

# TEOREMELE FUNDAMENTALE ALE ALGEBREI LINIARE , GEOMETRIEI AFINE ȘI GEOMETRIEI EUCLIDIENE

NECULAI STANCIU<sup>1</sup>

## 1. Introducere.

Punctul de plecare al acestui articol îl constituie un principiu emis de Felix Klein în memoriul „Considerații comparative asupra noilor cercetări geometrice”, la Erlangen, în 1872, cunoscut sub numele de Programul de la Erlangen. Cu ajutorul acestui principiu sunt definite: algebra liniară, geometria afină și geometria euclidiană cu ajutorul invarianților unui grup de transformări. Prin emiterea grupului, am identificat sistemul axiomatic ca o teorie a invarianților fundamentali (puncte, drepte, relația de incidență, de ordine, de egalitate, de paralelism, de continuitate) ai unui grup de transformări. În acest sens, ca să studiem o disciplină matematică este esențial să determinăm grupul în raport cu care noțiunile ei sunt invariante.

În elaborarea acestui articol, am ținut cont că acum la liceu, se adoptă o construcție a geometriei cu ajutorul unei axiomatizări bazată pe algebra liniară, care permite îmbinarea metodelor sintetică și analitică în studiul geometriei și ușurează înțelegerea geometriei afine și a geometriei euclidiene.

---

<sup>1</sup> Prof. , „George Emil Palade” Secondary School, Buzău, Romania;  
e-mail:stanciuneculai@yahoo.com

## 2. Algebra liniară – Teorema fundamentală

Noțiunile de spațiu vectorial, aplicație liniară precum și proprietățile acestora sunt tratate în [1] și [2]

Fie  $V$  și  $W$  două spații vectoriale peste corpul  $K$  cu

$$\dim_K V = n \text{ și}$$

$$\dim_K W = m.$$

2.1. **Teoremă** (fundamentală a algebrei liniare).

$f : V \rightarrow W$ , este aplicație liniară dacă și numai dacă ecuația ei

matricială este de forma

$$Y = AX \left( \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_m \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{array} \right), \text{ ([3], p.32)}$$

2.2. **Teoremă.** Operația de compunere determină pe mulțimea transformărilor liniare bijective ale unui spațiu vectorial  $V$  peste corpul  $K$  o structură de grup.

*Demonstratie :* Fie  $f : V \rightarrow V$ , o transformare liniară bijectivă de ecuație

$$Y = AX \text{ și } g : V \rightarrow V$$

o altă transformare liniară bijectivă de ecuație  $Z = BY$ . Avem  $Z = (BA)X$ ,

deci (a)  $g \circ f : V \rightarrow V$  este o transformare liniară,

conform teoremei 2.1. Dacă  $f : V \rightarrow V$  este dată de ecuația  $Y = AX$ ,

atunci  $X = A^{-1}Y$  și conform teoremei 2.1, avem (b)  $f^{-1} : V \rightarrow V$

este o transformare liniară.

Din (a) și (b) rezultă c.c.t.d.

2.3. **Definiție.** Grupul din teorema 2.2 se numește grupul liniar (vectorial) general al spațiului vectorial  $V$  și se notează  $GL(V)$ .

2.4. **Definiție.** Vom numi **algebra liniară** a spațiului vectorial  $V$  peste corpul  $K$ , studiul proprietăților sistemelor din  $V$  care sunt păstrate de transformările grupului  $GL(V)$ .

### 3. Geometria afină– Teorema fundamentală

Fie  $V$  un spațiu vectorial peste corpul comutativ  $K$ ,  $A$  o mulțime nevidă

și  $f : A \times A \rightarrow V$

o aplicație care asociază fiecărei perechi de elemente  $A, B \in A$

vectorul  $f(A, B)$  notat  $\overrightarrow{AB}$ ,

astfel încât: 1)  $\forall A, B, C \in A, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ; 2)  $\exists O \in A$ , astfel

încât aplicația  $f_0 : A \rightarrow V$

$f_0(A) = \overrightarrow{OA}$  este bijectivă.

3.1. **Definiție.** Aplicația  $f$  cu proprietățile de mai sus se numește **structură afină**.

3.2. **Definiție.** Mulțimea  $A$  dotată cu structura afină  $f$  se numește **spațiu afin** asociat spațiului vectorial  $V$  peste corpul  $K$ . Prin convenție elementele lui  $A$  se numesc **puncte**. Spațiul afin  $A$  asociat spațiului vectorial  $V$  peste corpul  $K$  cu structura afină  $f$  se desemnează deseori prin tripletul  $(A, V / K, f)$ .  $\dim_K A = \dim_K V$ . def

Fie  $A_1$  și  $A_2$  două spații affine asociate spațiilor vectoriale  $V_1$  și  $V_2$  peste același corp  $K$ .

3.3. **Definiție.** Se numește transformare afină a spațiului afin  $A_1$  în spațiul

afin  $A_2$  o aplicație

$\tau : A_1 \rightarrow A_2$  cu proprietatea că  $\exists O \in A_1$  astfel încât aplicația  $T : V_1 \rightarrow V_2$  dată

de  $T(\overrightarrow{OA_1}) = \overrightarrow{\tau(O)\tau(A_1)}$ ,

$\forall A_1 \in A_1$  să fie liniară. Transformarea liniară  $T$  se numește urma transformării affine  $\tau$ .

