimele două cifre $\overline{ab}$. Câte astfel de numere există?

A) 0 *B) 1* *C) 2* *D) 3* *E) 4*

2007 baraj, XI–XII, 25. Dintr-un grup de turişti, 28 vorbesc engleza, 15 vorbesc franceza, 10 vorbesc germana, 5 vorbesc şi franceza şi germana, 8 vorbesc şi engleza şi franceza, 2 vorbesc toate cele trei limbi şi 41 nu vorbesc nici o limbă străină. Niciun turist nu vorbeşte numai engleză şi germană. Câți turişti sunt în grup?.

A) 51 *B) 72* *C) 75* *D) 81* *E) 83*

2007 baraj, XI–XII, 28. Un număr natural având suma cifrelor 99 este scăzut dintr-un număr natural cu suma cifrelor 100. Rezultatul obținut nu poate fi un număr cu suma cifrelor:

A) 10 *B) 26* *C) 91* *D) 100* *E) 352*

SOLUȚII

1994, XI, 11. $n = \frac{2ab}{a+b} = 5$, deci $a = \frac{5b}{2b-5}$. Dar $a < b$, deci $\frac{2b(5-b)}{2b-5} < 0$ şi $a, b \in \mathbb{Z}$, rezultă $(a, b) \in \{(-10, 2), (3, 15)\}$. *Răspuns* ***C***.

Dacă numărul 5 este înlocuit cu un număr prim p oarecare, atunci se obțin soluțiile :

$(a, b) \in \left\{\left(-\frac{p(p-1)}{2}, \frac{p-1}{2}\right), \left(\frac{p+1}{2}, \frac{p(p+1)}{2}\right)\right\}$.

1994, XI, 14. Fie x numărul instituțiilor înscrise în acelaşi timp la şcoli şi la colegii, y numărul celor înscrise la colegii şi la licee şi z numărul celor înscrise la şcoli şi la licee.

$\begin{cases} 782 = 703 + 29 + x + z \\ 2921 = 2675 + 29 + x + y \\ 929 = 725 + 29 + y + z \end{cases}$ are soluția $x = 46$, $y = 171$, $z = 4$. *Răspuns* ***A***.

1994, XI, 30. $b = f(a) = f'(a)$. Ecuația $\sin x + 2 = \cos x$ nu are soluții reale. *Răspuns* ***A***.

1994, XII, 11. $u_n = f_{n-1}u_1$, $n \in \mathbb{N}$, unde f_n este termenul de rang n din şirul lui Fibonacci; $u_{10} =$ $= 55u_1 = 10$. *Răspuns* ***D***.

1995, XI, 27. $f'(x) = 2 - 3x^2 + \cos x$, $f''(x) = -6x - \sin x$, $f'''(x) = -6 - \cos x < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. f'' descrescătoare pe $\mathbb{R}$, $f'''(0) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f''(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f''(x) = +\infty$: $f'(0) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$, $f'(0) = 3 \Rightarrow f'(x) = 0$ are exact două soluții reale, simetrice față de origine. Avem şi $f'(0) = 0$, dar derivate păstrează semnul. *Răspuns* ***B***.

1995, XII, 15. $y = 1 - 2\sqrt{x} + x$, $0 \le x, y \le 1$. *Răspuns* ***B***.

1996, XI, 26. $d = 10$, $h = 2$, $x = 2\sqrt{dh - h^2} = 8$. *Răspuns* ***C***.

1997, IX–X, 28. $10x^2 + 100x + 900 = 1000x + 1997$, $1997 \equiv 7 \pmod{10}$. *Răspuns* ***A***.

1997, XI–XII, 26. $f(x) = x^2 + x\cos x - \sin x$, $f(0) = 0$, $f'(x) = x(2 - \sin x)$, $\lim_{x\to\infty} f(x) =$ $= \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. *Răspuns* ***A***.

1998, XI–XII, 16. $X^5 = (X^2 - X - 1)()X^3 + X^2 + 2X + 3) + 5X + 3$. *Răspuns* ***D***.

