Revista Electronică MateInfo.ro ISSN 2065 – 6432 Nr. Aprilie 2010
www.mateinfo.ro

DEMONSTRAŢII ALE TEOREMEI LUI PITAGORA

PROPUNĂTOR:
PROF. IGNĂTESCU VIOREL OVIDIU
ŞCOALA CU CLASELE I-VIII MĂTEŞTI
COM. SĂPOCA, JUD. BUZĂU

“Matematica este calea de înţelegere a UNIVERSULUI. Numărul este măsura tuturor lucrurilor.” (Pitagora)

În realizarea obiectivelor predării geometriei un loc important îl ocupă studiul Teoremei lui Pitagora, ale cărei aplicaţii se folosesc începând cu clasa a Vll-a în toate celelalte nivele de instruire. Pitagora a fost unul dintre primii deschizători de drumuri în matematica elină. El a realizat legătura dintre mărimi şi numere, arătând cum relaţiile între mărimile unei figuri geometrice se exprimă prin relaţii între numere. Legătura dintre aritmetică şi geometrie iniţiată de Pitagora şi cultivată în continuare de câteva generaţii în şcoala ce-i poartă numele, a fost încheiată cu succes de Euclid şi consemnată pentru totdeauna în celebrele sale "Elemente". Nu vom putea pătrunde adevărurile matematice contemporane în cele mai mici detalii dacă nu vom cunoaşte în mod temeinic rezultatele matematicii antice. Acestea sunt doar câteva dintre motivele pentru care am ales să studiez această figură a matematicii antice şi în principal Teorema ce-i poartă numele şi pe care oricare om, indiferent de nivelul de instruire a auzit-o, a enunţat-o, a folosit-o.

În această prezentare am evidenţiat câteva rezultate, care prin tradiţie aparţin lui Pitagora şi mai ales Şcolii pitagoreice, pe al cărei frontispiciu era scrisă deviza "Numerele guvernează lumea". Dar acest edificiu pitagoreic bazat pe numere a început după scurt timp să se clatine şi apoi să se prăbuşească, atunci când s-a constatat că există mărimi geometrice ce nu pot fi exprimate cu ajutorul numerelor (naturale sau raţionale). Este interesant că aceste mărimi au fost găsite chiar cu ajutorul teoremei ce i se atribuie lui Pitagora.

De asemenea am prezentat cele mai reprezentative demonstraţii ale Teoremei lui Pitagora atribuite lui Pitagora, Euclid, Bhaskara, Pisano, Leonardo da Vinci şi nu ăn ultimul rând, câteva aplicaţii ale Teoremei lui Pitagora.

Începând cu Pitagora (582-500 î.e.n.) şi vestita lui şcoală în care discipolii săi au fost primii care au folosit cuvântul MATEMATICĂ cu înţeles de aritmetică şi geometrie, continuând cu Euclid (330-275 î.e.n.), Zenodor (sec. II î.e.n.), Heron din Alexandria (sec. I-II î.e.n.), Ptolemeu (sec. II), Papus din Alexandria (sec. III) şi mulţi alţi matematicieni celebri, ajungem în prezent constatând că interesul oamenilor pentru Matematică a rămas acelaşi, în permanenţă descoperindu-se câte ceva nou. **Pitagora din Samos** se presupune că a fost unul dintre primii matematicieni puri, reprezentând o figură extrem de importantă în dezvoltarea Matematicii. Puţine sunt documentele şi informaţiile sigure asupra vieţii sale, totul pierzându-se în legendă, neexistând printre lucrările matematicienilor greci, lucrări scrise care să conţină rezultate ale studiilor acestuia în domeniul matematicii, iar pentru a recunoaşte măiestria gândirii lui este necesar să ne îndreptăm asupra scrierilor discipolilor lui. Egiptenii antici cunoşteau tehnici de preparare a cărămizilor şi de construire a edificiilor cu ajutorul acestora, de unde Pitagora a câştigat cunoştinţe despre forma, dimensiunea, volumul corpurilor, despre tehnicile de măsurare şi sistemul zecimal de calcul. Tot egiptenii cunoşteau că triunghiul având laturile cu lungimi de 3, 4, 5 unităţi este dreptunghic şi câteva noţiuni elementare de trigonometrie.

