



DE LA PITAGORA LA EUCLID

*Prof. Romeo Surdu
Școala de Arte și Meserii Pogana
Loc. Pogana. Jud. Vaslui,*

Primul matematician antic care a acumulat cunoștințele și noțiunile geometrice existente până la acea dată și le-a transpus într-o formă axiomatică, a fost Euclid din Alexandria (360-300 î.Hr.). Ideea axiomatizării geometriei constă în deducerea tuturor proprietăților geometrice acumulate, pe baza unor propoziții inițiale și a unui sistem logico-deductiv. În lucrarea sa "*Elemente*" Euclid construiește geometria plană pornind de la o serie de noțiuni și concepte primare care au stat la baza axiomelor și postulatelor. În unele ediții ale "*Elementelor*", listele postulatelor și axiomelor nu sunt identice, de fapt principiul după care afirmațiile fundamentale au fost trecute în rândul postulatelor sau al axiomelor, rămâne nelămurit. Aristotel (284-322 î.Hr.) definește axiomele ca afirmații de la sine înțelese, provenind din experiențe ce conțin concepte al căror conținut era clar. În acest sens Euclid a folosit definițiile conceptelor de bază, de exemplu: un punct este ceva ce nu are părți. Pe baza axiomelor, postulatelor și a deducțiilor logice, fără a apela la realitatea înconjurătoare, el demonstrează, cu unele rezerve, teoremele.

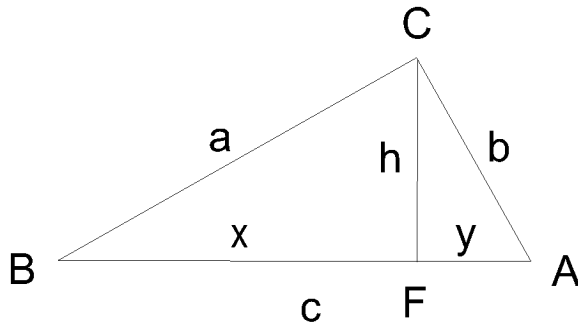
Enumerarea definițiilor și axiomelor suficiente pentru demonstrația strict logică a tuturor teoremelor următoare, formează fundamentul axiomatic al geometriei. Urmând acest algoritm, Euclid demonstrează 28 de teoreme din geometria plană, însă pentru a continua, este nevoit să introducă un nou postulat și anume, postulatul paralelelor. În studiul geometriei din școală acest postulat este cunoscut sub numele de axioma paralelelor (Euclid) și este enunțat astfel: *Printr-un punct A exterior unei drepte d, (În planul determinat de A și d) se poate duce o singură paralelă la dreapta d.* Faptul că acest postulat a apărut ultimul, cu toate că paralelismul este o relație ușor de intuit, ne duce cu gândul că Euclid a încercat să-l deducă din celelalte axiome. De fapt, majoritatea matematicienilor care s-au ocupat cu fundamentarea geometriei, au încercat să elimine postulatul paralelelor. În acest fel au luat naștere noi geometrii și anume, geometriile neeuclidiene.

În perioada în care a trăit Pitagora nu se punea problema axiomatizării geometriei, însă pentru demonstrațiile acestei teoreme s-a folosit în mod direct sau indirect postulatul lui Euclid. Cu alte cuvinte, postulatul lui Euclid implică teorema lui Pitagora. Să vedem acum dacă reciproca este adevărată, adică, teorema lui Pitagora, implică postulatul lui Euclid?

Să încercăm demonstrația acestei reciproce plasându-ne în cadrul geometriei absolute. Pentru acesta, vom apela la sistemul axiomatic al lui Hilbert, considerând cunoscute primele patru grupe de axiome și anume: axiomele de incidență, axiomele de ordine, axiomele de congruență și axiomele de continuitate.