1999, IX–X, 30. Notăm cu $\tau(n)$ numărul divizorilor pozitivi ai lui n. Dacă $n = 2^a3^bm$, $(m, 2) =$ $= (m, 3) = 1$, atunci $\tau(3n) - \tau(2n) = [(a + 1)(b + 2) - (a + 2)(b + 1)]\tau(m) = (a - b)\tau(m) = 30 -$ $- 28 = 2$. Dacă $\tau(m) = 2$, atunci $b = a - 1$, $\tau(3n) = 2(a + 1)^2 = 30$, imposibil. Dacă $\tau(m) = 1$, atunci $m = 1$, $b = a - 2$, $\tau(3n) = a(a + 1) = 30$, deci $a = 5$, $n = 2^53^3$, $\tau(6n) = 7 \cdot 5 = 35$. *Răspuns* ***C***

1999, XI–XII, 25. A(a, 0), B(a, a), C(0, a), P(x, y). $(x-a)^2+y^2=2^2$, $(x-a)^2+(y-a)^2=7^2$, $x^2+(y-a)^2=9^2$, $x^2+y^2=2^2+9^2-7^2=6^2$. *Răspuns* ***C***.

Identitatea $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ furnizează alte posibile exemple numerice.

1999 baraj, IX–X, 27. $1999\cdot\underbrace{111\,...\,1}_{1999\,cifre}=222\underbrace{111\,...\,1}_{1995\,cifre}0889$ are suma cifrelor egală cu 2 + 2 + + 2 + 1995 + 8 + 8 + 9 = 2026. *Răspuns* ***B***.

1999 baraj, XI–XII, 5. $f(x)=x^2-x\sin x-\cos x$, $f'(x)=x(2-\cos x)>0$, dacă $x>0$. Funcția f este pară, $f(0)=-1$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=+\infty$, deci are două zerouri, care sunt simetrice față de origine. *Răspuns* ***C***.

1999 baraj, XI–XII, 6. Folosim formula lui *Stirling*: $1994!\sim\sqrt{2\pi\cdot1994}\left(\frac{1994}{e}\right)^{1994}\sim$

$\sim10^2\cdot(5\cdot10^5)^{997}\sim\frac{10^{6\cdot997+2}}{2^{997}}$ are aproximativ 5,7 · 997 + 2 = 5682 cifre. *Răspuns* ***C***.

1999 baraj, XI–XII, 11. $n\le\sqrt{n^2+k}<n+\frac{1}{2}$ dacă şi numai dacă $0\le k\le n$. Rezultă:

$a_1=a_2=1$, $a_3=\ldots=a_6=2$, $a_7=\ldots=a_{12}=3$, $a_{13}=\ldots=a_{20}=4$. Suma lor este egală cu

$2+4\cdot2+6\cdot3+8\cdot4=60$. *Răspuns* ***D***.

2000, XI–XII, 23. $a+a+2+\ldots+a+2n=(n+1)(n+a)=3\cdot149$, deci $n=2$, $a=147$.

Răspuns ***A***.

2000, XI–XII, 27. Fie $N=91n$. Dacă n nu este prim, $n=ab$, $a>1$, $b>1$ şi N se divide cu $91a$ şi $91b$, care sunt divizori proprii mai mari decât 91, contradicție. Rezultă $N=91p=7\cdot13p$, cu p prim şi $p\le7$, altfel N ar avea divizorul propriu $13p>91$, contradicție. Deducem $p\in\{2,3,5,7\}$.

Răspuns ***D***.

2000 baraj, IX–X, 19. Lucrăm modulo 10 (cu ultima cifră): din 2), mulțimea A conține resturile 1, 3, 7, 5, iar din 3) A conține resturile 1, 6. Combinând, avem că A conține resturile 1, 3, 5, 6, 7.Posibili candidați rămân doar 2001 şi 2003. Dar $\frac{2001-1}{2}=1000\notin$ A, $\frac{2001-1}{5}\notin$ A, $\frac{2003-1}{2}=$ $=1001\notin$ A. *Răspuns* ***A***.

2000 baraj, IX–X, 22. $a(a+1)(a+2)(a+3)+1=(a^2+3a+1)^2$, $49\cdot53+1=2549$. *Răspuns* ***C***.

2001, IX–X, 7. Notăm $x=\overline{KLMNP}$ şi obținem $4(10x+4)=4\cdot10^5+x$, cu soluția $x=10256$.

