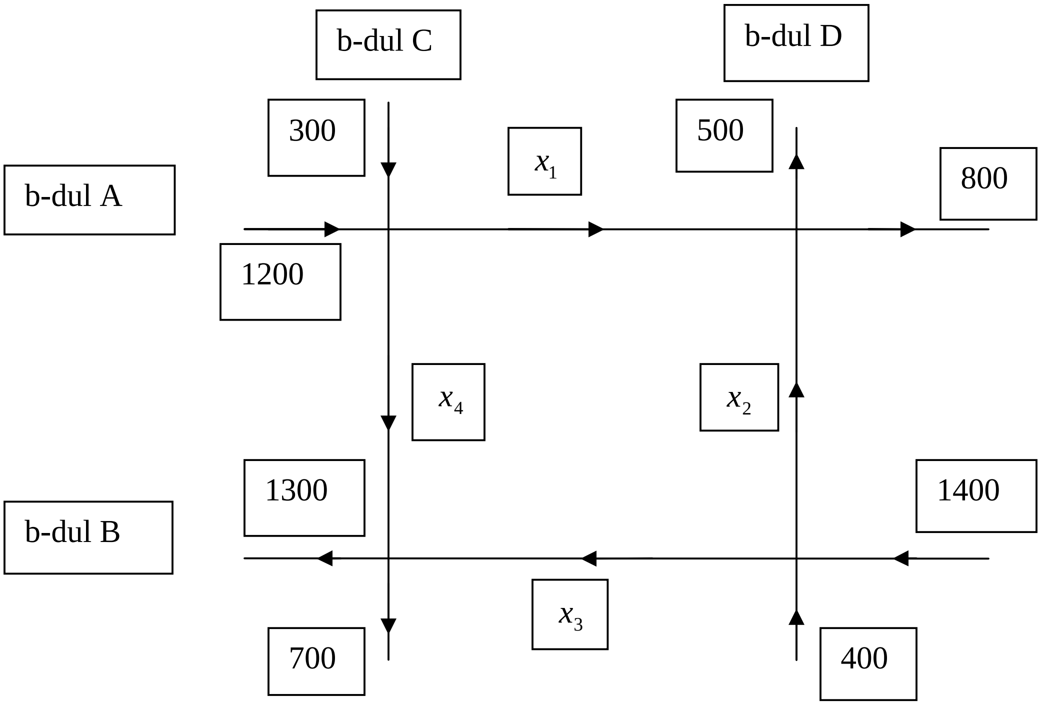
Aplicaţii practice ale sistemelor liniare

Clasa a XI –a

Problema 1. În figura de mai jos este indicat traficul dintr-o anumită zonă a unui oraş.



Săgeţile indică direcţia de deplasare a maşinilor. Numerele indicate pe figură reprezintă numărul de maşini care intră sau ies din intersecţie. La fiecare din cele patru intersecţii se află semafoare care dirijează circulaţia. Pentru a evita blocajele , toate maşinile care intră într-o intersecţie trebuie să o părăsească.

a) Să se determine x_1, x_2, x_3, x_4

b) Pentru x_4=300, determinaţi x_1, x_2, x_3.

Soluţie:

a) Deoarece toate maşinile care intră într-o intersecţie trebuie să o şi părăsească, pentru fiecare intersecţie obţinem următoarele ecuaţii:

b-dul A $\cap$ b-dul C : 300+1200= $x_1 + x_4$

b-dul A $\cap$ b-dul D : $x_1 + x_2$ =500+800

b-dul B $\cap$ b-dul C : $x_3 + x_4$ =1300+700

b-dul B $\cap$ b-dul D : 1400+400= $x_2 + x_3$

Sistemul pe care îl avem de rezolvat este: $\begin{cases} x_1 + \qquad\qquad x_4 = 1500 \\ x_1 + x_2 \qquad\qquad = 1300 \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 = 2000 \\ \qquad x_2 + x_3 \qquad = 1800 \end{cases}$, un sistem de patru ecuaţii liniare şi patru necunoscute.

Matricea sistemului şi matricea extinsă a sistemului sunt

A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1500 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1300 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2000 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1800 \end{pmatrix}$

Cum $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$=0, rang(A)=3.

