

**DEMONSTRAȚIA GEOMETRICĂ
A INEGALITĂȚII $n < \sqrt{n^2 + 1} < n + 1$ ȘI A CĂTORVA
CAZURI PARTICULARE ALE ACESTEIA**

Problemă: Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, este adevărată următoarea dublă inegalitate: $n < \sqrt{n^2 + 1} < n + 1$

Demonstrație algebrică:

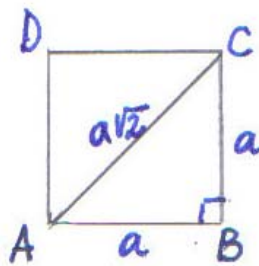
Deoarece toți termenii inegalității sunt numere pozitive, îi ridicăm la pătrat și obținem inegalitatea: $n^2 < n^2 + 1 < n^2 + 2n + 1$, care este evident adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstrație geometrică:

Câteva cazuri particulare prin intermediul cărora elevii pot înțelege mai bine ordinea în care se găsesc numerele reale pe axă, legăturile dintre Geometrie și Algebră, ilustrate pentru prima dată de către marele matematician Pitagora (cca. 582-500 Î.H.) prin teorema care îi poartă numele, precum și relațiile dintre laturile unui triunghi.

Pentru $n=1$, avem de arătat că : $1 < \sqrt{2} < 2$

Fie ABCD un pătrat de latură a . Se duce diagonala $|AC|$. Pentru triunghiul ABC, teorema lui Pitagora ne dă:



$$\|AC\|^2 = \|AB\|^2 + \|BC\|^2 \text{ sau } \|AC\|^2 = a^2 + a^2 = 2a^2, \text{ deci } \|AC\| = a\sqrt{2}$$

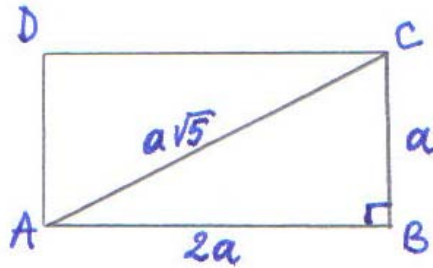
În triunghiul ABC, perpendiculara $|AB|$ pe BC este mai scurtă ca oblica $|AC|$, iar latura AC este mai mică decât suma celorlalte două $|AB|$ și $|BC|$. Deci

$$\|AB\| < \|AC\| \text{ și } \|AC\| < \|AB\| + \|BC\| \text{ sau } \|AC\| < 2\|AB\|$$

Sau $a < a\sqrt{2}$ și $a\sqrt{2} < 2a$, deci $a < a\sqrt{2} < 2a$. Prin împărțirea acestei inegalități la numărul pozitiv a , se obține: $1 < \sqrt{2} < 2$, ceea ce trebuia să arătăm.

Pentru $n=2$, avem de arătat că: $2 < \sqrt{5} < 3$

Fie ABCD un dreptunghi cu lungimea $AB=2a$ și lățimea $BC=a$. Se duce diagonala $|AC|$. Pentru triunghiul ABC, teorema lui Pitagora ne dă:



$$\|AC\|^2 = \|AB\|^2 + \|BC\|^2 \text{ sau } \|AC\|^2 = 4a^2 + a^2 = 5a^2, \text{ deci } \|AC\| = a\sqrt{5}$$

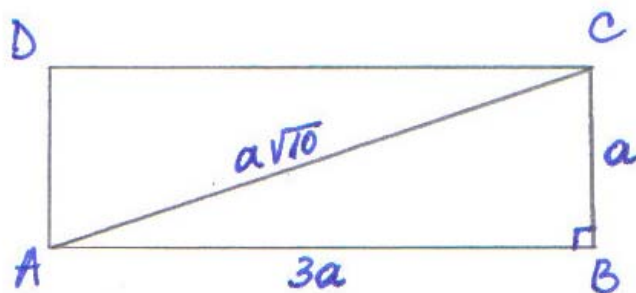
În triunghiul ABC, perpendiculara $|AB|$ pe BC este mai scurtă ca oblica $|AC|$, iar latura AC este mai mică decât suma celorlalte două $|AB|$ și $|BC|$. Deci

