MateInfo.ro
MATEmatică și INFOrmații din învățământul ROmânesc
Revista Mateinfo.ro ISSN 2065 – 6432 nr. februarie 2010

Opt probleme de olimpiada despre numarul 2010

-Marcu Stefan Florin-profesor-Calarasi

Problema 1 –clasa a VIII a

Aratati ca exista un numar prim p≤ 37 , si patru numere intregi a,b,c,d $\in$\{-1,1\}

astfel incat :

$\frac{1}{2010}=\frac{1}{p}\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{5}+\frac{d}{67}\right)$.

Solutie :

Se observa ca 2010=2·3·5·67

Atunci : $\frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{5}+\frac{d}{67}=\frac{1005a+670b+402c+30d}{2010}$

In acest caz , relatia din enunt , este echivalenta cu :

1005a+670b+402c+30d=p $\Rightarrow$ 2≤ 1005a+670b+402c+30d ≤37 (1)

Cazul I :

Daca a=1 , avem 1005+670b+402c+30d≤ 37.

Nu putem avea b=1 , altfel , indiferent de valorile lui c,d$\in$\{-1,1\}

inegalitatea (1) nu este indeplinita .

Daca b=-1 , avem : 2≤ 1005-670+402c+30d $\leq 37 \Leftrightarrow$ 2≤ 335+402c+30d≤ 37

Se observa ca c nu poate fi egal , nici cu 1 , nici cu -1 , in caz contrar dubla inegalitate , nefiind indeplinita .

Cazul II :

Daca a=-1 $\Rightarrow$-1005+670b+402c+30d$\leq 37 \Leftrightarrow$670b+402c+30d$\leq$1042

Daca b=1 , avem 402c+30d≤ 372 .

In acest caz , se observa ca , daca c=1 si d=-1 , inegalitatea devine chiar egalitate.

Se verifica usor , faptul ca :

$\frac{1}{2010} - \frac{1}{37}(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{67})$, deci numerele cautate sunt p=37 , a=-1 , b=1 , c=1

si d=-1 .

Problema 2 – clasa a -X -a

a) Aflati cel mai mare numar natural a , si cel mai mic numar natural b , astfel incat : $2^a < 2010 < 3^b$.
b) Aratati ca : $[\log_2 2010] = [\log_3 2010] + [\log_5 2010]$.

S-a notat cu [x] , partea intreaga a numarului real x .

Solutie :

a) Se observa ca $2^{10} = 1024\ si\ 2^{11} = 2048 > 2010$, deci a=10 .

De asemenea , observam ca : $3^6 = 729\ si\ 3^7 = 2187 > 2010$, deci b=7.

b) Din a) , avem ca $[\log_2 2010]$=10 , deoarece $2^{10} < 2010 < 2^{11}$ si prin logaritmare in baza 2 , avem : 10<$\log_2 2010$<11 .

Deoarece $3^6 < 2010 < 3^7$, prin logaritmare in baza 3 , avem :

6<$\log_3 2010$<7 , deci $[\log_3 2010]$=6 .

Se mai observa ca 5^4=625<2010<5^5 . Deci , prin logaritmare in baza 5 ,

avem : $[\log_5 2010]$=4 . Dar 10=6+4 , deci :

$[\log_2 2010] = [\log_3 2010] + [\log_5 2010]$.

Problema 3-clasa a- X –a

a) Verificati ca : $\log 2010 = 1 + \log 201$
b) Aratati ca , orice numar natural de patru cifre , de forma $\overline{abcd}$, care verifica relatia : $\log \overline{abcd}$-$\log \overline{abc}$=1 , este divizibil cu 10 .

S-a notat cu $\log x$, logaritmul zecimal , al numarului real x .

Solutie :

a) Evident $\log 2010 = \log(201 \cdot 10) = \log(201) + \log 10 = 1 + \log 201$.

b) Relatia din enunt , este echivalenta cu :

$\log \overline{abcd} = 1 + \log \overline{abc} \iff \log \overline{abcd} = \log(10 \cdot \overline{abc})$

$\iff \overline{abcd} = 10 \cdot \overline{abc} \iff$ 1000a+100b+10c+d=10(100a+10b+c) $\iff$

1000a+100b+10c+d=1000a+100b+10c $\iff d = 0$.

Deci , numarul $\overline{abcd}$ este divizibil cu 10 .

Problema 4-clasa a IX-a

a) Aflati un numar prim p $\in N^*$, p$\geq$2 , astfel incat :
$2p^7 + 11p^6 + 21p^5 + 18p^4 + 9p^3 + 4p^2 + p = 2010$.

b) Aflati , sapte numere naturale a,b,c,d,e,f,g $\in N^*$, astfel incat :
$a \cdot 2^7 + b \cdot 2^6 + c \cdot 2^5 + d \cdot 2^4 + e \cdot 2^3 + f \cdot 2^2 + g \cdot 2 = 2010$.

