

DESPRE MINIM ȘI MAXIM

Chiar dacă în ultimul timp apar, în manuale sau culegeri, puține exerciții de genul :

$$\begin{aligned} S\acute{a} \text{ se calculeze : } & \max(-2; -5) + \max(-2; 0) = \\ & \max(-4; 4) + \min(0; -5) = \\ & \min(|-7|; |-8|) + \min(|3|; |4|) = \end{aligned}$$

totuși, astfel de aplicații se întâlnesc sub alte forme atât la algebră, cât și la geometrie.

Aplicațiile referitoare la **minim** [lat. *minimus* „cel mai mic”] și **maxim** [lat. *maximus* „cel mai mare”] au la bază o serie de noțiuni elementare pe care elevii trebuie să știe să le aplice la momentul oportun. Noțiunile matematice utilizate în aplicații, de acest gen, sunt :

- compararea numerelor ;
- c. m. m. d. c. și c. m. m. c. al unor numere ;
- rădăcina pătrată a unui număr real nenegativ ;
- valoarea absolută a unui număr real ;
- distanța dintre două puncte ;
- distanța de la un punct la o dreaptă ;
- distanța dintre două drepte.

În afara noțiunilor enumerate mai sus este util ca elevii să cunoască faptul că:

(*) Dacă două numere pozitive au suma constantă, atunci produsul lor este maxim când ele sunt egale.

Demonstrație :

Fie perechile de numere pozitive a și a , respectiv $a - x$ și $a + x$, $x \neq 0$. Suma fiecărei perechi este $2a$. Produsul lor este $a \cdot a = a^2$, respectiv $(a - x)(a + x) = a^2 - x^2$. Cum $x^2 > 0 \Rightarrow a^2 > a^2 - x^2$. Deci, dacă suma celor două numere pozitive este constantă, atunci produsul este maxim când numerele sunt egale.

Aplicația 1:

Dacă $a - 2 = b + 4 = c - 4 = d + 6 = e - 7$, să se găsească cel mai mare și cel mai mic dintre numerele a, b, c, d și e .

Rezolvare :

Fie $a - 2 = b + 4 = c - 4 = d + 6 = e - 7 = k$

$$\left. \begin{array}{l} a - 2 = k \Rightarrow a = k + 2 \\ b + 4 = k \Rightarrow b = k - 4 \\ c - 4 = k \Rightarrow c = k + 4 \\ d + 6 = k \Rightarrow d = k - 6 \\ e - 7 = k \Rightarrow e = k + 7 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \mathbf{e \text{ este cel mai mare,}} \text{ deoarece } e \text{ se obține adăugând} \\ \text{cel mai mult lui } k \\ \mathbf{d \text{ este cel mai mic,}} \text{ deoarece } d \text{ se obține scăzând} \\ \text{cel mai mult lui } k \end{array}$$

Aplicația 2 :

Pentru a confecționa 4 bluze și 3 rochii, un croitor are nevoie de 17 m de pânză, iar pentru a confecționa 3 bluze și 2 rochii, de același fel, are nevoie de 12 m de pânză. Să se afle numărul cel mai mare de obiecte, rochii și bluze, care se pot confecționa din 25 m de pânză.

Rezolvare :

Notăm cu : x numărul de metri de pânză pentru a confecționa o bluză
 y numărul de metri de pânză pentru a confecționa o rochie

Se obține sistemul:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 17 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases} \cdot \begin{matrix} 2 \\ (-3) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 6y = 34 \\ -9x - 6y = -36 \end{cases} \\ \Rightarrow -x / = -2 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\begin{cases} 4x + 3y = 17 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases} \cdot 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 12x + 9y = 51 \\ -12x - 8y = -48 \end{cases} \Rightarrow /y = 3$$

Pentru o bluză sunt necesari 2 m de pânză, iar pentru o rochie sunt necesari 3 m de pânză.