Numerele erau pentru Pitagora ceva mistic, misterios, fascinant şi tocmai din cauza acestei corespondenţe ele posedau o realitate proprie de o perfecţiune şi o armonie universale. Pitagora s-a dedicat studiului geometriei, dându-i o formă de educaţie liberală, căutând principii şi investigând teoreme din punct de vedere conceptual şi teoretic, fiind primul care a stabilit incomensurabilitatea numerelor, observând că pentru diagonala unui pătrat lungimea nu poate fi exprimată printr-un număr întreg. Pitagoreicii reprezentau numerele sub forma unor puncte aşezate în diverse moduri, obţinând astfel unele figuri geometrice. Astfel apare noţiunea de numere figurative, realizându-se pentru prima oară o legătură între aritmetică şi geometrie. Fiecare punct simbolizează o unitate, un atom material, este înconjurat de un câmp gol şi nu admite nici o fracţiune. Figurile geometrice se nasc, se compun şi se descompun numai cu ajutorul numerelor întregi.

După modul cum sunt aşezate, numerele pot fi: liniare, plane sau solide, obţinând astfel geometria pe o dreaptă, geometria plană sau geometria în spaţiu. Cele mai simple numere liniare, plane sau solide sunt numerele 2, 3 şi 4. Numărul 2 determină poziţia unei **drepte**, numărul 3 determină cea mai simplă figură plană, **triunghiul**, iar 4 determină cel mai simplu corp din spaţiu: **tetraedrul.**

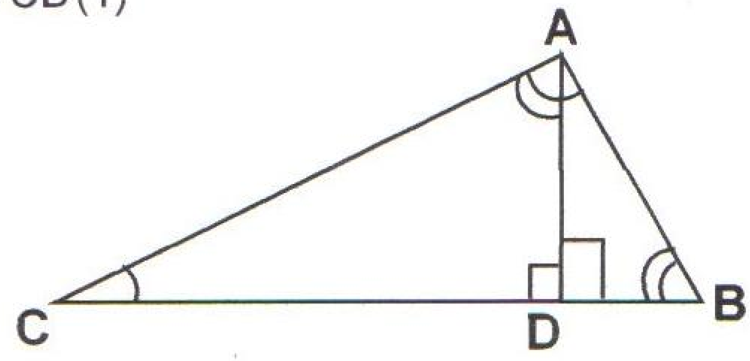
CELE MAI INTERESANTE LE VOI PREZENTA ÎN CELE CE URMEAZĂ:

V.1.Demonstrația atribuită lui Pitagora

Se presupune că una din demostrațiile acestei teoreme este atribuită lui Pitagora şi se bazează pe teoria proporțiilor.

$\Delta ADC \sim \Delta ABC$; $m(\sphericalangle ADC) = m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$, $m(\sphericalangle ACD) = m(\sphericalangle ACB)$;

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CD}{AC} \Leftrightarrow AC^2 = BC \cdot CD \ (1)$$



$\Delta ABD \sim \Delta ABC$; $m(\sphericalangle ADB) = m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$, $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ABD)$;

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DB}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = BC \cdot DB. \ (2)$$

Din (1) şi (2) prin adunare se obține:

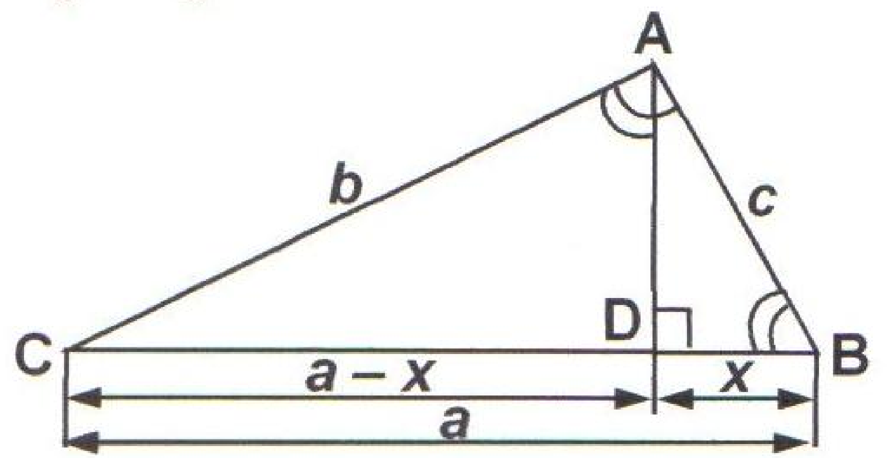
$$AB^2 + AC^2 = BC \cdot DB + BC \cdot CD = BC(DB+CD) = BC \cdot BC = BC^2$$

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2} \qquad \text{(c.c.t.d)}$$

