

Problema propusa
-Marcu Stefan Florin-profesor Calarasi

Cls. a V a

Se considera multimea $A = \{ x = p^2 * q \leq 2009 / p, q \in \mathbb{N}^* , p, q \geq 3 \text{ numere prime}, p/q+1 \}$.

- a) Aflati cel mai mic si cel mai mare element al lui A .
b) Aflati numarul de elemente al multimii A .

Notatia x/y reprezinta “ x divide y “ .

Solutie :

- a) Observam ca daca p, q au proprietatile din enunt , atunci $p < q$.

Demonstratie :

Deoarece $p/q+1 \Rightarrow p \leq q+1$.

Daca $p=q+1$ atunci , deoarece q este impar (fiind numar prim ≥ 3)
 $\Rightarrow q+1$ par $\Rightarrow p$ par (absurd deoarece si p este numar prim ≥ 3) .

Daca $p=q \Rightarrow q/q+1$ (evident absurd) . Deci $p < q$.

Atunci , cel mai mic element al lui A este $x = 3^2 * 5 = 45$ ($3/(5+1)$) .

Observand ca $2009 = 7^2 * 41$, si $7/(41+1) \Rightarrow 2009 \in A$, deci 2009 este cel mai mare element al lui A .

- b) Vom scrie sub alta forma elementele multimii A .

Din $p/q+1 \Rightarrow (\exists) k \in \mathbb{N}^*$ astfel incat $q+1 = k*p$.

Dar $q+1$ este numar par , si cum p este impar $\Rightarrow (\exists) n \in \mathbb{N}^*$ astfel incat $k = 2n$.

Deci $q+1 = 2np \Leftrightarrow q = 2np - 1$.

Atunci $x = p^2 (2np - 1) = 2np^3 - p^2$, cu $p \geq 3$ numar prim si $n \in \mathbb{N}^*$.

Observatie : Evident , toate elementele multimii A vor fi distincte (din Teorema de unicitate a descompunerii unui numar in factori primi) .

Vom determina toate valorile posibile ale lui p .

Daca $p = 3 \Rightarrow x = 54n - 9$ si $q = 6n - 1$.

Daca $p = 5 \Rightarrow x = 250n - 25$ si $q = 10n - 1$.

Daca $p = 7 \Rightarrow x = 686n - 49$ si $q = 14n - 1$.

Daca $p = 11 \Rightarrow x = 2662n - 121 > 2009$.

Deci $p \in \{ 3,5,7 \}$.

Pentru fiecare valoare a lui p , vom afla valorile posibile ale lui n .

1) Daca $p=3$ atunci $x=54n-9 \leq 2009 \Rightarrow 54n \leq 2018 \Rightarrow n \leq 37$.

Atunci : $q=6n-1$ poate lua una din valorile :

{5,11,17,23,29,35,41,47,53,59,65,71,77,83,89,95,101,107,113,119,125,131,137,143,149,155,161,167,173,179,185,191,197,203,209,215,221 } .

Din cele 37 de numere de mai sus , avem 23 de numere prime . Acestea sunt :

{5,11,17,23,29,41,47,53,59,71,83,89,101,107,113,131,137,149,167,173,179,191,197 } .

2) Daca $p=5$ atunci $x=250n-25 \leq 2009 \Rightarrow 250n \leq 2034 \Rightarrow n \leq 8$.

Atunci $q=10n-1$ poate lua una din valorile :

{ 9,19,29,39,49,59,69,79 } .

Din cele 8 numere de mai sus , avem 4 numere prime . acestea sunt :

{ 19,29,59,79 } .

3) Daca $p=7$ atunci $x=686n-49 \leq 2009 \Rightarrow 686n \leq 2058 \Rightarrow n \leq 3$.

Atunci $q=14n-1 \in \{ 13,27,41 \}$.

Din cele 3 numere de mai sus , avem 2 numere prime { 13,41 } .

Deci multimea A va contine $23+4+2=29$ elemente.

Problema propusa
-Marcu Stefan Florin-profesor Calarasi
clasa a VI a

Demonstrati ca :

$$1) \frac{\overline{aa} + \overline{ab} + \overline{ba} + \overline{bb}}{2(a+b)} = 11$$

$$2) \frac{\overline{aaa} + \overline{aab} + \overline{aba} + \overline{abb} + \overline{baa} + \overline{bab} + \overline{bba} + \overline{bbb}}{4(a+b)} = 111 .$$

Numerele sunt scrise in baza 10 .

Solutie :

1) Avem $\overline{aa} + \overline{ab} + \overline{ba} + \overline{bb} = 11a + 10a + b + 10b + a + 11b = 22(a+b)$. Se obtine evident relatia din enunt.