Răspuns ***C***.

2001, IX–X, 17. 2*4*6*8*10*12*14 = 2(1*2*3*4*5*6*7). Expresia 1*2*3*4*5*6*7 conține 4 numere impare, deci rezultatul va fi un număr par. Atunci 2*4*6*8*10*12*14 va fi divizibil cu 4, deci nu poate fi 30. *Răspuns* ***E***.

2001, XI–XII, 23. $10^2 = 100$, $12^2 = 144$; $11 \equiv 55 \equiv 99 \equiv 3 \pmod 4$, $66 \equiv 2 \pmod 4$. *Răspuns* ***B***.

2001 baraj, IX–X, 10. $10a + b = 2(a + b)$, $8a = b$, deci $a = 1$, $b = 8$. Vârsta nu poate avea 3 cifre, deoarece $2(9 + 9 + 9) < 100$. *Răspuns* ***C***.

2001 baraj, XI–XII, 3. $10a + b = 3(a + b)$, $7a = 2b$, deci $a = 2$, $b = 7$. Vârsta nu poate avea 3 cifre, deoarece $3(9 + 9 + 9) < 100$. *Răspuns* ***B***.

2001 baraj, XI–XII, 27. O cameră simplă şi 16 camere duble pot fi ocupate de $1 + 2 \cdot 16 = 33$ clienți. Dacă în 8 camere duble este cazat doar câte un client, atunci numărul de clienți este $1 + 8 + 2 \cdot 8 = 25$. Dacă sunt 11 camere, ele pot fi ocupate de cel mult $2 \cdot 11 = 22$ clienți.

Răspuns ***E***.

2001 baraj, XI–XII, 29. Operăm câte două modificări: 234591678(2), 345982167(4), 459873216(6), 598764321(8), 987615432(10), 876129543(12), 761238954(14), 612347895(16), 123456789(18). *Răspuns* ***C***.

2002, XI–XII, 16. $y = \left(\frac{1}{1{,}99-2}\right)^2 = 10000$. *Răspuns* ***D***.

2002, XI–XII, 24. Fie x, y numerele de elevi. Din $x > 2(y - 12)$, $y > 9(x - 10)$. Obținem $x < 12$ şi $y < 18$, dar $x + y > 27$, deci $x = 11$, $y = 17$. *Răspuns* ***B***.

2003, IX–X, 11. $\underbrace{11 \ldots 11}_{2003\ cifre} \cdot 2003 = 222\underbrace{55 \ldots 55}_{2000\ cifre}333$ are suma cifrelor 10015. *Răspuns* ***B***.

2003, IX–X, 24. $a = x + 3$, $b = y - 3$, $(a + b)^2 = ab$. Dacă $b \neq 0$, punem $a = tb$, $t \in \mathbb{R}$. Ecuația $t^2 + t + 1 = 0$ nu are soluții reale, deci $b = 0$, de unde $a = 0$. *Răspuns* ***B***.

2003, IX–X, 26. 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13. *Răspuns* ***D***.

2003, XI–XII, 16. $(a + 2)(a + 4) + 1 = (a + 3)^2$, $1 + (a + 1)(a + 3) = (a + 2)^2$, $1 + a(a + 2) =$ $= (a + 1)^2$, $1 + (a - 1)(a + 1) = a^2$. Se ia $a = 2001$. *Răspuns* ***B***.

2003, XI–XII, 17. Şirul este periodic cu perioada principală 6: 4, 6, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$, 4, 6, …, deci $a_{2003} = \frac{2}{3}$. *Răspuns* ***B***

2003, XI–XII, 28. $10^n + 1$ se divide cu $10^2 + 1$ dacă şi numai dacă $n \equiv 2 \pmod 4$. *Răspuns* ***D***.

2003 baraj, XI–XII, 9. $3^e < \pi^e$, $e^3 < e^\pi$, $e^\pi > 2{,}5^3 > 10$. Arătăm că $e^\pi > \pi^e$. Funcția $f(x) = x - e\ln x$ are derivata $f'(x) = 1 - \frac{e}{x} > 0$, dacă $x > e$. Rezultă $f(\pi) > f(e) = 0$. *Răspuns* ***B***.

