Revista MateInfo.Ro ISSN 2065 - 6432 decembrie 2009

Ilinca Sebastian Petrişor
Profesor Şcoala cu clasele I-VIII nr. 4 Corabia

Principiul lui Dirichlet

Principiul lui Dirichlet mai este cunoscut sub denumirea ” The pigeonhole principle ” (principiul cuştii de porumbei) . Unele probleme de combinatorică se rezolvă folosind acest principiu, însă nu totdeauna rezolvarea acestora este facilă .

Enunțul principiului a fost dat de Dirichlet în 1834, sub numele de ***Schubfachprinzip.***

Enunțul principiului: Dacă mulțimea E se exprimă ca o reuniune de ***n*** mulțimi $E = E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n$ atunci , oricare ar fi ***n+1*** elemente din mulțimea E ,există cel puțin două dintre ele în aceeaşi submulțime . Sau mai simplu: Dacă ***n+1*** porumbei intră în ***n*** cuşti atunci există o cuşcă cu cel puțin doi porumbei.

Generalizarea principiului: ***Fie*** n ***obiecte şi*** m ***cutii ,atunci o cutie conține cel puțin*** $[\frac{n}{m}]$ ***obiecte,unde [x] reprezintă partea întreagă a lui x.***

Aplicații:

1) Demonstrați că oricum am alege 5 numere naturale , dacă le ridicăm la puterea a patra , printre numerele obținute găsim cel puțin două a căror diferență se divide cu 10 .

(Olimpiada Județeană Dolj 2006)

Soluție: Fie $n \in N$.Determinăm ultima cifră a lui n^4. $U(n) \in \{0,1,2,3,...,9\}$, $U(n^2) \in \{0,1,4,5,6,9\}$, $U(n^4) \in \{0,1,5,6\}$. Deoarece avem cinci numere , conform principiului lui Dirichlet găsim printre ele două (să le notăm cu x şi y) astfel încât x^4 şi y^4 se termină cu aceeaşi cifră , rezultă că $10 \mid (x^4 - y^4)$.

2) Arătați că oricum am pune în patru urne nouă bile , unele roşii şi altele verzi , va exista o urnă cu cel puțin două bile de aceeaşi culoare .

Soluție : Deoarece sunt 9 bile , printre ele există 5 de aceeaşi culoare şi deoarece avem 4 urne , o urnă va conține două bile de aceeaşi culoare .

3) Arătați ca oricum am alege 7 numere întregi ,două dintre ele dau la împărțirea cu 6 , acelaşi rest.

Soluție: Fie $n \in Z$ .Din teorema împărțirii cu rest $n = 6p + r$,unde $p \in Z$ şi $r \in \{0,1,2,3,4,5\}$ .Avem 6 valori posibile pentru 7 resturi provenite din împărțirea la 6 a numerelor din ipoteză , deducem că cel puțin două resturi trebuie să fi egale .

Observație: Problema este asemănătoare cu următorul rezultat : *Printre oricare n numere naturale există două a căror diferență este divizibilă cu $n-1$.*

4) Se consideră 10 numere naturale distincte .Dintre pătratele lor se aleg 7 .Arătati că cel puțin două dintre ele au diferența divizibilă cu 10.

Soluție: Fie $n \in N$, Ultima cifră a lui n^2 aparține mulțimii $\{0,1,4,5,6,9\}$.Cele 10 pătrate ale numerelor considerate vor fi de forma $M_{10} + r$, cu $r \in \{0,1,4,5,6,9\}$. Alegând 7 pătrate , cel puțin două vor da acelaşi rest la împărțirea cu 10, asadar diferența lor este divizibilă cu 10 .

5) Într-un grup sunt 17 prieteni .Numele şi prenumele lor încep numai cu literele A, B,C,D . Demonstrați că există cel puțin doi copii cu aceleaşi inițiale .

Soluție : Stabilim care pot fi inițialele copiilor .

AA	AB	AC	AD
BA	BB	BC	BD
CA	CB	CC	CD
DA	DB	DC	DD

Observăm că sunt posibile numai 16 perechi de inițiale . Dar fiind 17 copii rezultă că există doi copii cu aceleaşi inițiale .

6) Fie cinci puncte în plan având coordonatele întregi.Să se arate că unul dintre mijloacele segmentelor care unesc cele cinci puncte are , deasemenea, coordonatele întregi .

Soluție: Fie (x,y) un punct din plan.Conform principiului lui Dirichlet dintre cele cinci coordonate pe axa OX trei dintre ele au aceeaşi paritate .Dintre aceste puncte vor exista două pentru care coordonatele pe axa OY au aceeaşi paritate.Mijlocul segmentului care uneşte aceste două puncte are coordonatele numere întregi,iar media aritmetică a două numere de aceeaşi paritate este întotdeauna un număr întreg.

7) Dacă un determinant de ordinul n,are $n^2 - n + 1$ elemente egale ,atunci determinantul este egal cu 0.

Soluție: Un determinant de ordinul n are n^2 elemente ; $n-2$ elemente ale sale sunt diferite de valoarea comună a celor $n^2 - n + 1$ elemente egale. Cele $n-2$ numere pot fi distribuite pe cel mult $n-2$ linii sau coloane ale determinantului .Obținem astfel că cel puțin două linii sau coloane ale determinantului sunt identice , deci valoarea sa este egală cu 0 .

8) Se consideră 5 puncte în interiorul unui triunghi echilateral de latură egală cu unitatea .Să se arate că există două puncte situate la o distanță de cel mult 0,5 unități.

Soluție: Liniile mijlocii ale triunghiului determină patru triunghiuri echilaterale congruente , fiecare având lungimea unei laturi de 0,5 unități. Două din punctele aflate în acelaşi triunghi nu se pot afla la o distanță mai mare de 0,5 unități unul față de celălalt.Avem patru triunghiuri şi cinci puncte ,deci conform principiului lui Dirichlet două puncte se vor găsi în acelaşi triunghi .

BIBLIOGRAFIE:

1. Christina Dan – Didactica matematicii , Ed. Universitaria Craiova, 2006.
2. Liliana Niculescu –Teme de algebră pentru gimnaziu, Ed.Cardinal Craiova, 1993.