2) Avem $\overline{aaa} + \overline{aab} + \overline{aba} + \overline{abb} + \overline{baa} + \overline{bab} + \overline{bba} + \overline{bbb} = 111a + 110a + b + 101a + 10b + 100a + 11b + 100b + 11a + 101b + 10a + 110b + a + 111b = 444(a+b)$.

Se obtine evident relatia din enunt.

Problema propusa
-Marcu Stefan Florin-profesor Calarasi-
clasa a VII a

Enunt :

Fie $m, n, a, b \in \mathbb{N}^*$ Aratati ca :

Daca $\frac{a+b}{m+n} \in \mathbb{N}^*$ atunci $\frac{ma-nb}{m+n} \in \mathbb{N}^*$.

Solutie :

Deoarece $\frac{a+b}{m+n} \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (m+n)$ divide pe $(a+b)$. Notam $k=m+n$.

Deci k divide pe $(a+b)$. Vom imparti a si b la k .

Atunci , din teorema impartirii cu rest , obtinem :

$(\exists !)$ $q_1, r_1, q_2, r_2 \in \mathbb{N}^*$ astfel incat :

$a=k \cdot q_1 + r_1$ si $b=k \cdot q_2 + r_2$ cu $r_1, r_2 \in \{0, \dots, k-1\}$.

Atunci $a+b=k \cdot (q_1 + q_2) + (r_1 + r_2)$. Deci , deoarece $r_1 + r_2 \in \{0, \dots, 2k-2\}$

Obtinem $r_1 + r_2 = 0$ sau $r_1 + r_2 = k$.

Cazul I :

Daca $r_1 + r_2 = 0 \Leftrightarrow r_2 = -r_1$. Atunci $ma-nb = m \cdot (k \cdot q_1 + r_1) - n \cdot (k \cdot q_2 + r_2) =$
 $= k \cdot (m \cdot q_1 - n \cdot q_2) + (m \cdot r_1 - n \cdot r_2) = k \cdot (m \cdot q_1 - n \cdot q_2) + m \cdot r_1 + n \cdot r_1 =$
 $= k \cdot (m \cdot q_1 - n \cdot q_2) + r_1 \cdot (m+n) = k \cdot (m \cdot q_1 - n \cdot q_2 + r_1)$.

Deci k divide pe $ma-nb$. Atunci $\frac{ma-nb}{m+n} \in \mathbb{N}^*$.

Cazul II :

Daca $r_1 + r_2 = k \Leftrightarrow r_2 = k - r_1$.

Atunci $ma-nb = k \cdot (m \cdot q_1 - n \cdot q_2) + (m \cdot r_1 - n \cdot r_2) = k \cdot (m \cdot q_1 - n \cdot q_2) + m \cdot$
 $r_1 - n \cdot (k - r_1) = k \cdot (m \cdot q_1 - n \cdot q_2) + m \cdot r_1 - n \cdot k + n \cdot r_1 = k \cdot (m \cdot q_1 - n \cdot$
 $q_2) + (m+n) \cdot r_1 - n \cdot k = k \cdot (m \cdot q_1 - n \cdot q_2) + k \cdot r_1 - n \cdot k = k \cdot (m \cdot q_1 - n \cdot q_2 + r_1 -$
 $n)$.

Deci k divide pe $ma-nb$. Atunci $\frac{ma-nb}{m+n} \in \mathbb{N}^*$.

Problema propusa
-Marcu Stefan Florin-profesor Calarasi
clasa a VIII a

Enunt :

Un butoi de 450 litri , plin cu apa , trebuie golit in 3 damigene de 50 litri , 6 bidoane de 20 litri , iar restul in bidoane de 5 litri si sticle de 2 litri .

Cerinte :

- 1) Putem goli butoiul , fara a folosi sticle de 2 litri ?
Daca da , aflati numarul bidoanelor de 5 litri necesar .
- 2) Putem goli butoiul , fara a folosi bidoane de 5 litri ?
Daca da , aflati numarul sticlelor de 2 litri necesar.
- 3) Aflati numarul maxim al bidoanelor de 5 litri si respectiv numarul maxim al sticlelor de 2 litri , necesare pentru a goli butoiul (presupunand ca s-au folosit si sticle de 2 litri si bidoane de 5 litri) .
- 4) Aflati “ varianta optima “ , care trebuie folosita pentru a goli butoiul , astfel incat numarul bidoanelor de 5 litri folosite sa fie maxim , iar numarul sticlelor de 2 litri folosite sa fie minim .

Solutie :

Vom nota cu x =numarul bidoanelor de 5 litri necesare si cu y =numarul sticlelor de 2 litri necesare .

Evident avem $450=3*50+6*20+5x+2y$, de unde obtinem ecuatia $5x+2y=180$.