V.2. O demonstrație bazată tot pe teoria proporțiilor este dată în lucrarea *"Ingeniozitate şi surpriză în matematică"* de Ion Ionescu în anul 1895.

$$\Delta ABC \sim \Delta ABD \Rightarrow \frac{x}{c} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow c^2 = ax \qquad \textbf{(3)}$$

$$\Delta ACD \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{a-x}{b} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow b^2 = a^2 - ax \qquad \textbf{(4)}$$



Se adună relațiile (3) şi (4):

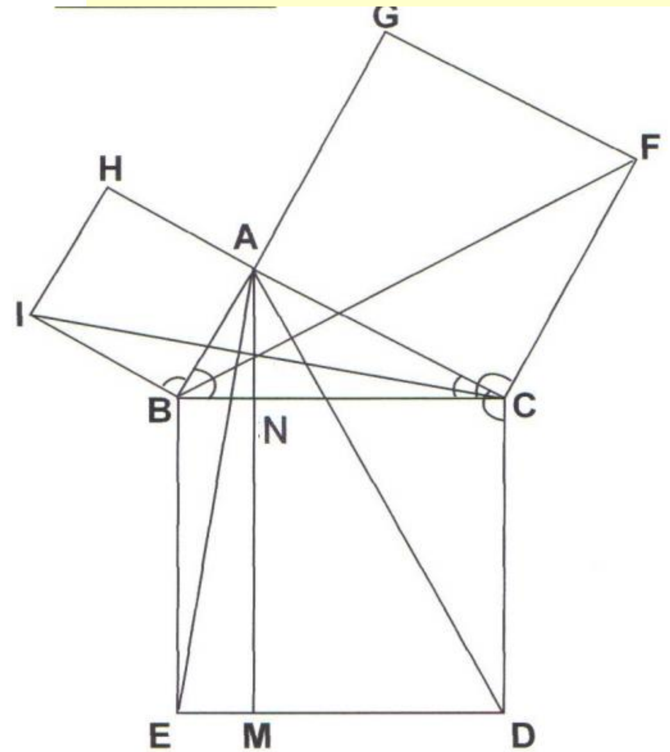
$$\boxed{b^2 + c^2 = a^2}$$ (c.c.t.d)

V.3. Demonstrația dată de Euclid în cartea I-a, teorema 47 din ELEMENTE, bazată pe echivalență de arii.

$S_{\Delta ABE} = \frac{1}{2} BE \cdot BN = \frac{1}{2} S_{BEMN}$; $S_{\Delta BCI} = \frac{1}{2} BI \cdot AB = \frac{1}{2} S_{AHIB}$

Cum $\Delta ABE \equiv \Delta BCI$; $(BC = BE;\ AB = BI;\ m(\measuredangle ABE) = m(\measuredangle IBC) = 90^o + m(\measuredangle ABC))$.

$$S_{BEMN} = S_{AHIB}. \qquad \textbf{(5)}$$



$S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} CD \cdot CN = \frac{1}{2} S_{CDMN}$

$S_{\Delta BCF} = \frac{1}{2} CF \cdot CA = \frac{1}{2} S_{CFGA}$

Cum $\Delta BCF \equiv \Delta ACD$; $(AC=CF;\ BC=CD;\ m(\measuredangle BCF) = m(\measuredangle ACD) = 90^o + m(\measuredangle ACB))$.

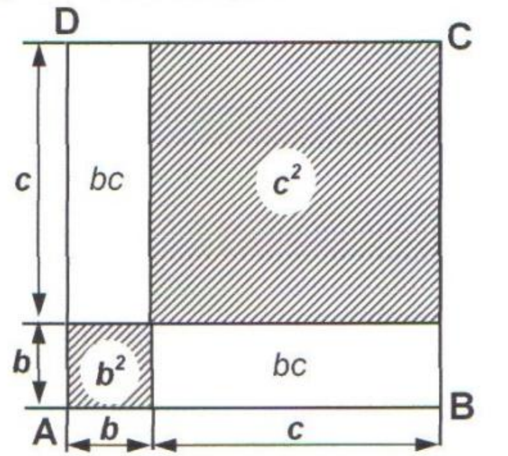
$$S_{CDMN} = S_{CFGA}. \qquad \textbf{(6)}$$

Adunând relațiile (5) și (6) obținem:

$S_{(AHIB + CFGA)} = S_{(BEMN+CDMN)} = S_{BCDE}$.

$$\boxed{AB^2 + AC^2 = BC^2} \qquad \text{(c.c.t.d).}$$

V.4. Demonstrația dată de Bhaskara Aciarya (1114-1178) în cartea lui Ciu-Pei-Suan.