Solutie :

a) Daca relatia din enunt , este indeplinita , atunci evident :
$2p^7 < 2010 \Rightarrow p^7 < 1005$. Daca p=3 , avem $3^7 = 2187 > 1005$.
Deci singura posibilitate , este p=2 .
Se verifica , prin calcul direct , faptul ca:
$2 \cdot 2^7 + 11 \cdot 2^6 + 21 \cdot 2^5 + 18 \cdot 2^4 + 9 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 + 2 = 2010$.

b) Conform punctului a) , avem : a=2 , b=11 , c=21 , d=18 , e=9 , f=4 , g=1.

Problema 5-clasa a VIII-a

Aflati trei numere naturale , prime consecutive , astfel incat ;

$a^3 \cdot b^3 \cdot c + a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 + a \cdot b \cdot c = 2010$.

(Trei numere naturale , sunt prime consecutive , daca sunt prime , si consecutive in sirul numerelor prime , de exemplu : (2,3,5) , (3,5,7)…).

Solutie :

Evident $a^3 \cdot b^3 \cdot c < 2010$. Daca a=3 , atunci , este obligatoriu ca b=5 si c=7 .

Dar $3^3 \cdot 5^3 \cdot 7$>2010 (evident) .

Atunci , singura posibilitate , este : a=2 , b=3 , c=5 .

Se verifica , faptul ca :

$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 + 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$+$2 \cdot 3 \cdot 5$=2010 .

Problema 6-clasa a -VII-a

Bunicul Stefan , are trei nepoti .Se stie ca , varstele nepotilor , sunt numere prime consecutive , iar produsul dintre varsta bunicului si varstele celor trei nepoti , este 2010. Aflati varsta bunicului si a nepotilor sai .

(Trei numere naturale , sunt prime consecutive , daca sunt prime , si consecutive in sirul numerelor prime , de exemplu : (2,3,5) , (3,5,7)…).

Solutie :

Sa notam cu a,b,c , varstele celor trei nepoti .

Observam ca 2010=2·3·5·67 .

Tinand cont , de unicitatea descompunerii unui numar in factori primi ,

obtinem ca cei trei nepoti au varstele 2,3 , respectiv 5 ani , iar bunicul are 67 ani .

Problema 7-clasa a VIII-a

Sa se afle patru numere naturale a,b,c,d $\in N^*$ cu a>b>c>d , astfel incat :

$a^2 + b^2 + c^2$+ d^2=2010 .

Solutie :

Evident $a^2 < 2010 \Rightarrow a < \sqrt{2010} \Rightarrow$ a< 45 .

Daca a=44 => $b^2 + c^2 + d^2$=2010-44^2=2010-1936=74.

Deci $b^2 < 74 \Rightarrow$ b<9 .

Daca b=8 => $c^2 + d^2$=10 . Evident , putem lua c=3 si d=1 , deoarece

$3^2 + 1^2 = 10$. Deci a=44 , b=8 , c=3 si d=1 .

Problema 8-clasa a IX-a

a) Aratati ca , ultima cifra , a unui numar natural , cub perfect , poate fi orice cifra .
b) Aflati patru numere naturale prime , a,b,c,d $\in N^*$ cu a>b>c>d , astfel incat : 2010 = $a^3 - b^3 - 2 \cdot c^3$-d^3 .

Solutie :

a) Daca notam cu u(x)=ultima cifra a numarului natural x , observam ca : $u(0^3) = 0$, $u(1^3) = 1$, $u(2^3) = 8$, $u(3^3) = 7$, $u(4^3) = 4$, $u(5^3) = 5$, $u(6^3$)=6 , $u(7^3)$=3 , u(8^3) $= 2$, u(9^3) $= 9$. Deci , ultima cifra poate fi oricare dintre cifrele 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 .
b) Observam ca $a^3 > 2010 \Rightarrow a > \sqrt[3]{2010}$.
Dar , $13^3 = 2197 > 2010$, *iar* $12^3 = 1728 < 2010$.
Daca luam a=13 , atunci 2010=2197-$b^3 - 2 \cdot c^3$-$d^3 \Leftrightarrow$
$b^3 + 2 \cdot c^3 + d^3 = 187$. *Deci* $b^3 < 187$.
Atunci b<$\sqrt[3]{187}$ (dar 5^3=125 , iar $6^3 = 216$).

Daca luam $b = 5$, *atunci* $125 + 2 \cdot c^3 + d^3 = 187 \Rightarrow 2 \cdot c^3 + d^3 = 62$.

Evident , pentru c=3 , obtinem ca d=2 .

Deci , numerele cautate sunt : a=13 , b=5 , c=3 , d=2 .