1) Daca nu folosim sticle de 2 litri , atunci $y=0$ deci $5x=180$, deci $x=36$. Deci vom folosi 36 de bidoane de 5 litri.

2) Daca nu folosim bidoane de 5 litri , atunci $x=0$ deci $2y=180$ deci $y=90$. Deci vom folosi 90 de sticle de 2 litri .

3) Deoarece $5x+2y=180$, iar $x \geq 1$ si $y \geq 1$, cu $x,y \in \mathbb{N}$, obtinem :
 $5x=180-2y \leq 178 \Rightarrow x \leq 35,6$. Deci numarul maxim al bidoanelor de 5 litri necesare este 35 .

Analog $2y=180-5x \leq 175 \Rightarrow y \leq 87,5$. Deci numarul maxim al sticlelor de 2 litri necesare este de 87 .

4) Daca numarul bidoanelor ar fi maxim posibil $\Rightarrow x=35 \Rightarrow 5*35+2y=180$
 $\Rightarrow 2y=5$ (absurd , deoarece $y \in \mathbb{N}$) .

Daca luam $x=34$ obtinem $5*34+2y=180 \Rightarrow 2y=10 \Rightarrow y=5$.

Asadar , numarul maxim de bidoane folosite este de 34 , iar numarul minim de sticle este 5 .

Problema propusa
-Marcu Stefan Florin-profesor Calarasi-
clasa a X a

Enunt :

Fie a si b , doua cifre oarecare , nenule si distincte .

Notam cu S , suma tuturor numerelor naturale de 2009 cifre , formate numai cu aceste doua cifre .

Aratati ca : $\frac{S}{a+b} = 2^{2008} * \underbrace{11\dots1}_{2009\text{-cifre}}$.

Solutie :

Sa notam cu : $\overline{x_1x_2\dots x_{2009}}$ un numar natural oarecare de 2009 cifre , format numai cu cifrele a si b .

Vor exista 2^{2009} astfel de numere , deoarece numarul functiilor

$f : \{1,2,\dots,2009\} \rightarrow \{a,b\}$ este 2^{2009} .

Daca notam cu $f_1(k) = \overline{aa\dots b\dots a}$ cu b pe pozitia k si cu conventia

$f_1(0) = \overline{aa\dots a}$, iar cu $f_2(k) = \overline{bb\dots a\dots b}$ cu a pe pozitia k si cu conventia

$f_2(0) = \overline{bb\dots b}$, atunci , tinand cont de faptul ca , numarul numerelor de

forma $f_1(k)$ este egal cu numarul numerelor de forma $f_2(k)$, (datorita

simetriei) , iar impreuna sunt 2^{2009} numere , atunci avem cate 2^{2008} astfel de numere .

Dar :

Daca $k=0$ avem $f_1(k) + f_2(k) =$

$$= \overline{aa\dots a} + \overline{bb\dots b} = (a * 10^{2008} + \dots + a) + (b * 10^{2008} + \dots + b) = (a+b)(10^{2008} + \dots + 1) =$$

$$= (a+b) * \underbrace{11\dots1}_{2009\text{-cifre}} .$$

Daca $k \neq 0$ avem $f_1(k) + f_2(k) = (a * 10^{2008} + \dots + b * 10^{k-1} + \dots + a) +$

$$b * 10^{2008} + \dots + a * 10^{k-1} + \dots + b) = (a+b)(10^{2008} + \dots + 1) = (a+b) * \underbrace{11\dots1}_{2009\text{-cifre}} .$$

$$\text{Deci } S = 2^{2008} * [f_1(k) + f_2(k)] = 2^{2008} * (a+b) * \underbrace{11\dots1}_{2009\text{-cifre}} .$$

Astfel obtinem relatia ceruta .

Problema propusa
-Marcu Stefan Florin-profesor Calarasi-
clasa a XI a

Enunt :

Fie $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, doua functii reale de variabila reala, cu f strict convexa si g strict concava.

Atunci ecuatia $f(x)=g(x)$ are cel mult doua solutii reale.

Solutie :

Ecuatia $f(x)=g(x)$ este echivalenta cu ecuatia $(f-g)(x)=0$.

Dar daca g este strict concava, atunci $-g$ este strict convexa, deci functia $f-g$ este strict convexa. (se stie ca suma a doua functii strict convexe este strict convexa).

Problema se reduce la urmatoarea problema :

Daca $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este strict convexa, atunci ecuatia $f(x)=a$, $a \in \mathbb{R}$, are cel mult doua solutii reale.

Vom arata in prealabil, ca daca f este strict convexa, atunci are loc relatia :

$$(*) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \end{vmatrix} > 0, \text{ pentru orice trei numere reale } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

, cu $x_1 < x_2 < x_3$.

