Media integrală a unei funcţii şi aplicaţii

de Florin Antohe

Scopul acestui **studiu** este de a introduce noţiunea de medie integrală într-un punct, de a ilustra câteva proprietăţi ale acesteia şi de a aplica apoi tehnica de lucru dată de această noţiune la rezolvarea unei probleme, cu scopul declarat de a-i scoate în evidenţă vituţile creatoare. Vom obţine astfel câteva rezultate mai generale legate de o clasă de ecuaţii funcţionale.

Problema 1. Fie f :$[0\,;\infty)\rightarrow[0\,;\,\infty)$ o funcţie crescătoare cu proprietatea că există a$\in(0\,;1)$ astfel încât : $\int_0^x f(t)dt=\int_0^{ax} f(t)dt$ $\forall$ x$\in[0\,;\,\infty)$. (1)

Să se arate că f(x)=0 , pentru orice x$\in[0\,;\,\infty)$.

Soluţia 1.

Fiind monotonă , f este integrabilă pe orice interval [0,x] , x>0 (adică este local integrabilă). Efectuând schimbarea de variabilă $u(t)=\frac{t}{a}$ în integrala din membrul drept al relaţiei (1) obţinem că:

$$\int_0^{ax} f(t)dt=a\int_0^{x} f(at)dt$$

şi deci (1) devine: $\int_0^x [f(t)-af(at)]dt=0$, $\forall$ t$\in[0\,;\,\infty)$.

Deoarece a$\in(0\,;1)$ rezultă că at$\le$t , $\forall$ t$\in[0\,;$x] şi folosind faptul că f este crescătoare deducem că $f(at)\le f(t)\Leftrightarrow -f(at)\ge -f(t)$ şi deci:

$$f(t)-f(at)\ge(1-a)f(t)\ ,\ \forall\, t\in[0\,;\,x].$$

Folosim acum monotonia integralei în raport cu integrandul şi rezultă:

$$0=\int_0^x [f(t)-af(at)]dt\ge(1-a)\int_0^x f(t)dt. \qquad (2)$$

Fie $t_0\in[0,x)$. Atunci, cum f(t)≥ 0, $\forall$ t$\in[0\,;\infty)$, avem:

$$\int_0^x f(t)dt=\int_0^{t_0} f(t)dt+\int_{t_0}^x f(t)dt\ge\int_{t_0}^x f(t)dt\,, \qquad (3)$$

dar f este crescătoare şi deci f(t)$\ge$f(t_0) , $\forall$ t$\in[t_0$,x] , de unde deducem că :

$$\int_{t_0}^x f(t)dt\ge f(t_0)\cdot(t-x_0)$$

şi atunci din (2) şi (3) rezultă că $(1-a)\cdot(t-x_0)\cdot f(t_0)\le 0$

Cum 1-a>0 , t-x_0>0 si f(t_0)≥ 0, rezultă f(t_0)=0 şi cum x, t_0 au fost luate arbitrar rezultă că f(x)=0 , $\forall$ x$\in[0\,;\infty)$.

Soluția 2.

Faptul că f este integrabilă, ne asigură că $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, $x\in[0\,;\infty)$. este o funcție continuă (4) .

În plus, F(0)=0. Relația (1) se scrie acum :

$$F(x)=F(ax)$$

din care obținem că :

$F(x)=F(ax)=F(a^2x)=...=F(a^nx)$, $\forall\, n\in N$, $\forall\, x\in[0\,;\infty)$. şi deci :

$$F(x)=\lim_{n\to\infty}F(a^nx).$$

Dar $a^nx\to 0$, cand $n\to\infty$, $\forall\, x\in[0\,;\,\infty)$, iar F este continuă în zero , ceea ce înseamnă că : $\lim_{n\to\infty}F(a^nx)=F(0)=0$ şi deci F(x)=0 , $\forall\, x\in[0\,;\,\infty)$.

Prin urmare : $\int_0^x f(t)dt=0$, $\forall\, x\in[0\,;\,\infty)$. Luăm $t_0\in[0,x)$ şi atunci , cum f este crescătoare obținem : $0=\int_0^x f(t)dt=\int_0^{t_0} f(t)dt+\int_{t_0}^x f(t)dt\geq\int_{t_0}^x f(t)dt\geq(x-t_0)\cdot f(t_0)$.