Teorema 1

Dacă într-un triunghi dreptunghic suma lungimilor pătratelor catetelor este egală cu pătratul lungimii ipotenuzei, atunci există triunghiuri dreptunghice și isoscele în care suma măsurilor unghiurilor este egală cu două unghiuri drepte (2dr).



Fie triunghiul ABC în care are loc relația $a^2 + b^2 = c^2$ (*) și $CF \perp AB$.

În triunghiurile dreptunghice BFC și FAC au loc relațiile: $x^2 + h^2 = a^2$ și $h^2 + y^2 = b^2$. (**)

Din figură se poate observa că:

$$c^2 = (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \quad (***)$$

Înlocuind relațiile (**), (***) în relația (*)

obținem:

$$x^2 + h^2 + h^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy \Rightarrow 2h^2 = 2xy \Rightarrow h^2 = xy \text{ sau}$$

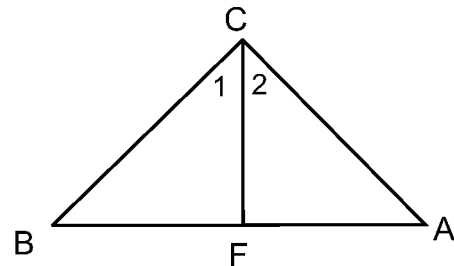
$$(***) \quad \frac{h}{x} = \frac{y}{h} = k \Rightarrow h = kx, y = kh$$

Înlocuim în (**) și obținem $b^2 = h^2 + y^2 = k^2x^2 + k^2h^2 = k^2(x^2 + h^2) = k^2a^2 \Rightarrow b^2 = k^2a^2 \Rightarrow k = \frac{b}{a}$

$$\text{Relația (***) devine } \frac{h}{x} = \frac{y}{h} = \frac{b}{a}$$

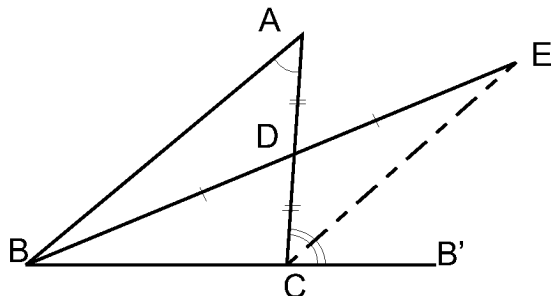
Dacă $a = b \Rightarrow x = y = h$. Triunghiurile ABC, BCF și FAC sunt isoscele, prin urmare obținem următoarele congruențe:

$$\angle B \equiv \angle C_1 \text{ și } \angle A \equiv \angle C_2 \text{ dar } \angle C = \angle C_1 + \angle C_2 = 1 \text{ dr.} \Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C = 2 \text{ dr.}$$



Lema 1 (Teorema unghiului exterior)

Într-un triunghi, un unghi exterior este mai mare decât fiecare din unghiurile neadiacente lui. Vom demonstra că unghiul $\angle ACB'$ este mai mare decât unghiul $\angle BAC$, unde $B - C - B'$.



Fie D mijlocul segmentului AC și E un punct astfel încât $B - D - E$ și $[BD] \equiv [DE]$.

E fiind punct interior unghiului $\angle ACB'$ avem $[CB'] - [CE] - [CA]$.

Deci $\angle ACE$ este mai mic decât $\angle ACB'$.

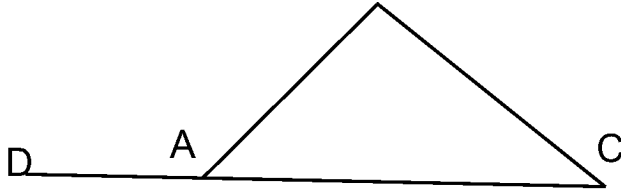
Din triunghiurile congruente ACD și CED (LUL) rezultă $\angle BAC \equiv \angle ACE$, prin urmare $\angle ACB'$ este mai mare decât $\angle BAC$.