2003 baraj, XI–XII, 11. Prin simplificare putem considera $d = 1$. Dacă $a + b \equiv b + c \equiv a + c \equiv$ $\equiv 0 \pmod 3$, atunci $2(a + b + c) \equiv 0 \pmod 3$, deci $a + b + c \equiv 0 \pmod 3$, de unde $a \equiv b \equiv c \equiv$ $\equiv 0 \pmod 3$, contradicție! *Răspuns* ***C***.

2003 baraj, XI–XII, 21. Fiecare grupă de 5 numere natural consecutive, începând cu 5, conține exact un număr cu suma cifrelor divizibilă cu 5. Numărul grupelor este 555 : 5 = 111 (ultima grupă conține un singur număr!). *Răspuns* ***D***.

2004, IX–X, 24. $C_4^0 \cdot C_5^0 + C_4^1 \cdot C_5^1 + C_4^2 \cdot C_5^2 + C_4^3 \cdot C_5^3 + C_4^4 \cdot C_5^4 = 126$. *Răspuns* ***B***.

2004, XI–XII, 28. Orice număr întreg admite o reprezentare de forma respectivă (cifrele 2 din reprezentarea în baza 3 se înlocuiesc cu 3 − 1). Numărul maxim care poate fi obținut cu 5 termeni este $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = \frac{3^5 - 1}{3 - 1} = 121$. *Răspuns* ***D***.

2004 baraj, IX–X, 9. $a = 24c$, $b = 24d$, $(c, d) = 1$, $[c, d] = \frac{2496}{24} = 2^3 \cdot 13$ Obținem perechile (1, 104), (8, 13), (13, 8), (104, 1). *Răspuns* ***A***.

2004 baraj, IX–X, 15. $(1 + 10)^{2004} = 1 + 10 \cdot 2004 + 100n$, cu $n \in \mathbb{N}$. *Răspuns* ***E***.

2004 baraj, XI–XII, 11. 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,

4, 6, 9, 14, 22, 35, 56,

7, 10, 15, 23, 36, 57,

11, 16, 24, 37, 58,

18, 26, 39, 60,

29, 42, 63,

47, 68,

76. *Răspuns* ***D***.

2004 baraj, XI–XII, 12. Şirul este periodic cu perioada principală 5: 2, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1, …

Suma primilor 2004 termeni este 400(2+3+2+1+1)+2+3+2+1=3608. *Răspuns* ***D***.

2004 baraj, XI–XII, 19. $\sin^8 75^\circ - \cos^8 75^\circ = (\sin^4 75^\circ + \cos^4 75^\circ)(\sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ) \times$ $\times (\sin^2 75^\circ - \cos^2 75^\circ) = \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 150^\circ\right)(-\cos 150^\circ) = \left(1 - \frac{1}{8}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{16}$. *Răspuns* ***C***.

2004 baraj, XI–XII, 28. $xy = 3 \cdot 37a$, deci $x \in \{3, 6, 9\}$, $y \in \{37, 74\}$, deci $x = 3$, $y = 74$. *Răspuns* ***D***.

2004 baraj, XI–XII, 29. $1007 - 1000 = 7$, $s(a) - s(b) \equiv \pm a - b \equiv \pm 2 \pmod 9$. *Răspuns* ***D***.

2005, XI–XII, 21. $m = 9993$, $s(m + 3) = 33$; $m = 3999$, $s(m + 3) = 4002$; $m = 9939$, $s(m + 3) =$ $= 24$; $m = 111111897$, $s(m + 3) = 15$. *Răspuns* ***C***.

Mai general, dacă $s(m) \equiv 3 \pmod 9$, atunci $s(m + 3) \equiv 6 \pmod 9$.

2005 baraj, IX–X, 25. $2 + 3 + 4 + 5 = 14$, $7 + 8 + 9 = 24$, $33 + 34 + 35 = 102$, $1002 + 1003 = 2005$. *Răspuns* ***C***.