Se consideră două pătrate egale ABCD şi A'B'C'D', de latură

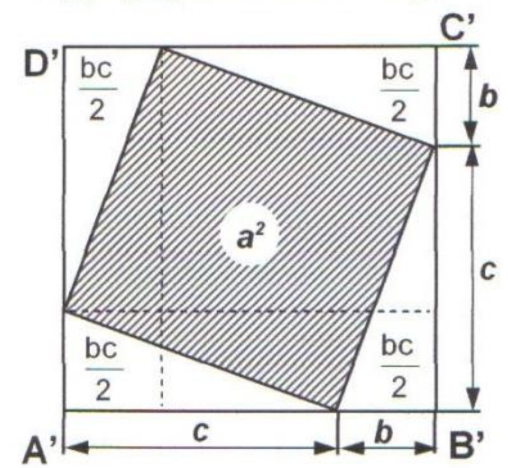
$AB = A'B' = b + c$.

Primul pătrat se descompune în:

- două dreptunghiuri egale de arie $b \cdot c$;
- două pătrate de arii b^2 şi c^2;

Al doilea pătrat se descompune în:

- patru triunghiuri dreptunghice de arie $\frac{bc}{2}$.
- un pătrat de arie a^2 construit pe ipotenuza triunghiului dreptunghic de catete b şi c.



Cum cele două pătrate au laturile egale, ariile lor sunt egale:

$S_{ABCD} = S_{A'B'C'D'}$. $\qquad b^2 + c^2 + 2bc = a^2 + 4\,\frac{bc}{2}$

$\boxed{b^2 + c^2 = a^2}$ (c.c.t.d.)

V.6. Demonstrația dată de Leonardo da Vinci (1452 -1519).

Construim pătratul BCDE pe ipotenuza BC a triunghiului dreptunghic ABC ($AB = c$, $AC = b$, $BC = a$),apoi ducem $DB' \perp AC$; $EC' \perp DB'$ şi $AA' \perp EC'$. Pătratul BCDE construit pe ipotenuza BC se descompune astfel în patru triunghiuri congruente cu triunghiul dat ABC de catete b,c şi în pătratul AB'C'A' de latură $AB' = AC - B'C = b - c$.

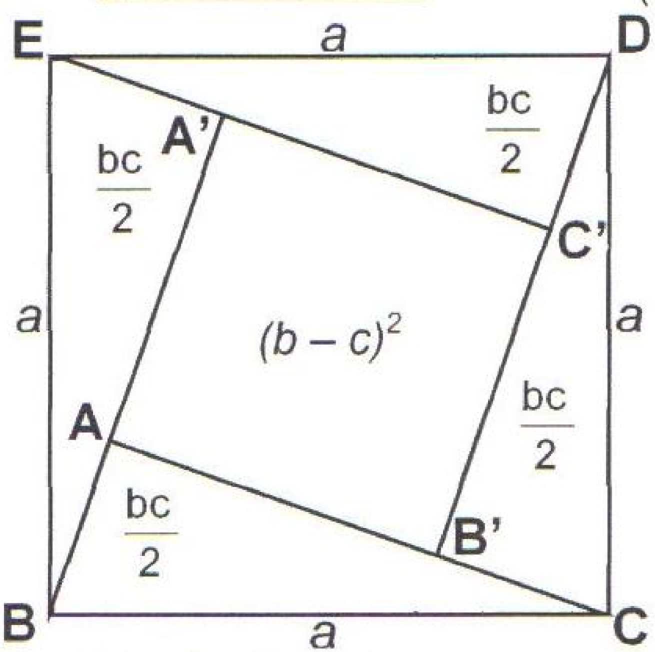
$$S_{AB'C'A'} = AB'^2 = (b - c)^2$$

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta CDB'} = S_{\Delta DC'E} = S_{\Delta EA'B} = \frac{bc}{2} \qquad S_{BCDE} = S_{AB'C'A'} + 4S_{\Delta ABC}$$

$$a^2 = (b - c)^2 + 4\frac{bc}{2} = b^2 - 2bc + c^2 + 2bc$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

(c.c.t.d.)



V.10.Demonstrația folosind metoda vectorială.