Lema2

Într-un triunghi suma măsurilor a două unghiuri este mai mică ca 2dr.

Vom demonstra că suma unghiurilor CAB și ABC este mai mică decât 2dr. Considerăm unghiul DAB exterior triunghiului ABC. Suma unghiurilor DAB și BAC este egală cu 2dr.

Conform lemei 1 unghiul DAB este mai mare decât unghiul ABC, prin urmare suma unghiurilor CAB și ABC este mai mică decât 2dr.

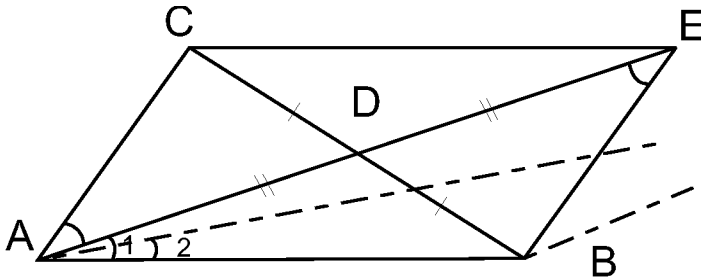


Lema3

Într-un triunghi suma unghiurilor este mai mică sau egală cu 2dr.

Demonstrație

În triunghiul ABC presupunem că $\angle A + \angle B + \angle C > 2dr.$ $\Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C = 2dr. + x$



Fie D mijlocul segmentului BC și E un punct astfel încât A - D - E și $AD \equiv DE$. Din congruența triunghiurilor ADC și DEB (LUL) rezultă:

$$\angle CAD \equiv \angle AEB, \quad \angle ACB \equiv \angle CBE,$$

prin urmare, suma măsurilor unghiurilor triunghiului ABC este egală cu suma măsurilor unghiurilor triunghiului ABE și este egală cu $2dr + x$. Cum $\angle CAB = \angle CAE + \angle EAB$, unul din cele două unghiuri este mai mic sau egal cu jumătatea unghiului CAB.

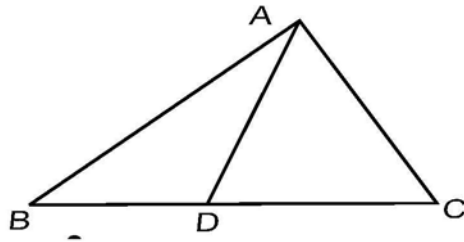
Fie $\angle EAB = \angle A_1 \leq \frac{\angle A}{2}$ Reperăm raționamentul pentru un alt triunghi în care $\angle A_2 \leq \frac{\angle A}{2^2}$

După un anumit număr de pași există $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $x > \frac{\angle A}{2^n}$

În acest caz suma celorlalte două unghiuri ale triunghiului astfel determinat, va fi mai mare sau egală decât 2dr. Acest rezultat obținut contrazice lema 2.

Lema4

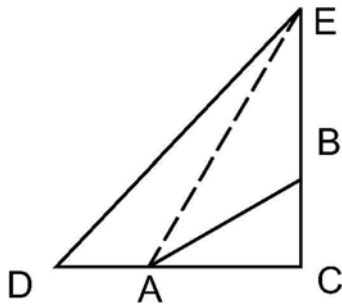
Dacă Într-un triunghi suma măsurilor este 2dr., Atunci segmentul ce unește un vârf al triunghiului cu latura opusă, determină două triunghiuri având fiecare suma măsurilor egală cu 2dr.



În triunghiul ABC suma măsurilor unghiurilor este de 2dr. Notăm S_1 suma măsurilor unghiurilor triunghiului ABD iar cu S_2 suma măsurilor unghiurilor triunghiului ADC. Dacă $S_1 < 2dr$, atunci $S_2 > 2dr$. În contradicție cu Lema 3.

