Revista Mateinfo.ro ISSN 2065 – 6432 nr. februarie 2010

Rezolvarea ecuațiilor şi sistemelor de ecuații neliniare

I . REZOLVAREA ECUAȚIILOR NELINIARE

1. INTRODUCERE

Prin ecuații neliniare se înțeleg ecuațiile algebrice şi transcendente, cu excepția ecuațiilor algebrice de gradul unu.

O ecuație este *algebrică* dacă funcția $f(x)=0$ este un polinom sau poate fi adusă la o formă polinomială, în urma unor transformări.

Ecuațiile: $5x^7-4x^6+12x^3+x-14=0$ şi $\sqrt{x^3-4}+15x-32=0$ sunt exemple de ecuații algebrice.

O ecuație este *transcendentă* dacă nu este algebrică.

Ecuațiile $x\cdot\sin^2(x)-e^x\tan(x)+3.8=0$, $\ln(x)+\cos(x^2)-1.48=0$ sunt ecuații transcendente.

În acest capitol ne vom ocupa de determinarea rădăcinilor reale ale ecuațiilor neliniare. Astfel, dacă α este o rădăcină reală a ecuației $f(x)=0$, graficul funcției $f(x)$ intersectează axa absciselor în punctul $x=\alpha$ (v.fig.1.1).

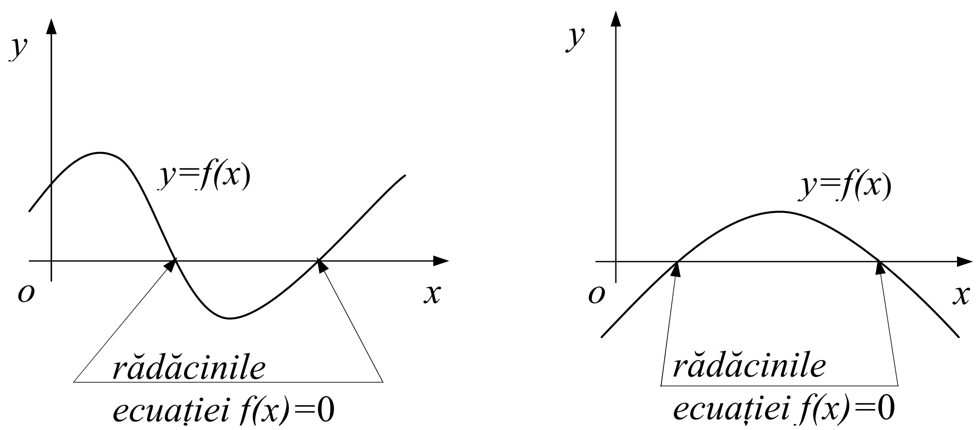

Fig.1.1. Rădăcinile ecuației $f(x)=0$

De regulă, ecuațiile neliniare se rezolvă pe cale numerică, iterativ, excepție făcând unele ecuații algebrice simple de gradul doi, trei sau patru sau unele ecuații transcendente, pentru care s-au stabilit metode exacte de rezolvare. De aceea, prin rezolvarea numerică a unei ecuații se obține o soluție aproximativă, soluție care poate fi totuşi suficient de aproape de soluția exactă, după cum se va vedea în continuare .

Fie $[a,b]$ un domeniu în care ecuația

$$f(x)=0 \tag{1.1}$$

are o soluție unică, α.

Rezolvarea numerică a ecuației (1.1), pornind de la o soluție inițială $x^{(0)}$, conduce la obținerea un şir de valori $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, …, $x^{(k)}$, care converge către soluția unică α pentru $k=\infty$, adică $\lim_{k\to\infty} x^{(k)}=\alpha$.

Oprirea procesului iterativ, de găsire a soluției ecuației $f(x)=0$, se face atunci când sunt îndeplinite condițiile:

$$\begin{aligned} &\left|x^{(k)}-\alpha\right| \le \varepsilon_1; \\ &\left|f(x^{(k)}\right| \le \varepsilon_2, \end{aligned} \tag{1.2}$$

unde ε_1 şi ε_2 sunt numere pozitive foarte mici.

Cele două condiții (1.2) nu sunt echivalente, după cum se observă din figura 1.2. Astfel, dacă modulul pantei funcției $y=f(x)$, în punctul $x^{(k)}$, este mic (fig.1.2.*a*), atunci $\left|f(x^{(k)})\right|$ este suficient de mic, iar valoarea $\left|x^{(k)}-\alpha\right|$ este mare. În figura 1.2.*b*, avem $\left|f(x^{(k)})\right|$ mare şi $\left|x^{(k)}-\alpha\right|$ mic.