3.4. **Teorema** (fundamentală a geometriei affine)  $\tau : A_1 \rightarrow A_2$  este transformare afină dacă și numai dacă este dată de ecuația  $Y = AX + B$ . ( $\dim_K A_1 = n, \dim_K A_2 = m$ )  
([3], p. 245, [4], p. 140)

3.5. **Teoremă.** Operația de compunere determină pe mulțimea transformărilor affine bijective ale unui spațiu afin  $A$  o structură de grup ([4], p. 136).

3.6. **Definiție.** Grupul din teorema 3.5. se numește grup afin și se notează  $GA(A)$ .

3.7. **Definiție.** Se numește **geometrie afină** studiul proprietăților invariante ale spațiului afin la acțiunea grupului afin.

## 4. Geometrie euclidiană – Teorema fundamentală

Printre spațiile afine distingem o clasă importantă, spațiile punctuale euclidiene.

4.1. **Definiție.** Un spațiu vectorial real  $V$  dotat cu un produs scalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  se numește **spațiu vectorial euclidian**.

4.2. **Definiție.** Un spațiu afin  $\mathcal{E}$  asociat unui spațiu vectorial euclidian  $E$  se numește **spațiu punctual euclidian**.  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} E$ .

Fie  $E_1$  și  $E_2$  două spații vectoriale euclidiene.

4.3. **Definiție.** Aplicatia  $T: E_1 \rightarrow E_2$  se numește ortogonală dacă pastrează produsul scalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Fie  $\mathcal{E}_1$  și  $\mathcal{E}_2$  două spații punctuale euclidiene asociate spațiilor vectoriale euclidiene  $E_1$  și  $E_2$  ( $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}_1 = n$ ,  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}_2 = m$ ).

4.4. **Definiție.** O transformare afină  $\tau: \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$  se numește izometrie dacă urma sa  $T: E_1 \rightarrow E_2$  este ortogonală.

4.5. **Teoremă.**  $T: E_1 \rightarrow E_2$  este ortogonală dacă și numai dacă matricea asociată  $A$  verifică relația  ${}^T A \cdot A = I_n$

$$((*) \sum_{i=1}^m a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, j = k \\ 0, j \neq k \end{cases}, \forall j, k \in \overline{1, n})$$

([4], p. 90).

4.6. **Teorema** (fundamentală a geometriei euclidiene). Transformarea  $\tau: \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$  este izometrie dacă și numai dacă este dată de ecuația  $y = AX + B$  și matricea  $A$  verifică relația  ${}^T A \cdot A = I_n$ .

Demonstrație: rezultă imediat din definiția 4.4 și teoremele 3.4 și 4.5.

4.7. **Observații.**

a) Dacă  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}_1 = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}_2 = n$  se obține teorema fundamentală a geometriei euclidiene în spațiul punctual euclidian  $\mathcal{E}_n$ .

b) Teorema fundamentală a geometriei euclidiene plane, respectiv teorema fundamentală a geometriei euclidiene în spațiu se obține din teorema 4.6. pentru  $m = n = 2$ , respectiv  $m = n = 3$ .

c) O altă demonstrație pentru teorema fundamentală a geometriei euclidiene în spațiu se bazează pe proprietăți elementare ale izometriilor planului ([4], p. 98).

d) O altă demonstrație pentru teorema fundamentală a geometriei euclidiene în spațiu se bazează pe proprietăți elementare ale izometriilor spațiului ([4], p. 98).

4.8. **Teoremă.** Mulțimea izometriilor bijective ale unui spațiu punctual euclidian dotat cu operația de compunere constituie un grup.

**Demonstrație.** Fie  $\tau: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ , izometrie cu urma sa  $T: E \rightarrow E$ . Din teorema 3.5. compunerea a două aplicații afine bijective este o aplicație afină și în plus compunerea a două aplicații ortogonale este o aplicație ortogonală. Deci avem (a)

compunerea a doua izometrii bijective este o izometrie. Tot din teorema 3.5. inversa unei aplicații afine bijective este o aplicație afină și în plus inversa unei transformări ortogonale este o transformare ortogonală. Deci avem (b) inversa unei izometrii bijective este o izometrie.

Din (a) și (b) rezultă că mulțimea izometriilor bijective ale unui spațiu punctual euclidian dotată cu operația de compunere constituie un grup.

4.9. **Definiție.** Grupul din teorema 4.8. se numește **grupul izometriilor** spațiului punctual euclidian  $\mathcal{E}$  și se notează  $GI(\mathcal{E})$ .

4.10. **Definiție.** Se numește **geometrie euclidiană** studiul proprietăților invariante ale spațiului punctual euclidian la acțiunea grupului izometriilor (studiul acelor proprietăți care sunt păstrate de transformările grupului  $GI(\mathcal{E})$ , adică de izometrii).

## Bibliografie

[1] C. Năstăsescu, C. Niță, Gh. Grigore, D. Bulacu, *Matematică, Manual pentru clasa a XII – a, profil M<sub>1</sub>*, E.D.P. București, 2002.

[2] M. Țena, *Matematică, manual pentru clasa a XII – a, profil M<sub>1</sub>*, Ed. Gil, Zalău, 2002.

[3] N. Soare, *Curs de geometrie (Partea I)*, Tipografia Universității București, 1996.

[4] A. Turtoi – *Geometrie*, Tipografia Universității București, 1996.

[5] N.Stanciu, *Matematică gimnaziu & liceu-100 de probleme rezolvate*, Editura "Rafet", Rm. Sărat, 2007