Revista Mateinfo.ro ISSN 2065 – 6432 nr. februarie 2010

ALGEBRÃ

STUDIUL NUMERELOR REALE

1.FORME DE SCRİERE A UNUİ NUMÃR RAȚİONAL
2.FRACȚİİ ZECİMALE PERIODICE

LICEUL TEORETIC CALLATIS MANGALIA

1. FORME DE SCRİERE A UNUİ NUMÃR RAȚİONAL

Orice număr rațional nenegativ $\frac{m}{n}$,poate fi reprezentat sub forma unei fracții zecimale infinite:

$$\frac{m}{n} = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots$$

Numărul a_0 se numeşte *partea întreagă* a lui $\frac{m}{n}$,iar

$0, a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots$ ***partea fracționară a sa.Numerele*** $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$ ***sunt cuprinse între 0 si 9,adică*** $0 \le a_i \le 9$***,pentru i=1,2,3,…..***

EXEMPLU

Pentru numărul $\frac{5}{33} = 0{,}151\ldots\ldots$,0 este partea întreagă,iar 0,151…..este partea fracționară a sa.

$$a_0 = 0$$
$$a_1 = 1;$$
$$a_2 = 5;$$
$$a_3 = 1;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Numerele raționale negative au şi ele o astfel de reprezentare.Partea întreagă a unui număr negativ se trece cu semnul minus deasupra.

MateInfo.ro
MATEmatică şi INFOrmatică din învăţământul ROmânesc

EXEMPLU

Numărul $-\frac{5}{2}=-3+\frac{1}{2}$ se poate scrie sub forma $\bar{3},5000\ldots$

Analog $-0,321=-1+0,679000\ldots=\bar{1},679000\ldots$

TEMĂ

Să se formeze echipe de 2 sau 3 elevi şi să se rezolve în grupe exerciţiul:

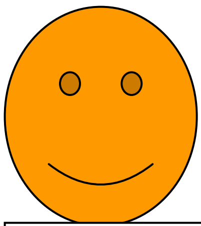
Să se scrie sub formă de fracţie zecimală infinită,numerele:

- $\frac{15}{8}$;
- $\frac{1}{4}$;
- $-\frac{1}{4}$;
- $-\frac{2}{5}$;
- $-\frac{29}{11}$;
- $-\frac{121}{16}$.

Să se precizeze partea întreagă şi partea fracţionară a fiecărui număr.

TİMP DE LUCRU 10 MİNUTE.

2. FRACȚİİ ZECİMALE PERİODİCE



DESCOPERĂ

DEFİNİTİE.O fracție zecimală infinită

$$a_0,a_1a_2a_3\cdots\cdots$$

se numeşte *periodică*,dacă există numerele naturale k şi p astfel încât $a_{n+p}=a_n$**,pentru orice n** $\leq$ **k.**

O fracție zecimală periodică se notează,pe scurt,prin

$$a_0,a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{k-1}(a_k a_{k+1}\cdots a_{k+p-1})$$

Mulțimea cifrelor scrise în această ordine în paranteză se numeşte *perioada fracției zecimale*.

Daca k=1,adică perioada începe imediat după virgulă,avem de-a face cu *[o fracție zecimală periodică simplă]*;în caz contrar avem de-a face cu *[o fracție zecimală periodică mixtă]*.

EXEMPLU

Pentru 0,333… avem k=1,p=1 si $a_{n+1}=a_n=3$,pentru orice n$\geq$1.

Scriem 0,333…=0,(3),aceasta fiind o fracție zecimală periodică simplă.

Fracțiile zecimale finite,după cum am observat pot fi considerate ca fracții zecimale infinite(prin adăugare de zerouri)sunt periodice.

EXEMPLU

Avem 0.25000…=0.25(0);

0,625,000…=0,625(0).

Acestea sunt fracții periodice mixte.

TEMÃ

Să se rezolve în grupele formate exercițiul:

Să se scrie sub formă de fracție zecimală infinită periodică,numerele:

-2/3	-29/11	-12/17	25/13	43/15

Să se precizeze partea întreagă şi partea fracționară a fiecărui număr.