Fie determinantul principal $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, deoarece determinantul caracteristic

$\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1500 \\ 1 & 1 & 0 & 1300 \\ 0 & 0 & 1 & 2000 \\ 0 & 1 & 1 & 1800 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1500 \\ 0 & 1 & 0 & -200 \\ 0 & 0 & 1 & 2000 \\ 0 & 1 & 1 & 1800 \end{vmatrix} = 0$, înseamnă că sistemul este compatibil simplu nedeterminat cu necunoscuta secundară x_4.(Teorema lui Rouche)

Luând sistemul format din ecuaţiile principale avem:

$\begin{cases} x_1 = 1500 - \alpha \\ x_1 + x_2 = 1300, \text{ unde } x_4 = \alpha, \alpha \in \Re, \\ x_3 = 2000 - \alpha \end{cases}$

Soluţia sistemului este: S={(1500-α ,α -200,2000-α),$\alpha \in \Re$ }.

b) x_4=300, obţinem soluţia

S={(1200, 100,1700,300)}.

<u>Problema 2.</u> Un teatru cu o capacitate de 300 de locuri a vândut la un spectacol toate biletele. Un bilet pentru copii costă 2 €, pentru studenţi 3 €, iar pentru adulţi 4 €. Se ştie că numărul adulţilor a fost jumătate din numărul copiilor şi studenţilor, iar la acea reprezentaţie s-au încasat 900 € . Determinaţi numărul de spectatori din fiecare categorie.

<u>Soluţie</u>

Notăm cu x- numărul de copii, cu y- numărul de studenţi şi cu z- numărul de adulţi.

Cu aceste notaţii, capacitatea de 300 de locuri a sălii de teatru, matematic se scrie :
x+y+z= 300 , suma încasată de 900 €, 2x+3y+4z= 900, iar relaţia dintre diferitele categorii de spectatori: x+y=2z.
Aşadar sistemul ce trebuie rezolvat este următorul:

$$\begin{cases} x+y+z=300 \\ 2x+3y+4z=900 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$$, cu soluţia unică x=y=z=100.

Problema 3. O fabrică de mobilă produce două tipuri de mese A şi B. Fiecare masă trece prin două etape: asamblare şi finisare. Capacitatea maximă a fabricii pentru asamblare este de 195 ore şi pentru finisare de 165 ore. Pentru fiecare masă A sunt necesare 4 ore la asamblare şi 3 ore la finisare, iar pentru masa B o oră la asamblare şi 2 ore la finisare. Determinaţi numărul de mese de fiecare tip care pot fi produse utilizând la maxim capacitatea fabricii.

Soluţie

Notând cu x numărul de mese tip A şi cu y numărul de mese de tip B , cele 195 de ore destinate asamblării sunt descrise de ecuaţia: 4x+y= 195,
iar cele 165 de ore utilizate la finisaj de ecuaţia: 3x+2y=165. Deci sistemul ce trebuie rezolvat este:

$$\begin{cases} 4x+y=195 \\ 3x+2y=165 \end{cases}$$ cu soluţia x= 45 şi y=15

Problema 4. Benzenul lichid arde în atmosferă. Dacă un obiect rece este pus peste benzen, atunci apa va condensa pe obiect şi se va depozita pe el negru de fum (carbon). Ecuaţia chimică pentru reacţie este de forma: $x_1C_6H_6+x_2O_2 \to x_3C+x_4H_2O$.
Determinaţi x_1, x_2, x_3, x_4 pentru a obţine balanţa ecuaţiei.

Soluţie: Pentru a obţine echilibrul (balanţa) ecuaţiei trebuie să alegem x_1, x_2, x_3, x_4 astfel încât numărul de atomi de carbon, hidrogen şi oxigen din cei doi membri să fie acelaşi.