$$\|AB\| < \|AC\| \text{ și } \|AC\| < \|AB\| + \|BC\|$$

Sau $2a < a\sqrt{5}$ și $a\sqrt{5} < 3a$, deci $2a < a\sqrt{5} < 3a$. Prin împărțirea acestei inegalități la numărul pozitiv a , se obține: $2 < \sqrt{5} < 3$, ceea ce trebuia să arătăm.

Pentru $n=3$, avem de arătat că: $3 < \sqrt{10} < 4$

Fie ABCD un dreptunghi cu lungimea $AB=3a$ și lățimea $BC=a$. Se duce diagonala $|AC|$. Pentru triunghiul ABC, teorema lui Pitagora ne dă:



$$\|AC\|^2 = \|AB\|^2 + \|BC\|^2 \text{ sau } \|AC\|^2 = 9a^2 + a^2 = 10a^2, \text{ deci } \|AC\| = a\sqrt{10}$$

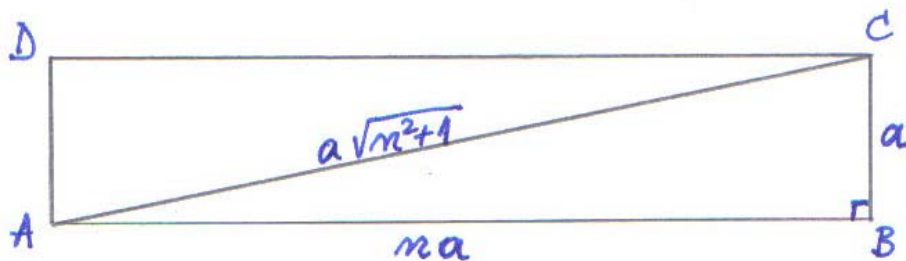
În triunghiul ABC, perpendiculara $|AB|$ pe BC este mai scurtă ca oblica $|AC|$, iar latura AC este mai mică decât suma celorlalte două $|AB|$ și $|BC|$. Deci

$$\|AB\| < \|AC\| \text{ și } \|AC\| < \|AB\| + \|BC\|$$

Sau $3a < a\sqrt{10}$ și $a\sqrt{10} < 4a$, deci $3a < a\sqrt{10} < 4a$. Prin împărțirea acestei inegalități la numărul pozitiv a , se obține: $3 < \sqrt{10} < 4$, ceea ce trebuia să arătăm.

Pentru cazul general, avem de arătat că: $n < \sqrt{n^2 + 1} < n + 1$

Fie ABCD un dreptunghi cu lungimea $AB = na$ și lățimea $BC = a$. Se duce diagonală $|AC|$. Pentru triunghiul ABC, teorema lui Pitagora ne dă:



$$\|AC\|^2 = \|AB\|^2 + \|BC\|^2 \text{ sau } \|AC\|^2 = n^2a^2 + a^2 = a^2(n^2 + 1), \text{ deci } \|AC\| = a\sqrt{n^2 + 1}$$

În triunghiul ABC, perpendiculara $|AB|$ pe BC este mai scurtă ca oblica $|AC|$, iar latura AC este mai mică decât suma celorlalte două $|AB|$ și $|BC|$. Deci

$$\|AB\| < \|AC\| \text{ și } \|AC\| < \|AB\| + \|BC\|$$

Sau $na < a\sqrt{n^2+1}$ și $a\sqrt{n^2+1} < (n+1)a$, deci $na < a\sqrt{n^2+1} < (n+1)a$. Prin împărțirea acestei inegalități la numărul pozitiv a , se obține: $n < \sqrt{n^2+1} < n+1$, ceea ce trebuia să arătăm.

Propunător: Prof. Ignătescu Viorel Ovidiu

Școala cu clasele I-VIII Mătești, com. Săpoca, jud. Buzău