Pentru a vedea cât se poate confecționa din 25 m de pânză, notăm cu m numărul de bluze și cu n numărul de rochii. Se obține ecuația :

$$2m + 3n = 25 \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} m = \frac{25 - 3n}{2} \\ m \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 25 - 3n \text{ trebuie să se dividă cu } 2, \text{ deci,} \\ 3n \text{ trebuie să fie impar și } 3n \leq 25 \end{array}$$

$$\Rightarrow n \in \{1; 3; 5; 7\}$$

$$n = 1 \Rightarrow m = 11 \Rightarrow m + n = 12$$

$$n = 3 \Rightarrow m = 8 \Rightarrow m + n = 11$$

$$n = 5 \Rightarrow m = 5 \Rightarrow m + n = 10$$

$$n = 7 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow m + n = 9$$

Cu 25 m de pânză se pot confecționa cel mult 12 obiecte, 11 bluze și 1 rochie.

Aplicația 3 :

Se consideră, în plan, punctele $A(m, 0)$, $B(1, 2)$ și $C(7, 4)$, cu $m \in [1, 7]$.

Să se găsească cea mai mare valoare a lui m pentru care triunghiul ABC este dreptunghic în A.

Rezolvare :

Dacă triunghiul ABC este dreptunghic în A, conform teoremei lui Pitagora,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \left(\sqrt{(7-1)^2 + (4-2)^2} \right)^2 = \left(\sqrt{(1-m)^2 + (2-0)^2} \right)^2 + \left(\sqrt{(7-m)^2 + (4-0)^2} \right)^2$$

$$\Rightarrow 6^2 + 2^2 = (1-m)^2 + 2^2 + (7-m)^2 + 4^2$$

$$\Rightarrow \text{ecuația } m^2 - 8m + 15 = 0, \text{ are soluțiile } 3 \text{ și } 5.$$

Cea mai mare valoare a lui m pentru care triunghiul ABC este dreptunghic în A este 5.

Aplicația 4 :

Fie prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ dreaptă care are latura bazei de lungime 4 cm și înălțimea de lungime 6 cm și un punct M pe muchia BB' . Să se determine lungimea minimă a segmentului BM astfel încât triunghiul $A'MC$ să fie dreptunghic în M .

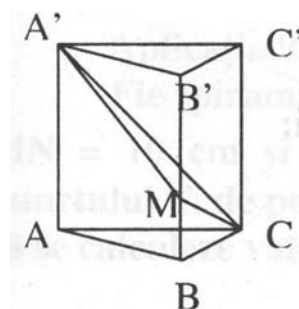
Rezolvare :

$M \in [BB']$, fie $BM = x \Rightarrow B'M = 6 - x$

Din triunghiurile dreptunghice $A'B'M$, BCM și $A'C'C$ se determină

$$A'M = \sqrt{x^2 - 12x + 52} \text{ cm}, MC = \sqrt{x^2 + 16} \text{ cm}$$

$$\text{și respectiv } A'C = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \text{ cm}$$



Dacă triunghiul $A'MC$ este dreptunghic în M , avem $A'C^2 = A'M^2 + MC^2 \Rightarrow 52 = x^2 - 12x + 52 + x^2 + 16 \Rightarrow$ ecuația de gradul al II-lea $x^2 - 6x + 8 = 0$, care are soluțiile 2 și 4.

Deci, triunghiul $A'MC$ este dreptunghic în M dacă BM are lungimea 2 cm sau 4 cm. Deoarece BM trebuie să aibă lungime minimă $\Rightarrow BM = 2$ cm.

Aplicația 5 :

La un concurs participă 108 fete și 135 băieți. Toți participanții sunt grupați în echipe care au același număr de copii, iar fiecare echipă are același

număr de fete. Să se determine numărul maxim de echipe care se pot forma la concurs.

Rezolvare :

Deoarece toate echipele au aceeași componentă, același număr de fete, respectiv același număr de băieți, numărul maxim de echipe care se pot forma este c. m. m. d. c. al numerelor 108 și 135.

$(108, 135) = 3^3 = 27$, se pot forma cel mult 27 de echipe cu aceeași componență.