Observație : Prima întrebare pe care putem să ne-o punem este dacă concluzia acestei problemei rămâne valabilă şi în cazul în care f este descrescătoare. Cu soluția 1 nu putem da răspuns , dar soluția 2 se adaptează astfel.

Integrabilitatea lui f şi deci continuitatea lui F se păstrează şi în situația în care f este descrescătoare. Prin urmare obținem în mod analog că :

$$\int_0^x f(t)dt=0\ ,\ \ \forall\, x\in[0\,;\,\infty).$$

şi cum f este descrescătoare avem :

$$\int_0^x f(t)dt\geq x\cdot f(x),\ \forall\, x\in[0\,;\,\infty).$$

din care obținem : $x\cdot f(x)\leq 0$, $\forall\, x\in[0\,;\,\infty)$, relație adevărată pentru x>0 numai dacă f(x)=0.

Aşadar am obținut în acest fel o nouă problemă.

Problema 2. Fie $f:[0\,;\infty)\to[0\,;\,\infty)$ o funcție descrescătoare cu proprietatea că există $a\in(0,1)$ astfel încât $\int_0^x f(t)dt=\int_0^{ax} f(t)dt$ $\forall\, x\in[0\,;\,\infty)$. Atunci f(x)=0 , $\forall\, x\in[0\,;\,\infty)$.

Observație : Spre deosebire de cazul în care f este crescătoare, aici nu mai avem în general f(0)=0 , dar problema rămâne totuşi interesantă. S-ar părea că soluția 2 care ne-a permis obținerea acestei probleme este mai generală decât soluția 1.

În continuare prezentăm adevărata problemă sursă :

Problema 3. Fie $a,b\in(0\,;\,\infty)$ cu a+b<1 şi $f:[0\,;\,\infty)\to[0\,;\,\infty)$ o funcție crescătoare astfel încât :

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^{ax} f(t)dt + \int_0^{bx} f(t)dt \ , \ \forall \ \mathbf{x} \in [\mathbf{0} \ ; \ \infty).$$

Să se arate că f(x)=0 , pentru orice x $\in$ [0 ; ∞).

Rezolvare :
Folosind argumentele de la rezolvarea problemei 1 şi ideea din soluția 2 , din (4) rezultă :

$$F(x) = F(ax) + F(bx) \ , \qquad \forall \ x \in [0 \ ; \ \infty). \qquad (5)$$

care este o ecuație funcțională mai greu de prelucrat decât cea obținută la problemele 1 şi 2. Vom încerca să o abordăm prin cealaltă metodă. Obținem din (4) că :

$$\int_0^x [f(t) - af(at) - bf(bt)]dt = 0 \ , \ \forall \ x \in [0 \ ; \ \infty).$$

şi luând $t_0 < x$ arbitrar , va rezulta că :

$$f(t) - af(at) - bf(bt) \geq (1-a-b) f(t) \text{ şi deci :}$$

$$\int_0^x [f(t) - af(at) - bf(bt)]dt \geq (1-a-b)\int_0^x f(t)dt \geq (1-a-b)\int_{t_0}^x f(t)dt \geq (1-a-b)(x-t_0)\cdot f(t_0) \ ,$$

adică $f(t_0) = 0$, căci 1-a-b>0 , $x - t_0 > 0$.

Media integrală a unei funcții

Fie f :$[0,\infty) \to \mathbf{R}$ o funcție local integrabilă, adică o funcție integrabilă în sens Riemann pe orice interval de forma [0,x], cu $0<x<\infty$. Media integrală a funcției f pe intervalul $[a,b] \subset [0 \ ; \ \infty)$ este , prin definiție :

$$\mu[f] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

în timp ce funcția $\mu_c[f](x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$, $0<x<\infty$, se numeşte media integrală Cesaro a funcției f. Media integrală apare în teoremele de medie pentru integrala Riemann : dacă f este continuă atunci există $c \in [a,b]$, astfel încât $\mu[f] = f(c)$.

Media integrală Cesaro este o transformare integrală care conservă monotonia pentru anumite clase de funcții.

Ex: Dacă f:$[0,\infty) \to \mathbf{R}$ este continuă şi monotonă şi $\mu_c[f] : (0;\infty) \to \mathbf{R}$ este media integrală Cesaro a lui f , atunci $\mu_c[f]$ este monotonă şi are acelaşi tip de monotonie cu f. Proprietatea rămâne valabilă şi dacă f nu este continuă.