Teorema2

Dacă într-un triunghi dreptunghic și isoscel suma măsurilor unghiurilor este egală cu 2dr, atunci în orice triunghi dreptunghic suma măsurilor unghiurilor este egală cu 2dr.

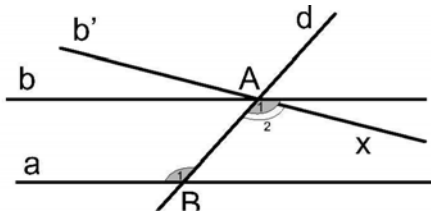


Fie triunghiul ABC cu unghiul drept în C. Pe prelungirea catetelor, luăm două puncte D și E astfel încât triunghiul DCE să fie isoscel. Deoarece într-un triunghi isoscel, suma unghiurilor este egală cu 2d, conform lemei 4, triunghiul ABC va avea suma unghiurilor egală cu 2dr.

Teorema3

Următoarele două propoziții sunt echivalente:

- (1). orice secantă formează cu două drepte paralele a și b , unghiuri alterne interne congruente;
- (2). axioma lui Euclid.



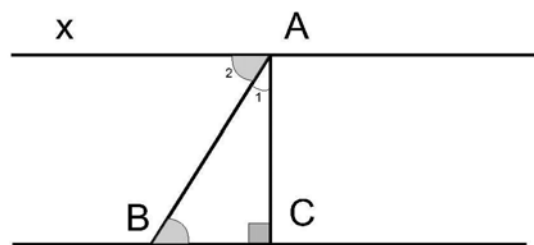
(1) \Rightarrow (2) Fie $a \parallel b$, secanta d , și $\angle A_1 \equiv \angle B_1$
 Presupunem că b nu este unică. Atunci există $b' \parallel a$ astfel încât $\angle A_2 \equiv \angle B_1$ această situație este contrazisă axioma de construcție a unghiurilor, deoarece semidreapta $[AX$ este unică astfel încât $\angle A_1 \equiv \angle B_1$
 (2) \Rightarrow fie $A \notin a, b \parallel a$ și secanta d .

Presupunem că $\angle A_1$ nu este congruent cu $\angle B_1$. Conform axiomei de construcție a unghiurilor există semidreapta $[AX$, astfel încât $\angle A_2 \equiv \angle B_1$, $b' \parallel a$ În această situație avem două drepte b și b' ce trec prin punctul A și sunt paralele cu a . (contrazice axioma lui Euclid).

Teorema 4

Următoarele două propoziții sunt echivalente:

- (1). există triunghiuri dreptunghice în care suma măsurilor unghiurilor este de 2dr;
- (2). axioma lui Euclid.



(1) \Rightarrow (2)

Fie triunghiul dreptunghic ABC, În care

$\angle A + \angle B + \angle C = 2\text{dr}$.

Construim $Ax \perp AC$.

Seobservăcă $\angle A_2 + \angle A_1 = 1\text{d}$ și $\angle B + \angle A_1 = 1\text{dr} \Rightarrow \angle B \equiv \angle A_2$

Conform teoremei 3 rezultă prima implicație. (2) \Rightarrow (1) este evidentă

Bibliografie

[1] Scott E. Brodie, *The Pythagorean Theorem is Equivalent to the Parallel Postulate*, www.cut-the-knot.org

[2] A.C. Albu, F.Rado, *Geometrie pentru perfecționarea profesorilor EDP*, București, 1981

[3] Radu Miron, Dan Brânzei, *Fundamentele aritmeticii și geometriei*, Editura Academiei Republicii Socialiste Romane, București, 1983.

[4] Bachman K. H., Gorke L. N. azicka F., Schroder E, *Kleine Enzyklopadie Mathematik*, traducere de Viotica Postelnicu și Silvia Coatu, Editura Tehnică București, 1980

[5] Efimov N, *Geometrie superioară*, Editura tehnică București, 1952

3 rezultă prima implicație. (2) \Rightarrow (1) este evidentă