2005 baraj, IX–X, 29. Notăm prin *A, B, C, D* mulțimile respective. $\mathrm{Card}(A \cup B \cup C \cup D) =$ $= 100$, $\mathrm{Card}(A) = 90$, $\mathrm{Card}(B) = 85$, $\mathrm{Card}(C) = 80$, $\mathrm{Card}(D) = 75$. $\mathrm{Card}(A \cap B) = \mathrm{Card}(A) +$ $+ \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cup B) \geq 90 + 85 - 100 = 75$, $\mathrm{Card}(C \cap D) \geq 80 + 75 - 100 = 55$, $\mathrm{Card}(A \cap B \cap C \cap D) \geq 75 + 55 - 100 = 30$. Exemplul $A = \{1, \ldots, 90\}$, $B = \{16, \ldots, 100\}$, $C =$ $= \{1, \ldots, 70, 91, \ldots, 100\}$, $D = \{1, \ldots, 15, 41, \ldots, 100\}$, arată că acest minim poate fi efectiv realizat, deoarece $A \cap B \cap C \cap D = \{41, \ldots, 70\}$. Problema a fost reluată în **2009, XI–XII, 29** cu o mică modificare (70 în loc de 75) *Răspuns* ***E***.

2005 baraj, IX–X, 30. Singurul număr de forma $6k + 1$ este 25. *Răspuns* ***E***.

2005 baraj, XI–XII, 3. $96 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 110$. *Răspuns* ***C***.

2005 baraj, XI–XII, 12. Aceasta este problema **IX–X, 29**, dar răspunsul ***B***) *75* este evident greşit, deoarece acesta este numărul <u>maxim</u>!

2005 baraj, XI–XII, 14. 5, 6, 7, 8, 9. *Răspuns* ***D***.

2005 baraj, XI–XII, 19. $79 = 4^3 + 3 \cdot 4 + 3 = 2^2(2^3 \cdot 2 + 3) + 3$. *Răspuns* ***B***.

2005 baraj, XI–XII, 30. Numărul prim 47 intră în 47!, …, 93! cu exponentul 1 şi în 94!, …, 100! cu exponentul 2, deci în produsul dat exponentul lui 47 este impar. *Răspuns* ***C***.

2006, IX–X, 18. $ab = 105$, $a + b + c = 20{,}1 \geq a + b \geq 2\sqrt{105}$, contradicție. *Răspuns* ***E***.

2006, IX–X, 30.

$$\begin{array}{ccccccccc}
1-0 & & & & & & & & \\
\downarrow & & & & & & & & \\
2-0 & \to & 2-1 & & & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & & & \\
3-0 & \to & 3-1 & \to & 3-2 & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
4-0 & \to & 4-1 & \to & 4-2 & \to & 4-3 & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
5-0 & \to & 5-1 & \to & 5-2 & \to & 5-3 & \to & 5-4
\end{array}$$

Răspuns ***D***.

2006, XI–XII, 9. $a + b + c = 78$, $a - b - c = 40 \Rightarrow 2a = 118 \Rightarrow a = 59 \Rightarrow b + c = 19 \Rightarrow b = 17$, $c = 2$. *Răspuns* ***E***.

2006, XI–XII, 29. Presupunem că numărul de răspunsuri corecte A este mai mare decât numărul de răspunsuri corecte B. Dacă A este răspunsul corect la toate întrebările, atunci condiția este îndeplinită. Dacă există un singur răspuns corect B şi la el s-a răspuns A, atunci se mai răspunde A la încă 4 întrebări, deci din nou condiția este îndeplinită; dacă se răspunde B, atunci vor fi 5 răspunsuri corecte. Dacă de exemplu, la ultimele 5 întrebări există cel puțin două răspunsuri corecte B, atunci răspundem B la primele 5 întrebări şi A la ultimele 5 şi vom avea cel mult trei răspunsuri corecte. Obținem astfel 11 modele de teste, cu cel mult un răspuns B corect. Inversând pe A cu B avem în total $2 \cdot 11 = 22$ teste. *Răspuns* ***E***.

2006 baraj, IX–X, 21. Există $4! = 24$ numere care încep cu o anumită cifră: numerele de la 1 la 24 încep cu 1, cele de la 25 la 48 încep cu 3, cele de la 49 la 72 încep cu 5, cele de la 73 la 96 încep cu 7. *Răspuns* ***E***.