Aplicația 6 :

Numerele 247, 297 și 347 împărțite la același număr natural n dau resturile 7, 9, respectiv 11. Să se determine cel mai mare, respectiv cel mai mic număr n care îndeplinește condițiile problemei.

Rezolvare :

Conform teoremei împărțirii cu rest, avem :

$$\left. \begin{array}{l} 247 = n \cdot c_1 + 7, 7 < n \Rightarrow 240 = n \cdot c_1, 7 < n \\ 297 = n \cdot c_2 + 9, 9 < n \Rightarrow 288 = n \cdot c_2, 9 < n \end{array} \right\} \Rightarrow n \text{ este divizor comun pentru } 240, 288, 336$$

$$347 = n \cdot c_1 + 11, 11 < n \Rightarrow 336 = n \cdot c_1, 11 < n \quad \text{și } 11 < n$$

Cel mai mare număr, n , care îndeplinește condițiile problemei este c. m. m. d. c. al acestor numere, $(240, 288, 336) = 48$.

Cel mai mic număr, n , care îndeplinește condițiile problemei este un divizor comun al numerelor 240, 288 și 336, dar care este mai mare decât 11, deci este 12.

Aplicația 7 :

Să se determine cea mai mică valoare a numărului :

$$A = \sqrt{a^2 - 2a + 5} + \sqrt{b^2 + 8b + 17}, a, b \in \mathbf{R}$$

Rezolvare :

Numărul A este o sumă de radicali, radicali care sunt numere nenegative.

$$a^2 - 2a + 5 = (a^2 - 2a + 1) + 4 = (a - 1)^2 + 4 \Rightarrow \sqrt{a^2 - 2a + 5} = \sqrt{(a - 1)^2 + 4}$$

are valoare minimă dacă $(a - 1)^2 = 0$ (deoarece $(a - 1)^2 \geq 0$) $\Rightarrow a = 1$

$$b^2 + 8b + 17 = (b^2 + 8b + 16) + 1 = (b + 4)^2 + 1 \Rightarrow \sqrt{b^2 + 8b + 17} = \sqrt{(b + 4)^2 + 1}$$

are valoare minimă dacă $(b + 4)^2 = 0$ (deoarece $(b + 4)^2 \geq 0$) $\Rightarrow b = -4$

Dacă $a = 1$ și $b = -4$, A are **valoare minimă** și $A = \sqrt{4} + \sqrt{1} = 2 + 1 = 3$

Aplicația 8 :

Fie prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ care are latura bazei de lungime 4 cm și înălțimea de lungime 6 cm. Calculați lungimea drumului cel mai scurt dintre punctele C și C', astfel încât drumul să treacă prin toate fețele laterale ale prisme.

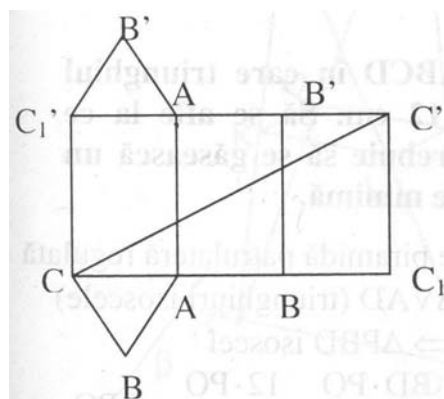
Rezolvare:

Deoarece drumul trebuie să treacă prin toate fețele laterale ale prisme, trebuie să folosim desfășurarea prisme.

Drumul **cel mai scurt** dintre C și C' este segmentul CC'.

În $\triangle CC_1C'$, $m(\angle C_1) = 90^\circ$, conform teoremei lui Pitagora,

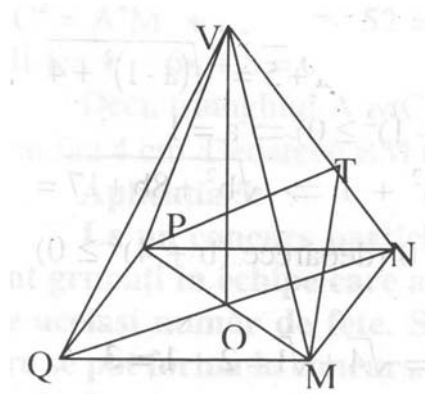
$$\begin{aligned} CC'^2 &= CC_1^2 + C_1C'^2 = (3AC)^2 + C_1C'^2 = \\ &= 12^2 + 6^2 = 144 + 36 = 180 \Rightarrow CC' = \sqrt{180} = 6\sqrt{5} \text{ cm} \end{aligned}$$



