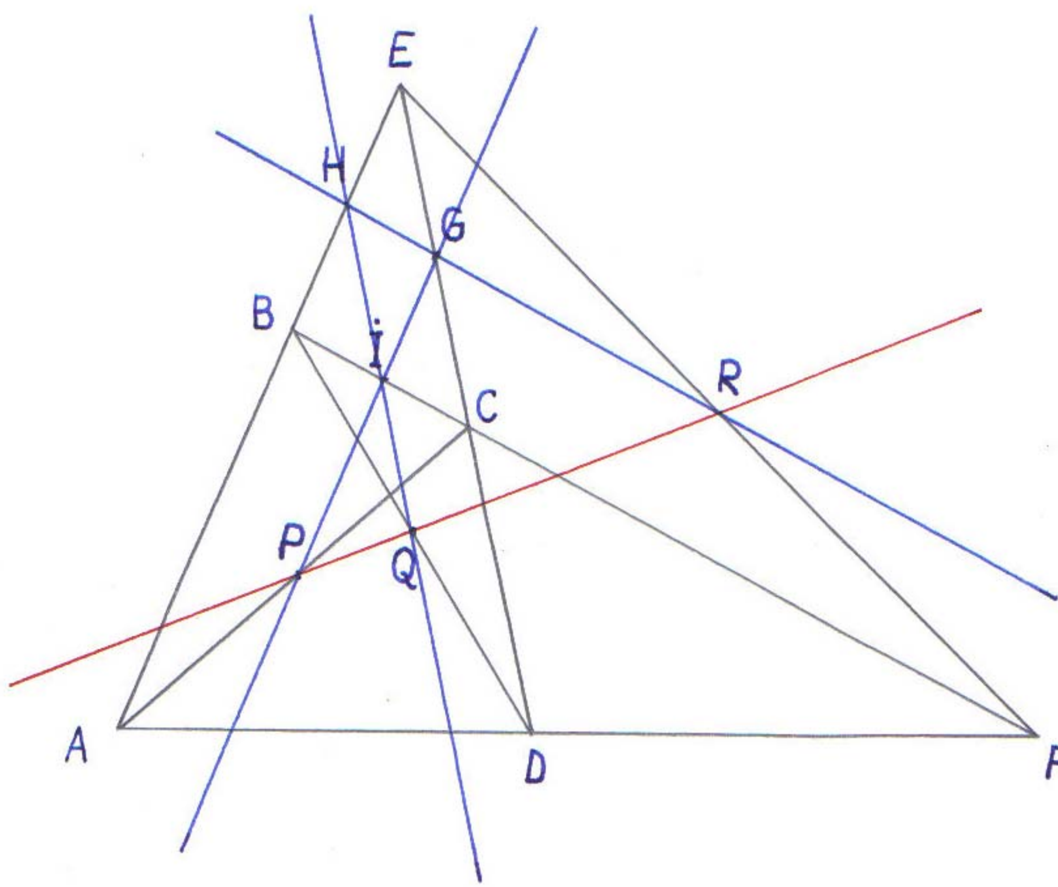
Revista Mateinfo.ro ISSN 2065 – 6432 nr. februarie 2010

# TEOREMA NEWTON GAUSS PENTRU PATRULATERUL COMPLET

**Definiție: Se numeşte patrulater complet ABCDEF un patrulater ABCD, unde** $\{E\} = AB \cap CD$ **şi** $\{F\} = BC \cap AD$**. Segmentele** $[AC],[BD],[EF]$ **se numesc diagonale ale patrulaterului complet.**

***Teorema NEWTON-GAUSS: Mijloacele diagonalelor unui patrulater complet sunt coliniare.***




***Demonstrație:***

Notăm cu P, Q, R mijloacele diagonalelor AC, BD şi EF. Vrem să demonstrăm că punctele P, Q şi R sunt coliniare.