2006 baraj, IX–X, 23. 2^{10} mulțimi includ $\{1, 12\}$, 2^8 mulțimi includ $\{2, 11\}$, 2^6 mulțimi includ $\{3, 10\}$, 2^4 mulțimi includ $\{4, 9\}$, 2^2 mulțimi includ $\{5, 8\}$, 2^0 mulțimi includ $\{6, 7\}$, în total

$\frac{2^{12}-1}{3} = 1365$. *Răspuns* ***C***.

2006 baraj, IX–X, 26. Alegem câte 9 numere care dau acelaşi rest la împărțirea cu 10, în total 90 de numere. Dacă luăm 91 de numere, atunci printre ele găsim 10 cu proprietatea cerută. *Răspuns* ***A***.

2006 barai, IX–X, 29. Orice număr poate reprezenta suma ştearsă!

2006 baraj, XI–XII, 13. Nu putem plăti 1 euro sau 3 euro, dar putem plăti orice altă sumă intreagă. Sumele care sunt multipli de 2 sau de 5 pot fi plătite. Egalitățile: $10n + 1 = 10(n - 1) + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 5$, $10n + 3 = 10n + 1 + 2$, $10n + 7 = 10n + 1 + 3 \cdot 2$, $10n + 9 = 10n + 1 + 4 \cdot 2$ demonstrează că putem plăti orice altă sumă, cu excepția celor menționate. *Răspuns* ***C***.

2006 baraj, XI–XII, 14. $145 = 1! + 4! + 5!$. *Răspuns* ***A***.

2006 baraj, XI–XII, 17. $50000 - 49999 = 1$. *Răspuns* ***A***.

2006 baraj, XI–XII, 23. $10 \mid 2^n - 2 \Leftrightarrow 4 \mid n - 1$. Dar $3^{4^{2006}} - 1 = (4-1)^{4k} - 1 \equiv 0 \pmod 4$.

Răspuns ***B***.

2006 baraj, XI–XII, 25.

2006 baraj, XI–XII, 27. Împărțim ora în patru sferturi. Cei doi pot veni independent în orice sfert de oră, deci numărul cazurilor favorabile este $4 \cdot 4 = 16$. Ei pot veni în acelaşi sfert de oră sau în sferturi de oră alăturate, dar la un interval mai mic de un sfert de oră, deci numărul cazurilor favorabile este 7. *Răspuns* ***D***.

2007, XI–XII, 30. $100 = 2^6 + 2^5 + 2^2$, $3^6 + 3^5 + 3^2 = 981$. *Răspuns* ***B***.

2007 baraj, IX–X, 20. 1650 se divide cu 2, 3, 5, 11, dar nu se divide cu 7. *Răspuns* ***D***.

2007 baraj, IX–X, 30. $10a + b$ se divide cu $a + b$;

$b = 0, a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$; $b = 1, a \in \{2, 8\}$; $b = 2, a \in \{1, 4, 7\}$; $b = 3, a = 6$;

$b = 4, a \in (2, 5, 8)$; $b = 5, a = 4$; $b = 6, a = 3$; $b = 7, a = 2$; $b = 8, a \in \{1, 4\}$.

Răspuns ***E***.

2007 baraj, XI–XII, 14. Divizorii sunt $3^4 - 1$ şi $3^4 + 1$. Produsul lor este $3^8 - 1 = 6560$. *Răspuns* ***C***.

2007 baraj, XI–XII, 20. $0^2=0$, $1^2=1$, $5^2=25$, $6^2=36$, deci $b \in \{0, 1, 5, 6\}$. Dacă $b = 0$ sau $b = 1$, atunci a se divide cu 10, imposibil. Soluții: 25, 76. *Răspuns* ***C***.

2007 baraj, XI–XII, 25. $N = 28+15+10-5-8-2+2+41=81$. *Răspuns* ***D***.

2007 baraj, XI–XII, 28. $99 - 89 = 10$, $101 - 10 = 91$, $900 - 800 = 100$, $513 - 161 = 352$. *Răspuns* **B**.

Bibliografie

[1] *Concursul European de Matematică Aplicată* **CANGURUL**, *clasele IX–XII,* Editura SIGMA, Bucureşti, 2008

CATEDRA DE MATEMATICĂ, GRUPUL ŞCOLAR DE TRANSPORTURI–PLOIEŞTI

E–mail: avram050652@yahoo.com