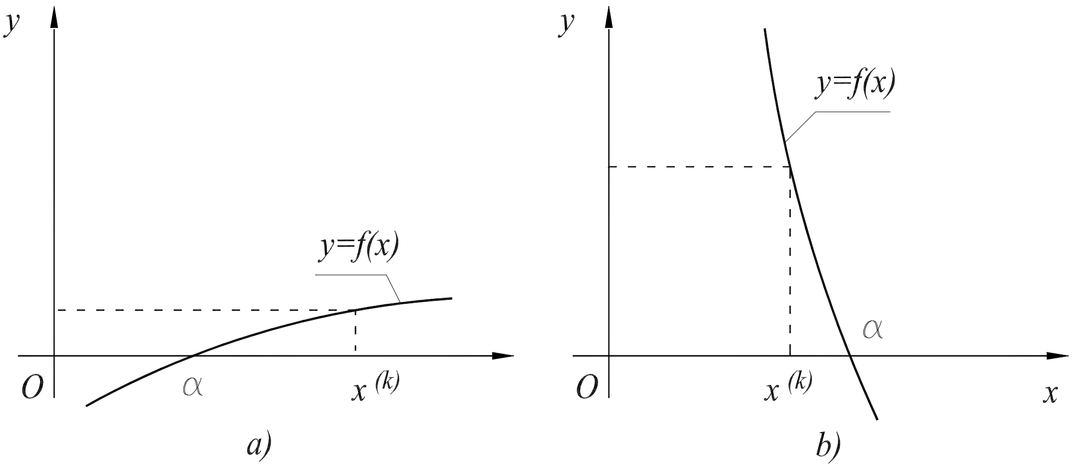

Fig.1.2. Punerea în evidență a rădăcinilor aproximative

În practică se folosesc fie ambele condiții (1.2), fie numai una dintre ele, în funcție de problema de rezolvat.

După cum s-a arătat mai înainte, în domeniul $[a,b]$ trebuie să existe o soluție unică α. De aceea, la determinarea soluțiilor reale ale ecuației $f(x)=0$ se parcurg două etape, şi anume:

a) separarea rădăcinilor ecuației (1.1);
b) determinarea aproximativă a rădăcinilor, folosind o metodă numerică adecvată.

2. METODE ITERATIVE DE REZOLVARE A ECUAŢIILOR ALGEBRICE ŞI TRANSCENDENTE

2.1. Metoda Newton-Raphson

Fie $f(x)=0$ o ecuaţie algebrică sau transcendentă, care în intervalul $[a,b]$ are o rădăcină unică α. Presupunem că derivatele $f'(x)$ şi $f''(x)$ sunt continue şi păstrează semnul constant pentru $x\in[a,b]$, unde $a<b$.

Pentru determinarea formulei de iterare, cu ajutorul căreia se obţine o aproximantă a rădăcinii reale α, se vor folosi două metode, şi anume: o metodă analitică, care foloseşte dezvoltarea în serie Taylor a funcţiei $f(x)$ în jurul lui $x^{(k)}$, şi o metodă geometrică, în care se foloseşte tangenta la curba $y=f(x)$ în punctul $(x^{(k-1)}, f(x^{(k-1)})$.

1. Fie $x^{(k)}=x^{(k-1)}+\Delta x$. Dezvoltând în serie Taylor funcţia $f(x)$, în jurul lui $x^{(k)}$, rezultă:

$$\begin{aligned} f(x^{(k)}) = f(x^{(k-1)}) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x^{(k-1)}) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x^{(k-1)}) + \cdots \\ + \frac{(\Delta x)^{(k-1)}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(x^{(k-1)}) + \cdots = 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Dacă se reţin primii doi termeni din relaţia (2.8), se obţine:

$$f(x^{(k-1)}) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x^{(k-1)}) \cong 0,$$

de unde rezultă:

$$x^{(k)} \cong x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)}}{f'(x^{(k-1)})}, \quad k=1,2,\cdots \tag{2.9}$$

care se numeşte *formula de iterare de ordinul doi*.

Procesul de obţinere iterativă a soluţiei se opreşte atunci când este îndeplinită relaţia:

$$\left| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right| \le \varepsilon. \tag{2.10}$$

Dacă din dezvoltarea în serie (2.8) se reţin primii trei termeni, se obţine formula de iterare de ordinul trei. Pentru aceasta, relaţia

$$f(x^{(k-1)}) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x^{(k-1)}) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x^{(k-1)}) = 0$$

se scrie sub forma:

$$f(x^{(k-1)})+\Delta x\left[f'(x^{(k-1)})+\frac{\Delta x}{2}f''(x^{(k-1)})\right]=0\,,$$

unde termenul Δx, din interiorul parantezei mari, se înlocuieşte cu $-\dfrac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)})}$, adică cu eroarea din formula de iterare de ordinul doi. În acest caz, se obține:

$$x^{(k)}=x^{(k-1)}-\frac{2f(x^{(k-1)})f'(x^{(k-1)})}{2\left(f'(x^{(k-1)})\right)^2-f(x^{(k-1)})f''(x^{(k-1)})}\,, \tag{2.11}$$

care poartă numele de *formulă de iterare de ordinul trei*.