TİMP DE LUCRU 10 MİNUTE.

TEOREMA 1.Orice număr rațional se reprezintă sub forma de fracție zecimală infinită periodică,care nu are perioada (9).

TEOREMA 2.Orice fracție zecimală periodică,care are perioada diferită de (9), reprezintă un anumit număr rațional,din care se obține prin algoritmul de împărțire.
1.Dacă k=1,adică fracția este periodică simplă,avem:

$$a_0,(a_1a_2\cdots a_p)=a_0+\frac{a_1a_2\cdots a_p}{\underbrace{99...9}_{p\,ori}};$$

2.Dacă k>1,adică fracția este periodică mixtă,avem:

$$a_0,a_1a_2\cdots a_{k-1}(a_k a_{k+1}\cdots a_{k+p-1}) = a_0 + \frac{a_1a_2\cdots a_{k-1}a_k a_{k+1}\cdots a_{k+p-1} - a_1a_2\ldots a_{k-1}}{\underbrace{99\ldots9}_{p\,ori}\underbrace{00\ldots0}_{(k-1)\,ori}};$$

EXEMPLE

0,(43)=43/99;

$$1{,}2(75) = 1 + \frac{275-2}{990} = 1 + \frac{273}{990} = 1 + \frac{91}{330} = \frac{421}{330};$$

sau

1,2(75)=(1275-12) /990=1263/990=421/330;

$$-5{,}0(3) = -(5 + \frac{3}{90}) = -(5 + \frac{1}{30}) = -\frac{151}{30};$$

sau

-5,0(3)=-(503-50)/90=-453/90=-151/30.

OBSERVAȚİE:0,(9)=1=1,000…=1,(0)

TEMĂ

Să se rezolve individual exercițiul:

Să se scrie sub forma de fracție ordinară,numerele:

- **0,(3);**
- **2,45(3);**
- **0,027(45);**
- **-1,12(23);**
- **-31,(35).**

TİMP DE LUCRU 15 MİNUTE

NUMERE REALE CA FRACȚİİ ZECİMALE İNFİNİTE

1 **Nu există nici un număr rațional al cărui pătrat să fie 2.**

Presupunem prin absurd că există un număr rațional $\frac{m}{n}$ **astfel încât** $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$**.Putem presupune că fracția** $\frac{m}{n}$ **este ireductibilă,adică m şi n sunt numere întregi prime între**

ele.Din $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ rezultă $m^2 = 2n^2$.Cum $2n^2$ este par,atunci şi m^2 este număr par şi deci m este par.Fie m=2k,k un număr întreg.Înlocuind pe m=2k în relația precedentă ,rezultă $4k^2 = 2n^2$,de unde $2k^2 = n^2$,adică n este par.Deci m şi n sunt numere întregi pare ,ceea ce contrazice ireductibilitatea fracției $\frac{m}{n}$.Prin urmare presupunerea noastră că $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. este falsă şi deci ecuația cu coeficienți întregi $x^2 - 2 = 0$ nu are,ca soluții,numere raționale.

TEMĂ

Să se rezolve individual exercițiul:

Nu există nici un număr rațional al cărui pătrat să fie 3.

TİMP DE LUCRU 5 MİNUTE

2

Fie un triunghi dreptunghic isoscel ABC(fig.1)Fie AB=1.

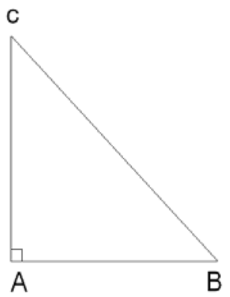


Figura 1

Să se demonstreze că nu există un număr raţional $\frac{m}{n}$ care să reprezinte lungimea lui BC,adică a n-a parte din AB să se cuprindă de m ori în BC.

Daca BC=a,rezultă că a este o rădăcină a ecuaţiei $x^2-2=0$.Notăm $a=\sqrt{2}$,care reprezintă lungimea ipotenuzei.