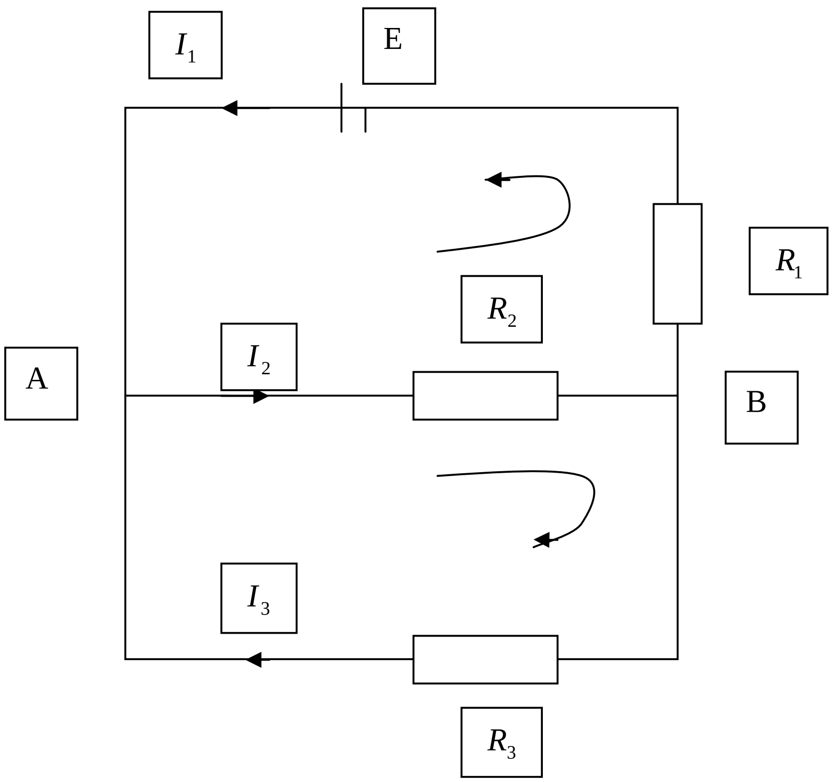
Deoarece benzenul conţine şase atomi de carbon, iar negru de fum un atom, atunci pentru egalizarea numărului de atomi de carbon trebuie să avem $6x_1=x_3$. Analog, pentru atomii de hidrogen şi oxigen obţinem ecuaţiile: $6x_1=2x_4$, $2x_2=x_4$.

Cele trei ecuaţii conduc la sistemul: $\begin{cases} 6x_1=x_3 \\ 6x_1=2x_4 \\ 2x_2=x_4 \end{cases}$.

Soluţia sistemului este $x_1=\frac{\alpha}{3}, x_2=\frac{\alpha}{2}, x_3=2\alpha, x_4=\alpha, \alpha \ge 0$.

Pentru $\alpha=3$ se obţine soluţia particulară $x_1=1$, $x_2=\frac{3}{2}$, $x_3=6$, $x_4=3$.

Problema 5. Determinaţi intensităţile curenţilor electrici din reţeaua de mai jos, dacă se cunosc E=16V, $R_1 = R_2 = R_3 = 2\Omega$.



<u>Soluţie:</u>

Observăm că reţeaua are două noduri (un nod este punctul de întâlnire a cel puţin trei laturi, iar o latură este porţiunea de circuit dintre două noduri), notate cu A şi B, cu trei laturi şi două ochiuri. Pentru curenţii din cele trei laturi şi pentru parcurgerea ochiurilor se aleg sensurile indicate în figură.

Aplicând prima teoremă a lui Kirchoff: "Suma algebrică a intensităţilor curenţilor din laturile legate într-un nod al unei reţele este nulă", adică $\sum I_k = 0$,unde I_k este intensitatea curentului din latura k, considerată cu semnul "+" dacă sensul curentului este orientat dinspre nod şi cu semnul "-" dacă sensul curentului este orientat spre nod, obţinem în nodul A ecuaţia : $-I_1 + I_2 - I_3$=0, iar în nodul B: $I_1 - I_2 + I_3$=0.

Aplicând a doua teoremă a lui Kirchoff: "Suma algebrică a tensiunilor electromotoare (imprimate) dintr-un ochi al unei reţele este egală cu suma căderilor de tensiune din laturile ochiului ", adică $\sum E_k = \sum R_k I_k$,(căderea de tensiune într-o latură se consideră pozitivă dacă sensul de parcurgere al unei laturi coincide cu cel ales pentru curentul respectiv , regulă valabilă şi pentru tensiunea electromotoare), obţinem în nodurile A, respectiv B, ecuaţiile: $2I_1 + 2I_2 = 16$, respectiv $2I_2 + 2I_3 = 0$.

Ca atare sistemul propus spre rezolvare este: $\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ 2I_1 + 2I_2 = 16 \\ 2I_2 + 2I_3 = 0 \end{cases}$ .Soluţia sistemului este:

$I_1 = \frac{16}{3} A, I_2 = \frac{8}{3} A, I_3 = \frac{8}{3} A$, deoarece se consideră valorile absolute (sensul lui I_3 fiind invers celui reprezentat în schemă se obţine pentru I_3 o valoare negativă).

Bibliografie: Mircea Ganga- Matematică, manual pentru clasa a XI-a

Prof. Bulgăr Delia –Liceul Teoretic „Trian Vuia" Făget, jud. Timiş