Revista MateInfo.Ro ISSN 2065 - 6432 decembrie 2009

O PROPOZIȚIE ȘI APLICAȚIILE EI

de ***Neculai* STANCIU**[1]

Domnului Profesor D.M. Bătinețu – Giurgiu,
ca semn al stimei mai multor generații

O gamă destul de largă de proprietăți elementare și aparent nelegate între ele admite o schemă comună de demonstrație.În acest articol dorim să aprofundăm aceste proprietăți, relevând mecanismul comun al demonstrației și aducând anumite completări.Contextul în care ne plasăm este cel din $[1]$ și anume:

1). Funcția $f:[a-r,a+r]\to R$ se numește a-pară dacă $f(a+x)=f(a-x),\forall x\in R$ cu $|x|\le r$, respectiv a-impară dacă $f(a+x)=-f(a-x),\forall x\in R$ cu $|x|\le r$;

2). Funcția $f:[a-b,a+b]\to R$, continuă, $a,b\in R$, $b>0$, are graficul simetric față de dreapta $x=a$ dacă $f(a-h)=f(a+h)$, $\forall h\in[0,b]$(adică f este a-pară);

3).Funcția $f:[a-b,a+b]\to R$, continuă, $a,b\in R$, $b>0$, aregraficul simetric față de punctul $A(a,0)$ dacă $f(a-h)=-f(a+h)$, $\forall h\in[0,b]$(adică f este $a-$impară);

4).Fie $f:R\to R$ continuă.Punctul $C(a,b)$ este centrul de simetrie pentru graficul lui f dacă $f(a-x)+f(a+x)=2b$, $\forall x\in R$.

Rezultatul principal al acestui articol este:

Propoziția 1.(D.M. Bătinețu – Giurgiu) – publicată în $[1]$ și $[2]$, fără anul apariției

Fie $f:[x_0-r,x_0+r]\to R$ continuă cu proprietatea că $af(x_0+x)+bf(x_0-x)=c$, $\forall x$ cu $|x|\le r,a,b\in R^*$, c$\in R$, atunci:

(i) $\displaystyle\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx=\frac{2cr}{a+b},\ a+b\neq 0$;

(ii) $\displaystyle\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx=\frac{cr}{a}+\frac{a-b}{a}\int_{x_0}^{x_0+r} f(x)dx$

Demonstrație.

Considerăm $\alpha,\beta:[-r,r]\to[x_0-r,x_0+r]$, $\alpha(t)=x_0+t$, $\beta(t)=x_0-t$ și cum $f:[a-r,a+r]\to R$ este continuă putem aplica scimbarea de variabilă

(i) $$\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx=\int_{\alpha(-r)}^{\alpha(r)} f(x)dx=\int_{-r}^{r} f(\alpha(t))\alpha'(t)dt=\int_{-r}^{r} f(x_0+t)dt=\int_{-r}^{r}\left(\frac{c}{a}-\frac{b}{a}f(x_0-t)\right)dt=$$

$$=\frac{2cr}{a}-\frac{b}{a}\int_{-r}^{r} f(x_0-t)dt=\frac{2cr}{a}+\frac{b}{a}\int_{-r}^{r} f(\beta(t))\beta'(t)dt=\frac{2cr}{a}+\frac{b}{a}\int_{\beta(-r)}^{\beta(r)} f(x)dx=$$

[1] Prof., Şc. Cu clasele I-VIII “George Emil Palade”& Şc. Cu clasele I-VIII nr.6, Buzău
e-mail:stanciuneculai@yahoo.com

$= \frac{2cr}{a} + \frac{b}{a}\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx$ .Rezultă că $\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx + \frac{b}{a}\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx = \frac{2cr}{a}$ şi deci

$\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx = \frac{2cr}{a+b}$.

