Revista Mateinfo.ro ISSN 2065 – 6432 nr. februarie 2010

Asupra unor numere "extreme"

-de Marcu Stefan Florin profesor Calarasi-

Vom spune ca patru numere reale a,b,c,d sunt numere extreme daca indeplinesc conditiile

1) $a \geq 0$, b>0 , c>0, $d \geq 0$
2) $\frac{a+b}{2} = \frac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \sqrt{cd}$

Relatiile 2) exprima faptul ca media aritmetica dintre a si b este egala cu media armonica dintre b si c si cu media geometrica dintre c si d.

Consecinte ale definitiei:

1) $d \neq 0$
2) Daca a=0 atunci b=3c si d=$\frac{9}{4}$c

Demonstratie:

1) Daca d=0 $\Rightarrow \frac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = 0 \Leftrightarrow \frac{2bc}{b+c} = 0 \Rightarrow$ b=0 sau c=0 (absurd), deci si $d \neq 0$
2) Daca a=0 $\Rightarrow \frac{b}{2} = \frac{2bc}{b+c} = \sqrt{cd} \Rightarrow b(b+c)=4bc \Rightarrow b^2=3bc \Rightarrow b=3c$

Din $\sqrt{cd} = \frac{b}{2} = \frac{3c}{2} \Rightarrow cd = \frac{9c^2}{4} \Rightarrow d = \frac{9}{4}c$.

In continuare vom prezenta o serie de proprietati remarcabile ale acestor numere si vom arata cum se pot gasi acestea.

PROPRIETATEA 1

Daca doua numere extreme sunt egale atunci toate patru sunt egale.

SOLUTIE:

Vom studia toate cazurile posibile:

1) a=d $\Rightarrow \frac{a+b}{2}=\frac{2bc}{b+c}=\sqrt{ca} \Rightarrow (a+b)^2=4ca$ si (a+b)(b+c)=4bc

Evident a+b $\neq 0$ si impartind cele doua relatii obtinem :

$\frac{a+b}{b+c}=\frac{a}{b} \Rightarrow b^2=ac \Rightarrow b=\sqrt{ca}=\frac{a+b}{2} \Rightarrow a=b \Rightarrow b=c$. Deci a=b=c=d.

2) a=c $\Rightarrow \frac{a+b}{2}=\frac{2ab}{a+b}=\sqrt{ad} \Rightarrow$ a=b(deoarece daca media aritmetica a doua numere este egala cu media lor armonica cele doua numere sunt egale). Deci a= $\sqrt{ad} \Rightarrow$ a=d (daca a=0 atunci c=0 absurd) si conform cu 1) avem a=b=c=d.

3) a=b $\Rightarrow$ a= $\frac{2ac}{a+c}=\sqrt{cd} \Rightarrow a^2=ac$ si cum a=b $\neq 0 \Rightarrow$ a=c si conform cu 2) avem a=b=c=d

4) b=c $\Rightarrow \frac{a+b}{2}=\frac{2b^2}{2b}=\sqrt{bd} \Rightarrow$ a=b=d.

5) b=d $\Rightarrow \frac{a+b}{2}=\frac{2bc}{b+c}=\sqrt{cb} \Rightarrow$ b=c (deoarece media geometrica dintre b si c este egala cu media lor armonica) si din 4) avem a=b=c=d.

6) c=d $\Rightarrow \frac{a+b}{2}=\frac{2bc}{b+c}$=c $\Rightarrow$ b=c si a=b.

PROPRIETATEA 2

Daca a,b,c,d sunt numere extreme atunci au loc inegalitatile:

i. a+b $\leq$ c+d

ii. ab $\leq$ cd

iii. $a \le c$

iv. $b \ge d$

v. $c \ge \frac{a+b}{3}$

DEMONSTRATIE:

Folosind inegalitatea mediilor avem:

Din $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{cd} \ge \sqrt{ab} \Rightarrow ab \le cd$

Din $\frac{2bc}{b+c} \le \sqrt{cb} \Rightarrow \sqrt{cd} \le \sqrt{cb} \Rightarrow b \ge d$

Din $\sqrt{cd} \le \frac{c+d}{2} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \le \frac{c+d}{2} \Rightarrow a+b \le c+d$

Din $(a+b)(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=4 \Rightarrow \frac{a+b}{b}+\frac{a+b}{c}=4 \Rightarrow \frac{a+b}{c}=4-\frac{a+b}{b}=3-\frac{a}{b} \le 3 \Rightarrow a+b \le 3c \Rightarrow$

$c \ge \frac{a+b}{3}$

PROPRIETATEA 3

Daca a,b,c,d numere extreme strict pozitive cu $b \ne d$ atunci:

1) $\frac{a+b}{b+c}=\frac{d}{b}$

2) $\frac{a-c}{d-b}=\frac{4c}{a+b}$

DEMONSTRATIE:

Din definitia numerelor extreme avem relatiile :

$(a+b)^2=4cd$ si $(a+b)(b+c)=4bc$

Impartind cele doua relatii avem : $\frac{a+b}{b+c}=\frac{d}{b}$

Scazand relatiile avem $(a+b)(a-c)=4c(d-b) \Rightarrow \frac{a-c}{d-b}=\frac{4c}{a+b}$

PROPRIETATEA 4

Daca a,b,c,d numere extreme strict pozitive cu c-a=b-d atunci a=b=c=d.