Vom considera în continuare valoarea limită a mediei integrale , noțiune care ne va fi utilă la rezolvarea problemei 3.

Definiție: Fie f:I$\to$**R** o funcție local integrabilă. Funcția M_f :I$\to \overline{R}$ **.**

$$M_f(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt \ , \ \forall \ x_0 \in \mathrm{I} \ ,$$

în ipoteza că limita există , se numeşte media integrală (la dreapta) a lui f în x_0.

Este clar că media integrală a lui f în x_0 este limita mediei integrale a lui f pe intervalul $[x_0,x]$, limită calculată când x tinde la x_0 , cu valori mai mari decât x_0.

Observații :

1. Noțiunea de medie integrală într-un punct este uşor improprie. Ea este de fapt derivata primitivei funcției f.

2. Deoarece functia f este local integrabilă , rezultă că funcția $F : I \to \mathbf{R}$,

$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$, $x \in I$ este continuă pe I şi deci :

$$M_f(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt.$$

Teorema 1. Fie $I \subset R$ un interval , $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție local integrabilă şi $\overline{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin :

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), x\in I \\ 0, x \notin I \end{cases}$$

Atunci f admite primitive pe I dacă si numai dacă : $M_{\overline{f}}(x) = f(x)$, $\forall x \in I.$

Demonstrație :

"$\Rightarrow$" Fie f o primitivă a lui f pe I. Atunci F'=f şi $\forall x \in I.$ cu $[x-\eta, x+\eta] \subset I$ avem , cu formula Leibniz-Newton , $\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(x)dxdx = \frac{1}{h}[F(x+h)-F(x)],\ \forall 0<|h|<\eta$, deci :

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(x)dx = \lim_{\substack{h\to 0\\ 0<|h|<\eta}}\frac{1}{h}[F(x+h)-F(x)] = F'(x) = f(x).$$

Dacă $x_0 \in I$ şi $x_0 = \inf I$ (respectiv $x_0 = \sup I$) se procedează în mod asemănător.

"$\Leftarrow$"Fie $a \in I$ fixat şi $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt, x \in I.$ Atunci :

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_{a}^{x+h} f(t)dt - \int_{a}^{x} f(t)dt\right] = \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)dt, \forall x, x+h \in I. \qquad \text{şi} \qquad M_{\overline{f}}(x) = f(x)$$

înseamnă că $\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = M_f(x) = f(x),\ \forall x \in I.$

deci F este derivabilă în x şi F'(x)=f(x), adică F(x) este o primitivă a lui f pe I.

Demonstrația este completă.

Corolarul 1. Dacă $f : I \to \mathbf{R}$ este local integrabilă şi admite primitive atunci $M_f(x) = f(x), \forall x \in I.$

Teorema 2. Fie $f : I \to \mathbf{R}$ monotonă şi $x_0 \in I$. Atunci :

a) dacă f este crescatoare : $f(x_0) \le M_f(x_0) \le f(x_0+0);$

b) dacă f este descrescatoare : $f(x_0) \ge M_f(x_0) \ge f(x_0+0);$

Demonstrație:
Tratăm doar cazul a) , pentru b) procedându-se analog.
Fiind crescătoare, f este local integrabilă. Pentru orice $x \in [x_0, x]$ avem:

$$f(x_0) \le f(t) \le f(x)$$

deci : $$f(x_0)\cdot(x-x_0) \le \int_{x_0}^{x} f(t)dt \le f(x)\cdot(x-x_0), x > x_0$$

adică $f(x_0) \le \frac{1}{(x-x_0)}\int_{x_0}^{x} f(t)dt \le f(x)$ de unde prin trecere la limită obținem inegalitatea din enunț.

Corolarul 2. Dacă f este continuă (la dreapta) în x_0 atunci $M_f(x_0) = f(x_0)$.