(ii) $\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx = \int_{x_0-r}^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^{x_0+r} f(x)dx$, dar $\int_{x_0-r}^{x_0} f(x)dx = \int_{\alpha(-r)}^{\alpha(0)} f(x)dx = \int_{-r}^{0} f(x_0+t)dt =$

$= \int_{-r}^{0} (\frac{c}{a} - \frac{b}{a} f(x_0 - t))dt = \frac{cr}{a} - \frac{b}{a}\int_{-r}^{0} f(x_0 - t)dt = \frac{cr}{a} + \frac{b}{a}\int_{-r}^{0} f(\beta(t))\beta'(t)dt =$

$= \frac{cr}{a} + \frac{b}{a}\int_{\beta(-r)}^{\beta(0)} f(x)dx = \frac{cr}{a} + \frac{b}{a}\int_{x_0+r}^{x_0} f(x)dx$, rezultă că

$\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx = \frac{cr}{a} + \frac{b}{a}\int_{x_0+r}^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^{x_0+r} f(x)dx = \frac{cr}{a} + \frac{a-b}{a}\int_{x_0}^{x_0+r} f(x)dx$.

În [3] am găsit *problemele 16024, G.M 8 – 1976 autor Gh.Fătu şi 16383, G.M 1 – 1977 autor Anton Reiderer* care țin de istoricul propoziției de mai sus.

Această teoremă , atribuită lui *D.M. Bătinețu – Giurgiu*, a fost în anii care au trecut redescoperită şi particularizată de mai multe ori având până în prezent mai multe aplicații.O parte din aceste aplicații sunt prezentate în cele ce urmează.

Aplicația 1.

Dacă $f:[a-r, a+r] \to R$ este continuă atunci:

$$\int_{a-r}^{a+r} f(x)dx = \begin{cases} 2\cdot\int_{a}^{a+r} f(x)dx, \text{ dacã } f \text{ este a - parã} \\ 0, \text{ dacã } f \text{ este a - imparã} \end{cases}$$

Demonstrație.

Dacã f este a-parã, atunci $f(a+x) - f(a-x) = 0$; deci în Propoziția1.(ii) punând $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$, $x_0 = a$ rezultã cã :

$$\int_{a-r}^{a+r} f(x)dx = \frac{1-(-1)}{1}\cdot\int_{a}^{a+r} f(x)dx = 2\int_{a}^{a+r} f(x)dx.$$

Dacã f este a-imparã, atunci $f(a+x) + f(a-x) = 0$ şi punând în 1.(ii) a=b=1, c=0, rezultã cã $\int_{a-r}^{a+r} f(x)dx = 0$.

Această aplicație, este foarte cunoscută şi utilizată foarte des în diverse cazuri particulare dar ceea ce puțini cunosc este faptul că reprezintă un caz particular al teoremei *D.M. Bătinețu – Giurgiu.*

Aplicația 2. Fie $f:[a-b, a+b] \to R$, continuă, $a, b \in R$, $b > 0$.Funcția f are graficul simetric față de dreapta $x = a$, dacă şi numai dacă $\int_{a-h}^{a+h} f(x)dx = 2\int_{a-h}^{a} f(x)dx = 2\int_{a}^{a+h} f(x)dx$, $\forall h \in [-b, b]$.

Demonstrație.
Dacă f este simetrică față de dreapta $x = a$, atunci $f(a-h) = f(a+h)$, $\forall h \in [0,b]$,

deci f este a - pară şi conform Aplicației 1., rezultă că $\int_{a-b}^{a+b} f(x)dx = 2\int_{a}^{a+b} f(x)dx$

şi făcând schimbarea de variabilă $\varphi(x) = x - b$, $\varphi : [a, a+b] \to R$, $\varphi(a) = a - b$,

$\varphi(a+b) = a$, obținem $\int_{a}^{a+b} f(x)dx = \int_{a-b}^{a} f(x)dx$.

Reciproc, f fiind continuă , admite ca primitivă pe $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$,

$F : [a-b, a+b] \to R$, cu $F(a) = 0$. Relația din enunț, implică :
$F(a+h) - F(a-h) = 2\cdot[F(a) - F(a-h)] = 2\cdot[F(a+h) - F(a)]$, $\forall h$ cu $|h| \le b$.
Rezultă că $F(a+h) = -F(a-h)$, deci $F'(a+h) = -F'(a-h)\cdot(a-h)'$, adică
$f(a+h) = f(a-h)$ şi deci f este simetrică față de dreapta $x = a$, adică f este a-pară.