Fie G, H, I mijloacele segmentelor CE, EB şi BC.

$$\left.\begin{array}{l}\text{În } \triangle \text{BCE, GI este linie mijlocie fiind paralelă cu BE}\\ \text{În } \triangle \text{BCA, PI este linie mijlocie fiind paralelă cu BA}\\ \text{Cum punctele A, B şi E sunt coliniare}\end{array}\right\} \Rightarrow G, I, P$$ sunt situate pe o paralelă la EA

$$\left.\begin{array}{l}\text{În } \triangle C\text{BE, HI este linie mijlocie fiind paralelă cu EC}\\ \text{În } \triangle C\text{BD, QI este linie mijlocie fiind paralelă cu CD}\\ \text{Cum punctele C, D şi E sunt coliniare}\end{array}\right\} \Rightarrow H, I, Q$$ sunt situate pe o paralelă la ED

$$\left.\begin{array}{l}\text{În } \triangle CEB\text{, GH este linie mijlocie fiind paralelă cu BC}\\ \text{În } \triangle CEF\text{, GR este linie mijlocie fiind paralelă cu CF}\\ \text{Cum punctele B, C şi F sunt coliniare}\end{array}\right\} \Rightarrow H, G, R$$ sunt situate pe o paralelă la BF

Observăm că punctele P,Q şi R sunt situate pe prelungirile laturilor triunghiului $\triangle GHI$. Vom încerca cu ajutorul Reciprocei Teoremei lui Menelaus să arătăm că acestea sunt coliniare. Avem de arătat că: $\frac{PI}{PG} \cdot \frac{RG}{RH} \cdot \frac{QH}{QI} = 1$

Pentru aceasta vom folosi linii mijlocii convenabile astfel:

$$\left.\begin{array}{l}\text{În } \triangle CAB\text{, PI este linie mijlocie} \Rightarrow \text{ PI} = \dfrac{AB}{2}\\ \text{În } \triangle \text{CAE, PG este linie mijlocie } \Rightarrow \text{ PG} = \dfrac{AE}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{PI}{PG} = \frac{AB}{AE} (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{În } \triangle ECF\text{, RG este linie mijlocie} \Rightarrow \text{ RG} = \dfrac{FC}{2}\\ \text{În } \triangle EBF\text{, RH este linie mijlocie } \Rightarrow \text{ RH} = \dfrac{FB}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{RG}{RH} = \frac{FC}{FB} (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{În } \triangle BDE,\ \text{QH este linie mijlocie} \Rightarrow \text{QH}=\dfrac{DE}{2} \\ \text{În } \triangle BCD,\ \text{QI este linie mijlocie} \Rightarrow \text{QI}=\dfrac{DC}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{QH}{QI}=\frac{DE}{DC}(3)$$

Înmulțind relațiile $(1),(2)\text{și}(3)$ membru cu membru, obținem:

$$\frac{PI}{PG}\cdot\frac{RG}{RH}\cdot\frac{QH}{QI}=\frac{AB}{AE}\cdot\frac{FC}{FB}\cdot\frac{DE}{DC}(4)$$

Știm că punctele A,F și D sunt coliniare, fiind situate pe prelungirile laturilor triunghiului $\triangle BEC$ și conform Teoremei lui Menelaus avem:

$$\frac{AB}{AE}\cdot\frac{FC}{FB}\cdot\frac{DE}{DC}=1 \quad (5)$$

Din relațiile $(4)$ și $(5)$ $\Rightarrow \dfrac{PI}{PG}\cdot\dfrac{RG}{RH}\cdot\dfrac{QH}{QI}=1$ $\Rightarrow$ Conform Reciprocei Teoremei lui Menelaus, punctele P,Q și R sunt coliniare, ceea ce trebuia să demonstrăm.

**Propunător: Prof. IGNĂTESCU VIOREL OVIDIU**
**Școala cu clasele I-VIII Mătești, com. Săpoca, jud. Buzău**

Bibliografie: Mihail Megan; Gheorghe Ivan; Mircea Puta. EXAMENE ȘI CONCURSURI PENTRU PROFESORII DE MATEMATICĂ. Editura Mirton, Timișoara, 1997