Demonstrație. Punând $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt, x \ge x_0$, atunci F este derivabilă la dreapta în x_0 şi :

$$M_f(x_0) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = F'_d(x_0) = f(x_0).$$

Observație. În demonstrația teoremei 2 mai trebuia arătat că, în cazul în care f este monotonă pe I, media integrală există în orice punct $x_0 \in I$.
Conform corolarului 2, trebuie să demonstrăm că afirmația este valabilă pentru $x_0 \in I$ cu proprietatea că f nu este continuă în x_0. Are loc :

Propoziție : Dacă f :I$\to$**R** este monotonă , atunci $\forall x_0 \in I$, există $M_f(x_0)$.
Demonstrație : Funcția f fiind monotonă, ea este local integrabilă, adică f este integrabilă pe $[x_0, x]$, pentru orice $x > x_0$, $x \in I$. conform criteriului Lebesgue de integrabilitate Riemann , f fiind continuă a.p.t pe $[x_0, x]$.
Fie x_0 un punct de discontinuitate al lui f. Cum f este monotonă, f are numai discontinuități de prima speță , adică f are limite laterale (finite) în x_0.
Considerăm $\overline{f} : [x_0, x] \to \mathbf{R}$, $\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), x \in (x_0, x] \\ f(x_0+0), x = x_0. \end{cases}$

Atunci : $\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{x_0}^{x} \overline{f}(t)dt$ şi deci $M_f(x_0) = M_{\overline{f}}(x_0)$, în ipoteza că aceasta din urmă există.
Dar $\overline{f}$ este continuă la dreapta în x_0 şi deci, pe baza corolarului 2 , $M_{\overline{f}}(x_0)$ există şi este egală cu $f(x_0+0)$.

Propoziția 2. a) Dacă f≥ 0 , atunci $M_f \ge 0$;

b) Dacă f este pozitivă şi monotonă atunci şi M_f este monotonă şi are aceeaşi monotonie cu f.

Demonstraţie :
a) Este evident ;
b) Fie f crescătoare şi $x_1 \le x_2$. Alegem h>0 astfel încât $x_1 + h \le x_2$. Pentru $t \in [x_1, x_1 + h]$, $x \in [x_2, x_2 + h]$ avem :

$$f(t) \le f(x_1 + h) \le f(x_2) \le f(u) \le f(x_2 + h)$$

şi deci :

$$\int_{x_1}^{x_1+h} f(t)dt \le h \cdot f(x_2) \le \int_{x_2}^{x_2+h} f(u)du,$$

adică $\frac{1}{h}\int_{x_1}^{x_1+h} f(t)dt \le \frac{1}{h}\int_{x_2}^{x_2+h} f(u)du$,

de unde rezultă $M_f(x_1) \le M_f(x_2)$, c.c.t.d.
Putem acum să rezolvăm problema 3 prin intermediul noţiunii de medie integrală (într-un punct).

Soluţie:

Fie x_0>0. Din (1) deducem că :

$$\int_0^{x_0} f(t)dt = \int_0^{ax_0} f(t)dt + \int_0^{bx_0} f(t)dt,$$

care scazută din (1) ne dă:
$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{ax_0}^{ax} f(t)dt + \int_{bx_0}^{bx} f(t)dt, \forall x > x_0$, adică:

$$\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \frac{a}{ax - ax_0}\int_{ax_0}^{ax} f(t)dt + \frac{b}{bx - bx_0}\int_{bx_0}^{bx} f(t)dt,$$

de unde rezultă (f este monotonă) că:

$$M_f(x_0) = aM_f(ax_0) + bM_f(bx_0) \qquad (6)$$

Deoarece M_f este crescătoare , căci f este crescătoare şi a<1 , b>1 , avem $ax_0 \le x_0$, $bx_0 \le x_0$, deci :
$M_f(ax_0) \le M_f(x_0)$ şi $M_f(bx_0) \le M_f(x_0)$ şi atunci din (6) rezultă :

$$M_f(x_0) \le (a+b)M_f(x_0) \Leftrightarrow (1-a-b)M_f(x_0) \le 0$$

şi cum a+b<1 , adică 1-a-b>0 , rezultă cu necesitate că $M_f(x_0) \le 0$.
Dar f este pozitivă şi deci $M_f(x_0) \ge 0$ ceea ce impune $M_f(x_0) = 0$.
Folosind teorema 2, punctul a) rezultă : $0 \le f(x_0) \le M_f(x_0) = 0$ ceea ce impune $f(x_0) = 0$.
Cum x_0 a fost luat arbitrar, deducem că $f(x_0) = 0$, $\forall x \in [0;\infty)$. În acelaşi mod se poate rezolva problema 2 şi următoarea problemă :

Dacă $a_1, a_2, ..., a_n \in (0;\infty)$ **cu** $a_1, a_2, ..., a_n < 1$ **şi f :[0,** $\infty) \to [0;\infty)$ **este o funcţie crescătoare astfel încât :** $\int_0^x f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{a_i x} f(t)dt$ **,** $\forall x \in [0;\infty)$ **atunci** $f \equiv 0$.