Am văzut că a nu este un număr raţional,deci el va fi un număr de natură nouă.Un astfel de număr,care nu este raţional îl numim *iraţional*.În acelaşi mod numerele $\sqrt{3};\sqrt{5}$ s.a. care sunt rădăcini ale ecuaţiilor $x^2-3=0$; $x^2-5=0$ s.a. sunt numere iraţionale.(există şi numere iraţionale care nu sunt rădăcini ale unor ecuaţii,de exemplu numărul π care este egal cu raportul dintre lungimea unui cerc şi diametrul său.).

***Mulţimea numerelor raţionale împreună cu mulţimea numerelor iraţionale formează mulţimea R a numerelor reale*.Deoarece $\sqrt{2}$ este număr iraţional rezultă că fracţia zecimală care-l reprezintă este o fracţie zecimală infinită neperiodică.**

Astfel orice număr real a se reprezintă printr-o fracţie zecimală infinită $a_0,a_1a_2a_3$.......

Ordonarea numerelor reale

Fie a=$a_0,a_1a_2a_3$....... şi b=$b_0,b_1b_2b_3$.......două numere reale,unde fracţiile $a_0,a_1a_2a_3$....... şi $b_0,b_1b_2b_3$.......nu au perioada (9).
Spunem că două numere sunt egale dacă oricare ar fi i=0,1,2... avem $a_i=b_i$.

DEFİNİȚİE **Spunem că numărul real $a = a_0, a_1 a_2 a_3 ....$ este mai mic decât numărul real $b = b_0, b_1 b_2 b_3 ....$ şi scriem a<b dacă există un număr natural $k \geq 0$, astfel încât $a_{ki} = b_k$ şi $a_i = b_i$ pentru orice i<k.**

În acest caz se mai spune că b este mai mare decât a şi se scrie b>a.

EXEMPLE

1. **3,9014…<4,1735…,pentru că 3<4;**
2. **3,45170…<3,45181…,pentru că 7<8;**
3. **$\overline{20},432 < 1,720..$,pentru că -20<1;**
4. **$\bar{4},232... > \bar{4},193...$,deoarece 2>1.;**
5. **3,173…>3,165…,pentru că 7>6.**

Dacă a<0 se spune că numărul real a este negativ,iar dacă a>0 atunci a se numeşte pozitiv.

LEGEA DE TRİCOTOMİE

Dacă a şi b sunt două numere reale,atunci este adevărată una şi numai una din relațiile:

a>b, a=b, a<b.

DEFİNİȚİE

Se spune că numărul real a este mai mic sau egal cu numărul real b şi scriem $a \leq b$ dacă a<b sau a=b.

Relația $"\leq"$ este o relație de ordine pe mulțimea numerelor reale:

1. $a \leq a$ (reflexivă);

2.dacă $a \leq b$ şi $b \leq a$ atunci a=b (antisimetria);

3.dacă $a \le b$ **şi** $b \le c$ **atunci** $a \le c$ **(tranzitivitatea).**

APROXİMĂRİ ZECİMALE ALE NUMERELOR REALE

Fie a un număr real oarecare reprezentat sub formă de fracţie zecimală infinită.*Aproximările (valorile aproximative) zecimale prin lipsă* ale numărului a se definesc ca fiind numerele care se obţin prin înlăturarea succesivă a tuturor cifrelor sale care stau după virgulă,începând cu prima cifră,apoi cu cea de-a doua,după aceea cu cea de-a treia ş.a.m.d.

EXEMPLU

Pentru numărul a=2,173256…,aproximările zecimale prin lipsă vor fi:2;2,1;2,17;2,173;2,1732;2,17325;..

Dacă la ultimul număr de după virgulă al fiecărei aproximări zecimale prin lipsă a numărului a se adaugă 1,atunci se obţin *aproximările(valorile aproximative)zecimale prin adaos ale numărului a.*

EXEMPLU

Pentru numărul a=2,173256… aproximările zecimale prin adaos vor fi:3;2,2;2,18;2,174;2,1733;2,17326….

Având în vedere relaţia de ordine pe mulţimea numerelor reale,primele cinci aproximări zecimale ale lui a se pot ilustra în următorul tabel:

$$2 \le a < 3$$
$$2,1 \le a < 2,2$$
$$2,17 \le a < 2,18$$
$$2,173 \le a < 2,174$$

$2{,}1732 \le a < 2{,}1733$.