2. Cea de a doua metodă de determinare a formulei de iterare Newton-Raphson porneşte de la interpretarea geometrică a relației (2.9). Astfel, dacă se consideră $x^{(0)}=b$, $f'(x^{(0)})>0$, $f''(x^{(0)})>0$ (v. fig.2.3) şi se duce tangenta la curbă în punctul $(x^{(0)},f(x^{(0)}))$, atunci intersecția acesteia cu axa absciselor se notează cu $x^{(1)}$ şi reprezintă o aproximantă a soluției reale α, căreia îi spunem: *soluția ecuației la iterația unu*. După cum se observă, s-a înlocuit curba $y=f(x)$ cu tangenta în punctul $(x^{(0)},f(x^{(0)}))$. În continuare, se duce tangenta la curbă în punctul $(x^{(1)},f(x^{(1)}))$ şi intersecția acesteia cu axa absciselor o notăm cu $x^{(2)}$ şi reprezintă soluția ecuației la iterația a doua. Dacă se consideră tangenta la curbă în punctul $(x^{(k-1)},f(x^{(k-1)}))$, se ia un punct $M(x,y)$ pe această tangentă şi se scrie ecuație dreptei de pantă $f'(x^{(k-1)})$, care trece prin punctul *M*, atunci se obține:

$$\frac{y-f(x^{(k-1)})}{x-x^{(k-1)}}=f'(x^{(k-1)})\,.$$

Pentru $y=0$ rezultă $x=x^{(k)}$, astfel că se obține relația:

$$x^{(k)}=x^{(k-1)}-\frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)})}\,,$$

care este formula de iterare Newton-Raphson de ordinul doi.

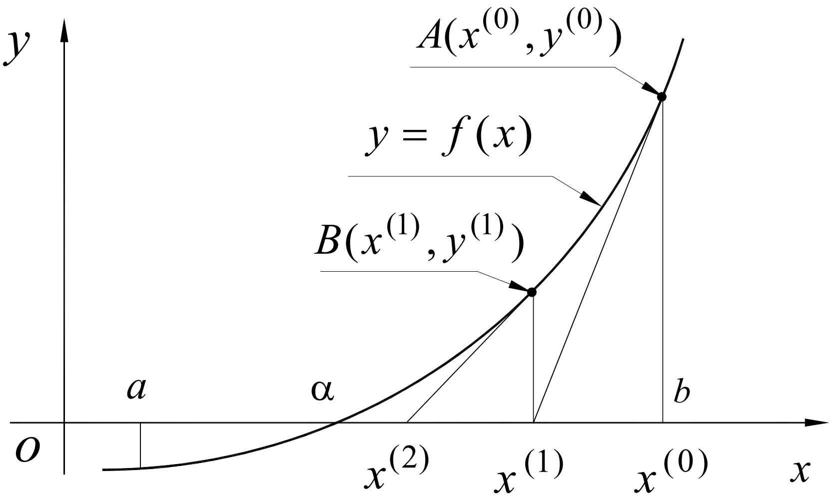

Fig. 2.2. Ilustrarea metodei Newton-Raphson

2.2. Metoda bisecției succesive

Fie $f(x) = 0$, o ecuație algebrică sau transcendentă, care în intervalul $[a,b]$ are o rădăcină unică α, adică $f(a) \cdot f(b) < 0$. Determinarea soluției ecuației considerate, constă în înjumătățirea succesivă a intervalelor de incertitudine până când se obține o valoare care să aproximeze, cu o eroare acceptată, rădăcina α (v.fig. 2.5).

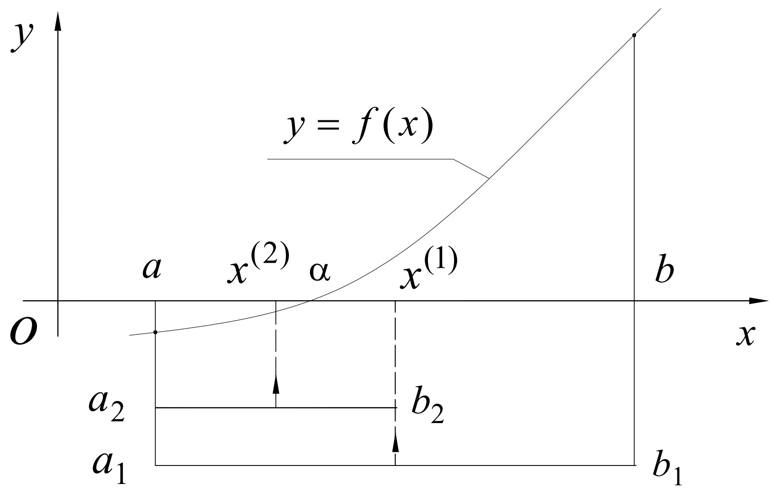

Fig. 2. Ilustrarea metodei bisecției

Etapele parcurse pentru determinarea unei soluții care să aproximeze rădăcina reală α sunt:

- se fac notațiile: $a_1 = a$, $b_1 = b$;

- se calculează $x^{(1)} = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$;

- dacă $f(a_1) \cdot f(x^{(1)}) < 0$, atunci: $a_2 = a_1$, $b_2 = x^{(1)}$, altfel: $a_2 = x^{(1)}$, $b_2 = b_1$;

- se calculează $x^{(2)} = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$;

- la etapa k avem: $x^{(k)} = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.