Observaţii :

1) Noţiunea de medie integrală într-un punct este improprie şi pentru faptul că , f fiind local integrabilă , este integrabilă Riemann pe orice interval [0,a] şi deci , pe baza criteriului Lebesgue de integrabilitate Riemann , f este continuă a.p.t.

Aceasta înseamnă că , exceptând o mulţime A neglijabilă, avem f continuă pe [0,a] şi deci $M_f(x)$ coincide în aceste puncte cu f(x).

De fapt, pentru $x \in [0,a] \setminus A$, $M_f(x)$ este chiar o derivată (a funcţiei F(x)=$\int_0^x f(t)dt$, care este o primitivă a lui f pe orice interval pe care f este continuă).

2) Media integrală a unei funcţii într-un punct , $M_f(x_0)$ este legată de media integrală Cesaro F(x) prin relaţia următoare:

$$M_f(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{xF(x) - x_0 F(x_0)}{x - x_0} .$$

adică M_f este derivata funcţiei $xF(x)$, unde F este media integrală Cesaro.

3) Pe baza teoremei 1 , dacă f este local integrabilă şi admite primitive pe I , atunci $M_f(x) = f(x), \forall x \in I$.

Dacă privim pe M_f ca un operator definit pe mulţimea funcţiilor local integrabile, rezultatele anterioare arată că mulţimea punctelor fixe ale lui M_f conţine clasa funcţiilor care admit primitive.

4) Putem defini media integrala într-un punct şi printr-o limită simetrică :

$$M_f(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_{x_0 - h}^{x_0 + h} f(t)dt,$$

sau printr-o limită la stânga, obţinând astfel noţiuni uşor diferite.

Indicăm în continuare şi alte probleme care pot fi rezolvate în acelaşi fel ca şi cele tratate anterior.

Problemă: Determinaţi funcţia crescătoare f:[0; $\infty) \to [0;\infty)$ **pentru care** $\int_0^{2x} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt, \forall x \in [0;\infty)$.

Problemă : Determinaţi funcţia descrescătoare f:[0; $\infty) \to [0;\infty)$ **pentru care** $\int_0^{2x} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt, \forall x \in [0;\infty)$.

Problemă: Determinaţi funcţiile crescătoare f:[0; $\infty) \to$ **R care satisfac relaţia:** $\int_x^{x^k} f(t)dt = 0, \forall x > 0,$ **unde** $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$ (fixat).

Rezolvare:

Punem F(x)=$\int_0^x f(t)dt$ şi rezultă : $F(x^k) = F(x), \forall x \in (0;\infty).$ din care obținem, pe rând ,

$$F(x) = F(x^{\frac{1}{k}})$$
$$F(x^{\frac{1}{k}}) = F(x^{\frac{1}{k^2}})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F(x^{\frac{1}{k^{n-1}}}) = F(x^{\frac{1}{k^n}})$$

$$F(x) = F(x^{\frac{1}{k^n}})$$

care conduce la F(x)=$\lim_{n\to\infty} F\left(x^{\frac{1}{k^n}}\right) = F(1), \forall x > 0.$

Atunci $M_f(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_o \\ x>x_0}} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = 0, \forall x_0 \in (0;\infty)$.

Cum f este pozitivă şi crescătoare din $0 \le f(x_0) \le M_f(x_0) = 0$ rezultă $f(x_0) = 0, \forall x_0 \in (0;\infty)$

Bibliografie :
1. Arvinte , V., Probleme elementare de calcul integral, Editura Universității Bucureşti, 1995
2. Becheanu, M ş.a (coord) Olimpiada Națională de Matematică, clasele VII-XII. Editura Paralela 45.
3. Muntean I. , Asupra mediei integrale Cesaro , Gazeta Matematică, Anul 85 (1980)
4. Sirețchi , Gh. Calcul diferențial şi integral , vol 1-2. Editura Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti , 1985.

profesor Şcoala Nichita Stănescu
str. Costache Conachi nr 2 , cod 800643
Galați , Județul Galați