Cum numărul a este cuprins între:

1) 2 si 3 şi 3-2=1;
2) 2,1 şi 2,2 şi 2,2-2,1=0,1;
3) 2,17 si 2,18 si 2,18-2,17=0,01 ş.a.m.d.

aceste aproximări zecimale sunt,respectiv,cu o eroare mai mică decât $1; 0{,}1 = 10^{-1}; 0{,}01 = 10^{-2};$ **ş.a.m.d.**

În general,pentru numărul a=$a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots$ **aproximările zecimale cu o eroare mai mică decât** 10^{-n} **sunt:**

I. ***prin lipsă :*** $a_n^{'} = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n$,

II. ***prin adaos :*** $a_n^{''} = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n + 10^{-n}$.

Avem:

$a_0^{'} \le a < a_0^{''}$***(cu o eroare mai mică decat 1)***

$a_1^{'} \le a < a_1^{''}$***(cu o eroare mai mică decat 0,1)***

$a_2^{'} \le a < a_2^{''}$***(cu o eroare mai mică decât 0,01)*……………………………………………...**

……………………………………………...

Observaţie.Este foarte important de semnalat pentru cele ce urmează că aproximările zecimale prin lipsă şi prin adaos ale unui număr real a,sunt întotdeauna numere raţionale.

ADUNAREA ŞI ÎNMULŢIREA NUMERELOR REALE

Adunarea şi înmulţirea numerelor reale se definesc folosind reprezentarea lor zecimală.
Fiind date două numere reale a şi b să considerăm aproximările zecimale prin lipsă şi adaos cu o eroare mai mică decât 10^{-n}***.Atunci pentru orice n avem:***

$a_n \le a < a_n''$,
$b_n \le b < b_n''$.

DEFİNİȚİE

Se numeşte suma numerelor reale a şi b un număr real c,care pentru orice număr natural n,satisface inegalitățile:

$$a_n' + b_n' \le c < a_n'' + b_n''.$$

Se poate demonstra că acest număr există şi este unic.

EXEMPLU

Să calculăm primele patru cifre după virgulă pentru suma numerelor $a = \sqrt{2}$ **;** $b = \sqrt{5}$ **.**

$1 \le \sqrt{2} < 2,$	$2 \le \sqrt{5} < 3,$
$1{,}4 \le \sqrt{2} < 1{,}5,$	$2{,}2 \le \sqrt{5} < 2{,}3,$
$1{,}41 \le \sqrt{2} < 1{,}42,$	$2{,}23 \le \sqrt{5} < 2{,}24,$
$1{,}414 \le \sqrt{2} < 1{,}415,$	$2{,}236 \le \sqrt{5} < 2{,}237,$
$1{,}4142 \le \sqrt{2} < 1{,}4143,$	$2{,}2360 \le \sqrt{5} < 2{,}23601$
$1{,}41421 \le \sqrt{2} < 1{,}41422$	$2{,}23606 \le \sqrt{5} < 2{,}23607$

Atunci $\sqrt{2} + \sqrt{5} = 3{,}6502...$

DEFİNİȚİE

Se numeşte produsul numerelor reale nenegative a şi b,un număr real d,care pentru orice număr natural n,satisface inegalitățile:

$$a_n' b_n' \le d < a_n'' b_n''.$$

Se poate demonstra că un astfel de număr d există şi este unic.Dacă unul sau ambele numere sunt negative,atunci se înmulțesc valorile lor absolute şi apoi se ține seama de cunoscuta regulă a semnelor şi anume:

1) produsul este pozitiv dacă ambii factori au acelaşi semn şi atunci:

ab=|a| |b|;

2) produsul este negativ dacă semnele factorilor sunt diferite şi atunci:

$$ab=-|a|\,|b|.$$

EXEMPLU

Să se găsească trei cifre după virgulă pentru produsul numerelor $a=\frac{1}{3}$ **şi** $b=\sqrt{2}$**.**