Aplicația 3.
Fie $f : [a-b, a+b] \to R$, continuă, $a, b \in R$, $b > 0$.Graficul funcției f este simetric

față de punctul $A(a,0)$, dacă şi numai dacă $\int_{a-b}^{a+b} f(x)dx = 0.$

Demonstrație.
Dacă f are graficul simetric față de punctul $A(a,0)$ avem $f(a-h) = -f(a+h)$,

$\forall h \in [0,b]$, adică f este a-impară şi conform Aplicației 1. rezultă că $\int_{a-b}^{a+b} f(x)dx = 0.$

Reciproc, ca în demonstrația Aplicației 2. relația din enunț devine
$F(a+h) - F(a-h) = 0,$ care prin derivare devine: $f(a+h) + f(a-h) = 0,$ adică f
este a - impară , deci are graficul simetric față de punctul $A(a,0)$.

Aplicația 4.(*Problemă menționată la concursul S.S.M – autor Ana Avram, G.M 1 – 1978, dată în concurs)*
Fie $f : R \to R$ continuă şi punctul $C(a,b)$ centrul de simetrie pentru graficul lui f,

atunci $\int_{0}^{2a} f(t)dt = 2ab.$

Demonstrație.(în G.M 1 – 1978 avem o altă demonstrație)
Dacă punctul $C(a,b)$ este centrul de simetrie pentru graficul lui f**,** atunci
$f(a-x) + f(a+x) = 2b$, $\forall x \in R$ .Conform Propoziției 1. pentru $a = b = 1$, $c = 2b$,

$x_0 = a$, rezultă că $\int_{0}^{2a} f(t)dt = \int_{a-a}^{a+a} f(t)dt = \frac{2\cdot 2b}{1+1}\cdot a = 2ab.$

Aplicația 5. Fie $f : R \to R$ continuă. $C(a,b)$ este centrul de simetrie pentru graficul lui f dacă şi numai dacă $\int_{a-x}^{a+x} f(t)dt = 2bx,\ \forall x \in R$.

Demonstrație.
Dacă $C(a,b)$ este centrul de simetrie pentru graficul lui f atunci $f(a-r)+f(a+r)=2b$, $\forall r \in R$.Observăm că putem aplica Propoziția 1. cu $a=b=1$, $c=2b$, $r=x$ rezultă că $\int_{a-x}^{a+x} f(t)dt = \frac{2\cdot 2b}{1+1}\cdot x = 2bx.$

Reciproc, dacă $\int_{a-x}^{a+x} f(t)dt = 2bx$, rezultă $\int_{a-x}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{a+x} f(t)dt = 2bx$ dar, cum f este continuă , admite primitive şi fie F o primitivă a sa; atunci avem

$$2bx = \int_{a-x}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{a+x} f(t)dt = F(a) - F(a-x) + F(a+x) - F(a) = F(a+x) - F(a-x).$$

Derivând relația de mai sus rezultă
$2b = F'(a+x) - F'(a-x) = f(a+x) - f(a-x)\cdot(-x)' = f(a-x) + f(a+x)$ c.c.t.d.
Un caz particular al acestei aplicații este *problema 17117 din G.M. 3 – 1978, autor Paul Lefter.*

În încheiere, propun cititorilor să consulte [2] şi [3] unde se găsesc mai multe exerciții propuse de diverşi autori , date la concursuri şi olimpiade care se pot rezolva utilizând Propoziția 1., şi proprietățile funcțiilor pare şi impare generalizate.

Indicații:

a) din [3]: 14847 G.M. nr. 7 / 1975**,** 22377 G.M. nr. 5 / 1991, 22750 G. M. nr. 1 / 1993, 22990 G.M. nr. 4 / 1994, 23834 G.M. nr. 12 / 1997, 24094 G.M. nr. 3 / 1999, 14847 G.M. nr. 7 /1975, pb. Dată în concurs G.M. nr. 1 /2002, 25054 G.M. nr.2 /2004, 25775 G.M. nr. 4 / 2007;

b) din [2]: 6.57, 6.58, 6.112, 6.117, 6.118, 6.135.

Bibliografie

[1] V. Arsinte, *Probleme Elementare de Calcul Integral,*Ed. Univ. Bucureşti, 1995

[2] D.M. Bătinețu – Giurgiu,ş.a., *Analiză Matematică,* Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2004

[3] Gazeta matematică 1895 – 2007 (ediția electronică)