Aplicația 9 :

Fie piramida patrulateră regulată VMNPQ cu latura bazei $MN = 10$ cm și înălțimea $VO = 5\sqrt{2}$ cm. Să se determine poziția punctului T, de pe muchia VN, astfel încât suma $MT + PT$ este minimă și să se calculeze valoarea acestui minim.

Rezolvare :



VMNPQ este piramidă patrulateră regulată $\Rightarrow \triangle VMN \equiv \triangle VPN$ (triunghiuri isoscele)
 $\Rightarrow MT = PT$

MT + PT este **minimă** dacă MT este **minim** $\Rightarrow MT \perp VN \Rightarrow MT = \frac{MN \cdot a_p}{VN}$, a_p este apotema piramidei.

$a_p^2 = h^2 + a_b^2 = 50 + 25 = 75 \Rightarrow a_p = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}cm$, unde h este înălțimea piramidei, $a_b = \frac{MN}{2}$ este apotema bazei

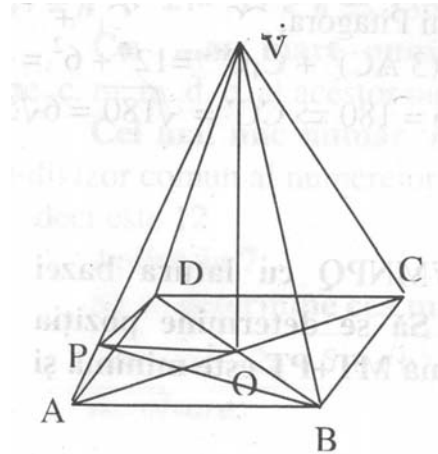
$$VN^2 = VO^2 + ON^2 = VO^2 + \left(\frac{QN}{2}\right)^2 = VO^2 + \left(\frac{MN\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 50 + 50 = 100 \Rightarrow VN = 10cm$$

Deci $MT = \frac{MN \cdot a_p}{VN} = \frac{10 \cdot 5\sqrt{3}}{10} = 5\sqrt{3} = MT + PT = 2MT = 10\sqrt{3}cm = \mathbf{minim}$

Aplicația 10 :

Fie piramida patrulateră regulată VABCD în care triunghiul VAC este echilateral cu latura de lungime 12 cm. Să se afle la ce distanță față de punctul A, pe muchia VA, trebuie să se găsească un punct P astfel încât aria triunghiului PBD să fie minimă.

Rezolvare :



VABCD este piramidă patrulateră regulată $\Rightarrow \Delta VAB \equiv \Delta VAD$ (triunghiuri isoscele)

$\Rightarrow BP = DP \Rightarrow \Delta PBD$ isoscel

$$\Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta PBD} = \frac{BD \cdot PO}{2} = \frac{12 \cdot PO}{2} = 6PO \Rightarrow PO - \text{dist.}$$

deoarece $BO = DO \Rightarrow PO \perp BD$

$\mathcal{A}_{\Delta PBD} = \text{minimă} \Rightarrow PO$ minim $\Rightarrow PO \perp VA$

dar $PO \perp BD$

dintre BD și VA

$$\text{În } \Delta VAO, m(\angle O) = 90^\circ, AO = \frac{AC}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}$$

$$VA = 12 \text{ cm}$$

Conform teoremei catetei avem : $AO^2 = AP \cdot VA$

$$VA \Rightarrow AP = \frac{AO^2}{VA} = \frac{36}{12} = 3 \text{ cm}$$

Pofesor de matematică, gradul I: IGNĂTESCU VIOREL OVIDIU

Școala cu clasele I-VIII Mățești, com. Săpoca, jud. Buzău