Avem a=0,3333333…şi b=1,41421…Atunci

$0 \le a < 1$	$1 \le b < 2$
$0{,}3 \le a < 0{,}4$	$1{,}4 \le b < 1{,}5$
$0{,}33 \le a < 0{,}34$	$1{,}41 \le b < 1{,}42$
$0{,}333 \le a < 0{,}334$	$1{,}414 \le b < 1{,}415$
$0{,}3333 \le a < 0{,}3334$	$1{,}4142 \le b < 1{,}4143$

Deci

$$0 \le ab < 2$$
$$0{,}42 \le ab < 0{,}6$$
$$0{,}4653 \le ab < 0{,}4828$$
$$0{,}47062 \le ab < 0{,}47261$$
$$0{,}47135286 \le ab < 0{,}47152762$$

Astfel am obținut:

$$ab=0{,}471\ldots$$

Proprietățile adunării şi înmulțirii numerelor reale.Proprietățile inegalităților

Adunarea pe mulțimea R a numerelor reale are proprietățile:

1. este comutativă:

$$a+b=b+a, \forall a,b \in R$$

2. este asociativă:

$$(a+b)+c=a+(b+c), \forall a,b,c \in R$$

3. numărul 0 este element neutru pentru adunare,adică:

$$a+0=0+a=a, \forall a \in R$$

4. orice număr real a are un opus,care este –a,adică:

$$a+(-a)=(-a)+a=0, \forall a \in R$$

Observaţie.În loc de a+(-b) vom scrie a-b.

Înmulţirea numerelor reale are proprietăţile:

1. este comutativă:

$$ab=ba, \forall a,b \in R$$

2.este asociativă:

$$(ab)c=a(bc), \forall a,b,c \in R$$

3.numărul 1 este element neutru pentru înmulţire,adică:

$$a1=1a=a, \forall a \in R$$

4.orice număr real a diferit de zero are un invers,care este a^{-1},adică:

$$a a^{-1} = a^{-1} a = 1 ;$$

5.este distributivă faţă de adunare,adică:

$$a(b+c)=ab+ac$$

$$(a+b)c=ac+bc$$

Proprietăţi ale inegalităţilor

1. dacă a<b atunci a+c<b+c,oricare c număr real;

2. dacă a<b şi c>0,atunci ac<bc;

3. dacă $a<b$ şi $c<0$, atunci $ac>bc$;
4. dacă $a<b$ şi $c<d$, atunci $a+c<b+d$ şi $a-d<b-c$;
5. dacă $a,b,c,d>0$ astfel încât $a<c$ şi $c<d$, atunci $ac<bd$. În aceleaşi condiţii avem şi $\frac{a}{d}<\frac{b}{c}$.

Acelea şi proprietăţi sunt valabile şi pentru relaţia $\leq$.

İNTERPRETAREA GEOMETRİCA A NUMERELOR REALE

Fie d o dreaptă oarecare pe care fixăm un punct O numit origine şi sensul pozitiv de la stânga la dreapta.Originea împarte dreapta d în două semidrepte (Ox semiaxa pozitivă şi (Ox' semiaxa negativă.Fie 1=OU ca unitate de măsură.

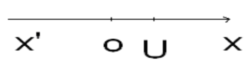


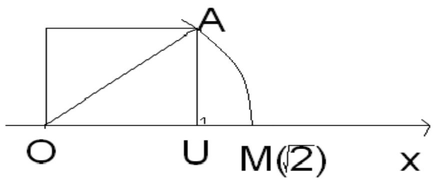
figura 2

Există astfel o funcție bijectivă care asociază oricărui număr real un unic punct pe dreaptă.

Exercițiu.Să se construiască pe dreapta d,cu ajutorul riglei şi compasului,numărul $\sqrt{2}$.

Soluție:

Se construieşte pătratul de latură OU=1.Conform teoremei lui Pitagora,$OA^2 = OU^2 + AU^2$=1+1=2.Deci $OA = \sqrt{2}$.Cu ajutorul compasului se construieşte $OM = OA = \sqrt{2}$.



Figură 3

Bibliografie

1. Manuale alternative 2002-2009
2. Nastasescu, Nita-Exercitii de matematica pentru liceu, EDP 2003