DEMONSTRATIE:

Din c-a=b-d avem a=c-b+d si inlocuind in definitia numerelor extreme avem:

$\frac{c-b+d+b}{2}=\frac{2bc}{b+c}=\sqrt{cd} \Rightarrow \frac{c+d}{2}=\sqrt{cd} \Rightarrow$ c=d si din P1 avem a=b=c=d.

PROPRIETATEA 5

Daca a,b,c,d numere extreme strict pozitive cu c-a=2(b-d) atunci a=b=c=d.

DEMONSTRATIE:

Din P3 avem (a+b)(a-c)=4c(d-b) si din ipoteza $\Rightarrow$2(a+b)(d-b)= 4c(d-b)

$\Rightarrow$d=b sau c= $\frac{a+b}{2}=\sqrt{cd}$ $\Rightarrow$c=d. In ambele situatii din P1 $\Rightarrow$ a=b=c=d.

CONSECINTE:

1) Daca a+b=c+d sau ab=cd unde a,b,c,d numere extreme strict pozitive atunci a=b=c=d.

2)Nu exista patru numere extreme in progresie aritmetica sau geometrica.

DEMONSTRATIE:

1) Din a+b=c+d $\Rightarrow$ c-a=b-d si din P4 $\Rightarrow$ a=b=c=d

Din ab=cd si din $\frac{a+b}{2}=\sqrt{cd}=\sqrt{ab} \Rightarrow$a=b $\Rightarrow$ a=b=c=d

2)Lasam ca exercitiu aceasta demonstratie care este evidenta folosind P2.

TEOREMA

Daca a,b,c,d numere extreme strict pozitive si distincte doua cate doua

atunci ($\exists$) p,q$\in$(0,+∞) cu p>$\frac{4q}{3}$ si p$\neq$2q astfel incat :

a=$\frac{pq(3p-4q)}{(p-2q)^2}$ b=$\frac{p^2q}{(p-2q)^2}$ c=$\frac{p^2(p-q)}{(p-2q)^2}$ d=$\frac{4q^2(p-q)}{(p-2q)^2}$.

DEMONSTRATIE:

Din P2 avem a<c si b>d (deoarece sunt distincte)

Sa notam c-a=p si b-d=q Evident p>0 si q>0.

Se observa ca p$\neq$2q deoarece in caz contrar am avea c-a=2(b-d) si din P5 avem a=b=c=d contradictie.

Sa mai aratam si ca p>$\frac{4q}{3}$ $\Leftrightarrow$3p>4q $\Leftrightarrow$3(c-a)>4(b-d)

Din P3 stim ca $\frac{a-c}{d-b}=\frac{4c}{a+b}$

Din P2 avem c$\geq\frac{a+b}{3}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{4c}{a+b}\geq\frac{4}{3}$ si obtinem $\frac{a-c}{d-b}\geq\frac{4}{3}$ $\Leftrightarrow$3(c-a) $\geq$4(b-d)

Vom mai arata ca inegalitatea de mai sus este stricta , altfel daca 3(c-a)=4(b-d) obtinem c=$\frac{a+b}{3}$

Din (a+b)(b+c)=4bc $\Rightarrow$3c(b+c)=4bc$\Rightarrow$b=3c si cum a+b=3c am avea a=0(absurd).

In continuare avem c=a+p si b=d+q . Inlocuind pe c si b in relatiile din P3 obtinem: $\frac{a+d+q}{a+d+p+q}=\frac{d}{b}$ si prin calcul direct obtinem d=$\frac{aq+q^2}{p-q}$

Din a doua relatie din P3 avem $\frac{p}{q}=\frac{4(a+p)}{a+d+q}$ si prin calcul direct obtinem

d=$\frac{a(4q-p)+3pq}{p}$ Egaland cele doua relatii obtinem a= $\frac{pq(3p-4q)}{(p-2q)^2}$

In continuare inlocuind pe a obtinem d=$\frac{4q^2(p-q)}{(p-2q)^2}$

Dar c=a+p=$\frac{p^2(p-q)}{(p-2q)^2}$ si b=d+q=$\frac{p^2q}{(p-2q)^2}$ prin calcul direct .

OBSERVATII:

Se pot construi oricat de multe astfel de numere , de exemplu daca luam p=5 si q=3 obtinem a=45 , b=75 , c=50 , d=72.

PROPUNEM CELOR INTERESATI SA GASEASCA SI ALTE PROPRIETATI INTERESANTE ALE ACESTOR NUMERE.