Procesul iterativ de calcul se opreşte dacă $\left|b_k - a_k\right| \le \varepsilon$ sau $\left|f(x^{(k)})\right| \le \varepsilon$, unde ε este un număr pozitiv foarte mic.

2.3 Metoda coardei

Fie ecuaţia algebrică sau transcendentă $f(x) = 0$, care pe intervalul $[a,b]$ are o rădăcină reală $x = \alpha$. Pentru determinarea soluţiei, cu o anumită eroare impusă, se înlocuieşte funcţia $f(x)$ cu un polinom de interpolare de ordinul unu de forma:

$$g(x) = a_1 x + a_2, \tag{2.15}$$

astfel încât:

$$g(a) = f(a),\ g(b) = f(b). \tag{2.16}$$

Dreapta $g(x)$ intersectează axa absciselor în punctul $x^{(1)}$ (v. fig. 2.6). Pentru aflarea lui $x^{(1)}$ este necesară determinarea constantelor a_1 şi a_2. Folosind relaţia (2.15) şi condiţiile 2.16), rezultă:

$$a_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},\ a_2 = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}. \tag{2.17}$$

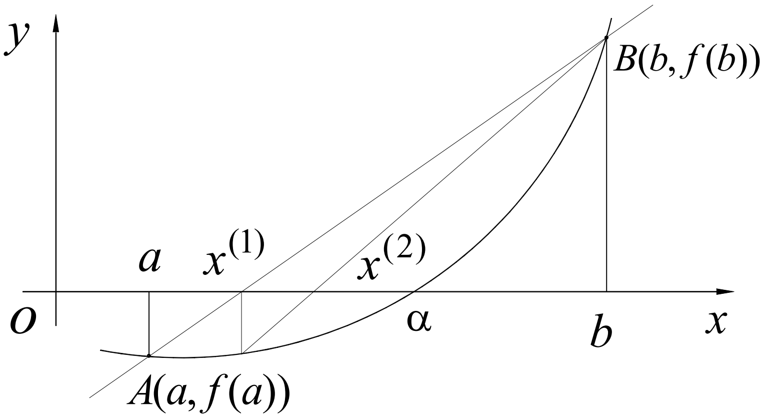

Fig. 2.6. Ilustrarea metodei coardei

După înlocuiri în relaţia (2.15), se obţine:

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}. \tag{2.18}$$

Pentru: $x = x^{(1)}$, $a_1 = a$, $b_1 = b$, rezultă $g(x^{(1)}) = 0$, şi deci:

$$x^{(1)} = \frac{a_1 f(b_1) - b_1 f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)}. \qquad (2.19)$$

În continuare, se testează dacă soluţia α se află în intervalul $[a, x^{(1)}]$ sau în intervalul $[x^{(1)}, b]$. Astfel, dacă $f(a) \cdot f(x^{(1)}) < 0$, se fac notaţiile: $a_2 = a_1$, $b_2 = x^{(1)}$, altfel: $a_2 = x^{(1)}$, $b_2 = b_1$, şi rezultă:

$$x^{(2)} = \frac{a_2 f(b_2) - b_2 f(a_2)}{f(b_2) - f(a_2)}.$$

La etapa k avem:

$$x^{(k)} = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}. \qquad (2.20)$$

Procesul iterativ de calcul se opreşte dacă: $|b_k - a_k| \le \varepsilon$ sau $|f(x^{(k)})| \le \varepsilon$, unde ε este un număr pozitiv foarte mic.

Metoda mai poartă numele de metoda părţilor proporţionale, deoarece intervalul $[a, b]$ este împărţit în părţi proporţionale cu $f(a)$ şi $f(b)$.

Exemplu: Se consideră ecuaţia:

f(x) = 0 , f(x) = 2·tg$x$ – 10·x + 3 ,

pentru care s-a separat o soluţie în intervalul [–1, 1]. Să se determine soluţia ecuaţiei utilizând metoda bisecţiei, erorile admise fiind $\varepsilon_x = 10^{-3}$ şi $\varepsilon_f = 10^{-2}$.

Soluţie: Se parcurg etapele metodei bisecţiei:

I) Iniţializări:

$r^0 = -1$, $s^0 = 1$, $|r^0 - s^0| = 2$.