Din f strict convexa, avem :

$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$, $(\forall) \lambda \in (0,1)$, si pentru $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$. (1)

Vom lua in relatia de mai sus $x=x_1$, $y=x_3$, si vom alege $\lambda \in (0,1)$ astfel incat $x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3$.

Obtinem $\lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$. Evident $\lambda \in (0,1)$. Atunci $1-\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$.

Inlocuind in (1) obtinem :

$$f(x_2) < \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} * f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} * f(x_3). \text{ deci}$$

$$f(x_2) - f(x_1) < \frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_1} * f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} * f(x_3) = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} * (f(x_3) - f(x_1)).$$

$$\text{Obtinem } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \quad (2)$$

Sa aratam ca relatia (2) este echivalenta cu relatia (*).

Avem :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ f(x_1) & f(x_2) - f(x_1) & f(x_3) - f(x_1) \end{vmatrix} > 0 .$$

Obținem : $(x_2 - x_1) * (f(x_3) - f(x_1)) - (x_3 - x_1) * (f(x_2) - f(x_1)) > 0 .$

Astfel se obține relația (2) .

Să presupunem prin reducere la absurd , că ecuația $f(x)=a$, are trei soluții reale . Fie ele $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Putem presupune , fără a restrânge generalitatea , că $x_1 < x_2 < x_3$.

Atunci $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = a$.

Înlocuind în (*), obținem :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ a & a & a \end{vmatrix} > 0 , \text{ absurd , evident , deoarece determinantul acesta este chiar}$$

egal cu 0 .

Problema propusa
-Marcu Stefan Florin –profesor Calarasi-
clasa a XII a

Enunt :

Se considera ecuatia algebrica : $x^3+x+1=0$.

Vom spune ca un numar z este pur complex , daca $z \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$.

Cerinte :

- 1) Aratati ca ecuatia de mai sus , are o singura solutie reala $\alpha \in (-1, -\frac{1}{2})$
- 2) Daca notam cu $z=a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$, una din solutiile pur complexe , atunci au loc relatiile :
 - i) $b^2 - 3a^2 = 1$
 - ii) $a^2 \in (\frac{1}{16}, \frac{1}{4})$ si $b^2 \in (\frac{19}{16}, \frac{7}{4})$.

Solutie :

- 1) Se stie ca orice ecuatie algebrica de grad impar cu coeficienti reali are cel putin o solutie reala . Mai ramane sa aratam unicitatea solutiei .

Observatie :

Evident , nu putem avea situatia ca doua solutii sa fie reale si una pur complexa , deoarece se stie ca o ecuatie algebrica cu coeficienti reali , daca admite o solutie pur complexa z , atunci admite si pe \bar{z} (conjugata) ca solutie .

Atunci sa presupunem , prin reducere la absurd , ca toate cele 3 solutii sunt numere reale .

Din relatiile lui Viete , avem :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1 \\ x_1x_2x_3 = -1 \end{cases}$$

Obtinem $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 0 - 2 = -2 < 0$ (absurd) . Asadar ecuatia are o singura solutie reala .

Fie ea α . Sa aratam ca $\alpha \in (-1, -\frac{1}{2})$.

Construim functia : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x + 1$ care este evident continua pe \mathbb{R} . Dar $f(-1) = -1 < 0$ si $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{8} > 0$.

Folosind o consecinta a proprietatii lui Darboux , obtinem ca $\alpha \in (-1, -\frac{1}{2})$.

- 2) a) Fie $z=a+bi$ o solutie pur complexa a ecuatiei .

Atunci si $\bar{z}=a-bi$ este o solutie pur complexa a ecuatiei $x^3+x+1=0$.

Revenim la relatiile lui Viete si presupunem $x_1=\alpha$, $x_2=z$, $x_3=\bar{z}$.

Din prima relatie a lui Viete avem: $\alpha+z+\bar{z}=0 \Leftrightarrow \alpha=-2a$ (1).

Din a treia relatie a lui Viete avem: $\alpha \cdot z \cdot \bar{z}=-1 \Leftrightarrow \alpha \cdot (a^2+b^2)=-1$ (2).

Obtinem $a^2+b^2=-\frac{1}{\alpha}=\alpha^2+1$ (3) (evident, deoarece α este solutie a ecuatiei $x^3+x+1=0$).

Din (1) si (3) obtinem: $a^2+b^2=4a^2+1$, deci $b^2-3a^2=1$.

b) Din (1) avem $a=-\frac{\alpha}{2}$. Dar $\alpha \in (-1, -\frac{1}{2})$, deci $a \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ deci

$a^2 \in (\frac{1}{16}, \frac{1}{4})$.

Dar, din $b^2-3a^2=1$ obtinem $b^2=3a^2+1$, de unde $b^2 \in (\frac{19}{16}, \frac{7}{4})$.