Iteraţia k = 1:

II) $x^1 = \dfrac{r^0 + s^0}{2} = 0$;

III) $f(x^1) = f(0) = 3$, $f(r^0) = f(-1) = 9.885$,

$f(x^1) \cdot f(r^0) > 0 \quad \Rightarrow \quad r^1 = x^1 = 0$, $s^1 = s^0 = 1$.

$|r^1 - s^1| = 1 > \varepsilon_x$ şi $|f(x^1)| = 3 > \varepsilon_f$.

Iteraţia k = 2:

II) $x^2 = \dfrac{r^1 + s^1}{2} = 0.5$;

III) $f(x^2) = f(0.5) = -0.9074$, $f(r^1) = f(0) = 3$,

$f(x^2) \cdot f(r^1) < 0 \Rightarrow r^2 = r^1 = 0$, $s^2 = x^2 = 0.5$.

$|r^2 - s^2| = 0.5 > \varepsilon_x$ şi $|f(x^2)| = 0.9074 > \varepsilon_f \Rightarrow$

Se trece la iteraţia următoare:

Iteraţia k = 3:

II) $x^3 = \dfrac{r^2 + s^2}{2} = 0.25$;

III) $f(x^3) = f(0.25) = 1.011$, $f(r^2) = f(0) = 3$,

$f(x^3) \cdot f(r^2) > 0 \Rightarrow r^3 = x^3 = 0.25$, $s^3 = s^2 = 0.5$.

$|r^3 - s^3| = 0.25 > \varepsilon_x$ şi $|f(x^3)| = 1.011 > \varepsilon_f \Rightarrow$

Algoritmul se continuă.

Iteraţia k = 4:

II) $x^4 = \dfrac{r^3 + s^3}{2} = 0.375$;

III) $f(x^4) = f(0.375) = 0.037$, $f(r^3) = f(0.25) = 1.011$,

$f(x^4) \cdot f(r^3) > 0 \Rightarrow r^4 = x^4 = 0.375$, $s^4 = s^3 = 0.5$.

$|r^4 - s^4| = 0.125 > \varepsilon_x$ şi $|f(x^4)| = 0.375 > \varepsilon_f$.

Erorile au scăzut, însă nu suficient de mult pentru ca cele două condiţii de terminare să fie îndeplinite $\Rightarrow$ alte iteraţii.

II. REZOLVAREA SISTEMELOR DE ECUAŢII NELINIARE

1. INTRODUCERE

Rezolvarea sistemelor de ecuaţii neliniare se face, de regulă, cu ajutorul metodelor iterative. Sunt puţine cazurile când se procedează la rezolvarea analitică şi aceasta numai dacă sistemele au un număr mic de ecuaţii, iar forma acestora este deosebit de simplă.

Metodele iterative de rezolvare a sistemelor de ecuaţii neliniare cer o aproximaţie iniţială a soluţiei, iar această aproximaţie trebuie să se afle într-un domeniu restrâns al soluţiei căutate. După cum este cunoscut, un sistem de ecuaţii neliniare are mai multe soluţii, de aceea, în funcţie de aproximaţia iniţială se obţine soluţia finală. Odată soluţia finală obţinută, aceasta trebuie analizată, pentru a vedea în ce măsură răspunde cerinţelor procesului sau fenomenului analizat.

1. METODA NEWTON-RAPHSON

Fie $f_1, f_2, \cdots, f_n$, n funcţii neliniare definite pe un domeniu $X \subset R^n$, care depind de necunoscutele $x_1, x_2, ..., x_n$ şi formează sistemul de ecuaţii neliniare:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0; \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0; \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Vectorial, sistemul poate fi scris sub forma:

$$f(x) = 0,\ f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y},\ \ \mathbf{X} \subset \mathbf{R}^n,\ \mathbf{Y} \subset \mathbf{R}^n. \tag{1.2}$$

Presupunem că în vecinătatea $\mathbf{V} \subset \mathbf{X}$ există o soluţie unică α, adică $f(\alpha) = 0$.

Rezolvarea iterativă a sistemului (1.1) presupune cunoaşterea unei aproximaţii iniţiale a soluţiei finale. Fie această aproximaţie de forma: $x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \cdots,\ x_n^{(0)}$. Aproximaţia considerată nu verifică ecuaţiile sistemului (1.1), ceea ce înseamnă că:

$$\begin{cases} f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \neq 0; \\ f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \neq 0; \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \neq 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Dacă la fiecare variabilă independentă se adaugă eroarea absolută limită, se obține: $x_1 = x_1^{(0)} + \Delta x_1$, $x_2 = x_2^{(0)} + \Delta x_2$, …, $x_n = x_n^{(0)} + \Delta x_n$. In acest caz, funcțiile sistemului sunt verificate, adică:

$$\begin{cases} f_1(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) = 0; \\ f_2(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) = 0; \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Prin dezvoltarea în serie Taylor a funcțiile sistemului (1.4) şi eliminarea termenilor care conțin erorile absolute limită Δx_1, Δx_2, $\cdots$, Δx_n în afara celor de gradul unu, rezultă:

$$\begin{cases} f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) + \Delta x_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \Delta x_2 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} + \cdots + \Delta x_n \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \cong 0; \\ f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) + \Delta x_1 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} + \Delta x_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \Delta x_n \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \cong 0; \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_1 \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} + \Delta x_2 \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} + \cdots + \Delta x_n \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \cong 0, \end{cases} \tag{1.5}$$

ceea ce înseamnă că s-a obținut un sistem de n ecuații liniare în necunoscutele Δx_1, Δx_2, $\cdots$, Δx_n. Pentru rezolvarea sistemului (1.5) vom considera egalitatea cu zero. Matricea coeficienților sistemului de ecuații liniare (1.5) este:

$$W(x) = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{Vmatrix}, \tag{1.6}$$

şi poartă numele de matrice funcțională sau jacobianul sistemului de ecuații neliniare (1.1). Elementele matricei funcționale (1.6), se calculează cu aproximația inițială $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $\cdots$, $x_n^{(0)}$.

Matriceal sistemul (1.5) poate fi pus sub forma:

$$W(x^{(0)})\Delta x = -f(x^{(0)}), \tag{1.7}$$

unde $x^{(0)} = \left| x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \cdots,\ x_n^{(0)} \right|^T$.

Dacă funcţiile $f_1,\ f_2,\ \cdots, f_n$, împreună cu derivatele parţiale $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $(i,\ j) = \overline{1,n}$, sunt continue pe vecinătatea $\mathbf{V} \subset \mathbf{X}$ şi $\det W(x^{(0)})\Big|_{x^{(0)} \in \mathrm{V}} \neq 0$, atunci matricea funcţională $W(x^{(0)})$ admite o inversă $W^{-1}(x^{(0)})$ şi soluţia sistemului de ecuaţii (1.7) este:

$$\Delta x = -W^{-1}(x^{0)} f(x^{(0)}). \tag{1.8}$$

Cu notaţia: $\Delta x = x^{(1)} - x^{(0)}$, se obţine soluţia sistemului de ecuaţii neliniare (1.1) la prima iteraţie, şi anume:

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \mathrm{W}^{-1}(x^{(0)}) \cdot f(x^{(0)}). \tag{1.9}$$

La iteraţia k, soluţia este de forma:

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \mathbf{W}^{-1}(x^{(k-1)}) \cdot f(x^{(k-1)}),\quad k = 1, 2, \cdots. \tag{1.10}$$

Procesul de calcul este iterativ şi se opreşte atunci când

$$\left| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right| \leq \varepsilon, \tag{1.11}$$

unde ε este eroarea maximă admisă la calculul soluţiei sistemului dat.

1. METODA GRADIENTULUI

Fie sistemul de *n* ecuaţii neliniare (1.1). Se presupune că funcţiile sistemului şi derivatele parţiale ale acestora sunt continue în domeniul de definiţie.

Se consideră de asemenea o formă pătratică pozitiv definită

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i^2(x). \tag{1.1}$$

Soluţia *x*, a sistemului iniţial, anulează şi funcţia $F(x)$, astfel că are loc implicaţia

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) = 0. \tag{1.2}$$

Aceasta înseamnă că determinarea soluţiei sistemului $f(x) = 0$ este echivalentă cu determinarea minimului nul $x = \alpha$, pentru funcţia $F(x)$. Metoda gradientului constă tocmai în determinarea acestui minim nul. Relaţia de determinare iterativă a soluţiei este:

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \mu_{k-1} \mathbf{W}^T (x^{(k-1)}) \cdot f(x^{(k-1)}), \tag{1.3}$$

unde:

$$\mu_{k-1} = \frac{\left[f(x^{(k-1)}), \mathbf{W}(x^{(k-1)}) \cdot \mathbf{W}^T(x^{(k-1)}) \cdot f(x^{(k-1)})\right]}{\left[\mathbf{W}(x^{(k-1)}) \cdot \mathbf{W}^T(x^{(k-1)}) \cdot f(x^{(k-1)}), \mathbf{W}(x^{(k-1)}) \cdot \mathbf{W}^T(x^{(k-1)}) \cdot f(x^{(k-1)})\right]}. \quad (1.4)$$

METODA KANI

Fie sistemul de ecuaţii neliniare (1.1). În vecinătatea soluţiei, variabilele sistemului pot fi exprimate ca funcţii de un parametru τ care variază între 0 şi 1, deci:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(\tau); \\ x_2 &= x_2(\tau); \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= x_n(\tau). \end{aligned} \quad (1)$$

Pentru o aproximaţie iniţială $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, sistemul poate fi scris sub forma:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \cdot (1-\tau); \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \cdot (1-\tau); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \cdot (1-\tau). \end{cases} \quad (2)$$

La limită, când $\tau = 1$, membrii secunzi se anulează.

Dacă se derivează funcţiile sistemului (2) în raport cu parametrul τ, se obţine:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\tau} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{dx_2}{d\tau} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\frac{dx_n}{d\tau} = -f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}); \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\tau} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{dx_2}{d\tau} + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\frac{dx_n}{d\tau} = -f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\tau} + \frac{\partial f_n}{\partial x_2}\frac{dx_2}{d\tau} + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\frac{dx_n}{d\tau} = -f_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}), \end{cases} \quad (3)$$

sau sub formă matriceală:

$$\mathbf{W}(x)\frac{dx}{d\tau} = -f(x^{(o)}). \quad (4)$$

Înmulţind la stânga cu $\mathbf{W}^{-1}(x)$, se obţine:

$$\frac{dx}{d\tau} = -\mathbf{W}^{-1}(x) \cdot f(x^{(o)}), \quad (5)$$

sau:

$$dx = -\mathbf{W}^{-1}(x) \cdot f(x^{(o)}) \cdot d\tau. \quad (6)$$

Trecând la diferenţe finite, rezultă:

$$\Delta x = -\mathbf{W}^{-1}(x) \cdot f(x^{(o)}) \cdot \Delta\tau . \qquad (7)$$

Dacă se consideră $\Delta x = x^{(k)} - x^{(k-1)}$, atunci soluţia sistemului se scrie sub forma

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \mathbf{W}^{-1}(x^{(k-1)}) \cdot f(x^{(o)}) \cdot \Delta\tau , \qquad (8)$$

unde

$$\Delta\tau = 1/N , \quad k = \overline{0, N-1} .$$

Deci, pentru determinarea soluţiei sistemului de ecuaţii neliniare (1.1), se împarte intervalul $[0,1]$ în N subintervale egale, $\Delta\tau$, şi se integrează numeric pornind de la soluţia iniţială $x^{(0)}$.

Exerciţii

1. Să se găsească soluţia aproximativă a sistemului

$$\begin{cases} y^3 - 20x - 1 & = 0 \\ x^3 + xy - 10y + 10 & = 0 \end{cases}$$

situată în dreptunghiul D =[-1, 1]×[0, 2], folosind metoda aproximaţiilor succesive.

R. Considerăm $G : D \to D$ unde $G(x,y) = \begin{pmatrix} g_1(x,y) \\ g_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{y^3 - 1}{20} \\ \dfrac{x^3 + xy + 10}{10} \end{pmatrix}$

$M = (m_{ij})_{1 \le i,j \le 2} = \left(\sup\limits_{x \in D} \left| \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} \right| \right)_{1 \le i,j \le 2} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{10} \end{pmatrix}$, iar $\|M\|_\infty = \dfrac{3}{5}$, deci G

este o contracţie şi şirul aproximaţiilor succesive $x^{(p+1)} = G(x^{(p)})$ converge la soluţia sistemului.
Valorile obţinute după primele 3 iteraţii sunt trecute în tabelul de mai jos.

Numărul iteraţiei	0	1	2	3
x	0.5	-0.0437	0.00583	-0.000679
y	0.5	1.0375	0.99545	0.99993

2. Să se găsească soluţia aproximativă a sistemului

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 6x + 3 & = 0 \\ x^3 - y^3 - 6y + 2 & = 0 \end{cases}$$

situată în dreptunghiul $D = \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{6}\right] \times \left[\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{2}\right]$, folosind metoda aproximaţiilor succesive.

R. Punem sistemul sub forma $\begin{cases} x = \dfrac{x^3 + y^3}{6} + \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{x^3 - y^3}{6} + \dfrac{1}{3} \end{cases}$ şi atunci

$$G(x,y)=\begin{pmatrix} g_1(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{6}+\dfrac{1}{2} \\ g_2(x,y)=\dfrac{x^3-y^3}{6}+\dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$$ este o contracţie a lui D. Într-adevăr,

$$M=(m_{ij})_{1\le i,j\le 2}=\left(\sup_{x\in D}\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right|\right)_{1\le i,j\le 2}=\begin{pmatrix}\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\\ \left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$ iar

$\|M\|_\infty=0.47222$, deci G este o contracţie şi şirul aproximaţiilor succesive $x^{(p+1)}=G(x^{(p)})$ converge la soluţia sistemului. Considerând x_0=0.5 şi y_0=0.5 avem:

Numărul iteraţiei	0	1	2	3
x	0.5	0.54167	0.53266	0.53256
y	0.5	0.33333	0.35365	0.35115

3. Să se găsească soluţia aproximativă a ecuaţiei $e^{-x}+10x-5=0$ situată în intervalul [0, 1], folosind metoda aproximaţiilor succesive.

R. Ecuaţia se poate pune sub forma $x=\dfrac{5-e^{-x}}{10}=\varphi(x)$, unde $\varphi(x)$ este o contracţie şi şirul aproximaţiilor succesive $x=\varphi(x)$ converge la soluţia ecuaţiei. Valorile obţinute după primele 5 iteraţii sunt trecute în tabelul de mai jos.

Nr. de iteraţii	0	1	2	3	4	5
x	0	0.4	0.43297	0.43514	0.43528	0.43529

$$\left|x_5-x^*\right|\le\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{1-\frac{1}{3}}\left|x_1-x_0\right|=0.00525\ .$$

4. Să se găsească soluţia aproximativă din cadranul întâi pentru sistemul
$$\begin{cases} x_1+3\lg x_1-x_2^2 &=0\\ 2x_1^2-x_1x_2-5x_1+1 &=0\end{cases}$$
folosind metoda Newton.

R. Şirul aproximaţiilor succesive $x^{(p+1)}=x^{(p)}-J_F^{-1}(x^{(p)})F(x^{(p)})$, $p\ge 0$

unde:

$$F(x,y)=\begin{pmatrix}x_1+3\lg x_1-x_2^2\\ 2x_1^2-x_1x_2-5x_1+1\end{pmatrix},\quad J_F(x^{(p)})=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{pmatrix}.$$

Se obţin:

$$J^{-1}(x^{(0)})=\begin{pmatrix}-0.19112 & 0.25482\\ -0.31853 & 0.09137\end{pmatrix},\quad x^{(1)}=\begin{pmatrix}3.59209\\ 2.32015\end{pmatrix}\ ;$$

$$J^{-1}(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} -0.12916 & 0.16685 \\ -0.25343 & 0.049 \end{pmatrix} \quad , \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 3.49059 \\ 2.26341 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$J^{-1}(x^{(2)}) = \begin{pmatrix} -0.13672 & 0.1773 \\ -0.26238 & 0.05379 \end{pmatrix} \quad , \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 3.48745 \\ 2.26163 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$J^{-1}(x^{(3)}) = \begin{pmatrix} -0.13697 & 0.17765 \\ -0.26267 & 0.05395 \end{pmatrix} \quad , \quad x^{(4)} = \begin{pmatrix} 3.48744 \\ 2.26163 \end{pmatrix}$$

$$J^{-1}(x^{(4)}) = \begin{pmatrix} -0.13697 & 0.17765 \\ -0.26267 & 0.05395 \end{pmatrix} \quad , \quad x^{(5)} = \begin{pmatrix} 3.48744 \\ 2.26163 \end{pmatrix} \quad \text{ş. a. m. d.}$$

5. Să se găsească soluţia aproximativă ($x>0$, $y>0$) pentru sistemul

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ x^2 + y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

folosind metoda Newton.

R. Şirul aproximaţiilor $x^{(p+1)} = x^{(p)} - J_F^{-1}(x^{(p)})F(x^{(p)})$, $p \geq 0$ unde:

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y \\ x^2 + y^2 - 3x \end{pmatrix} \quad , \quad J_F(x^{(p)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} .$$

Se obţin următoarele rezultate dacă se porneşte cu $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$J^{-1}(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0.66667 & 0.33333 \\ 0.33333 & 0.66667 \end{pmatrix} \quad , \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.33333 \\ 1.66667 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$J^{-1}(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0.38961 & 0.11688 \\ 0.03896 & 0.31169 \end{pmatrix} \quad , \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.22511 \\ 1.48918 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$J^{-1}(x^{(2)}) = \begin{pmatrix} 0.44138 & 0.1482 \\ 0.08148 & 0.36311 \end{pmatrix} \quad , \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1.21353 \\ 1.47253 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$J^{-1}(x^{(3)}) = \begin{pmatrix} 0.44792 & 0.15209 \\ 0.08714 & 0.36914 \end{pmatrix} \quad , \quad x^{(4)} = \begin{pmatrix} 1.21341 \\ 1.47237 \end{pmatrix}$$

$$J^{-1}(x^{(4)}) = \begin{pmatrix} 0.44799 & 0.15213 \\ 0.0872 & 0.3692 \end{pmatrix} \quad , \quad x^{(5)} = \begin{pmatrix} 1.21341 \\ 1.47237 \end{pmatrix} \quad .$$

Bibliografie:

1. A. Chisalita, Numerical analysis, Editura UTPRES, Cluj-Napoca, 2002,
2. I Bors, Analiza numerica, Editura UTPRES, Cluj-Napoca, 2001
3. G. Coman, Analiza numerica, Ed. Libris, 1995
4. K. Atkinson, Elementary numerical analysis, John Willey&Sons, 1993

Prof. Andrei Dobre
Grupul Şcolar de Transporturi Ploieşti