Considerăm vectorii $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ aşezați pe laturile triunghiului dreptunghic ABC $m(\sphericalangle A) = 90°$

Se ştie că suma a trei vectori care închid un triunghi este nulă:

$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = 0$$

$$\vec{b} + \vec{c} - \vec{a} = 0$$

$$\vec{b} + \vec{c} = \vec{a} \qquad (1)$$

Ridicând la pătrat în ambii membri obținem:

$$(\vec{b} + \vec{c})^2 = \vec{a}^2$$

$$\vec{b}^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c}^2 = \vec{a}^2 \quad (2)$$

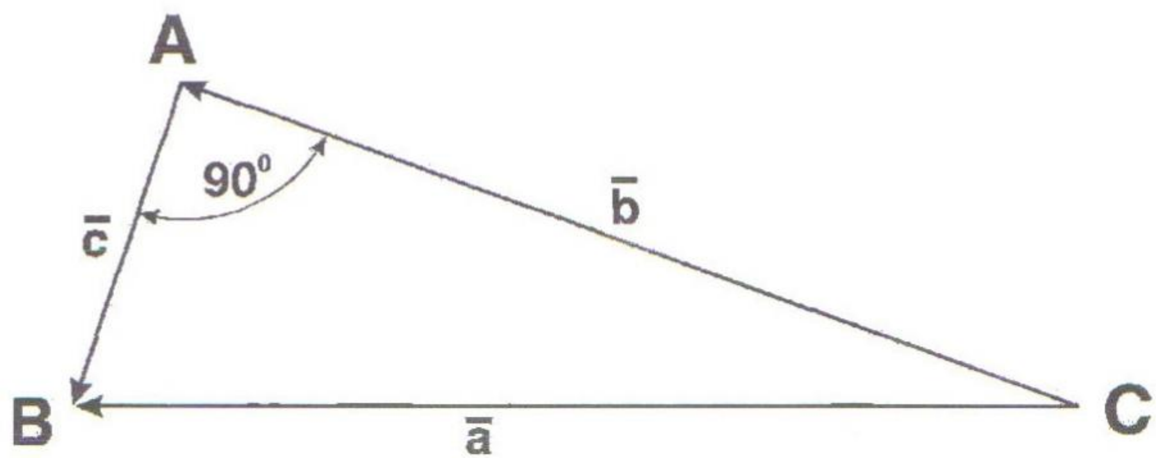
Cum produsul scalar a doi vectori $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ este:

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = |\overrightarrow{v_1}| \cdot |\overrightarrow{v_2}| \cos(\widehat{v_1, v_2}) = v_1 \cdot v_2 \cos(\widehat{v_1, v_2})$$

Relația (2) devine:

$$b \cdot b + 2 \cdot b \cdot c \cos 90° + c \cdot c = a \cdot a$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2} \qquad \text{(c.c.t.d)}$$

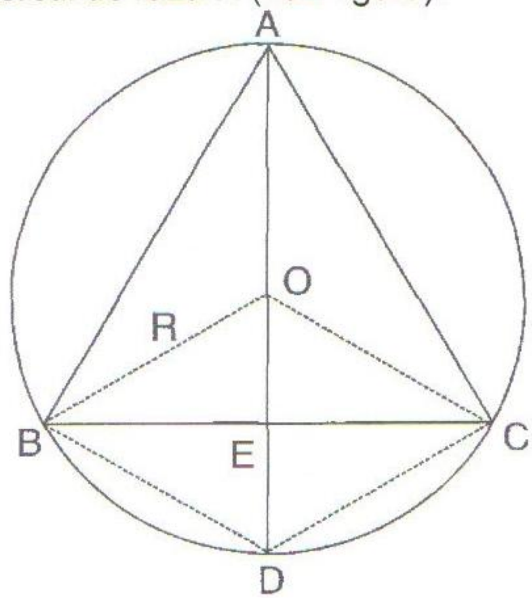


Dintre aplicaţiile Teoremei lui Pitagora, le-am ales pe cele mai des întâlnite în gimnaziu: latura şi apotema poligoanelor regulate înscrise în cerc şi puterea punctului faţă de cerc.

10. Latura şi apotema triunghiului echilateral înscris în cerc.

Fie ABC un triunghi echilateral înscris în cercul da rază R.

Se împarte cercul în 6 părți cu ajutorul razei, apoi unim punctele de diviziune din două în două. Se obține astfel triunghiul echilateral ABC înscris în cercul de rază R (vezi figura).



Dacă notăm $AB = l_3$, $AD = 2R$, $BD = R$, $OE = a_3$, teorema lui **Pitagora** aplicată în triunghiul ABD

($A\hat{B}D = 90°$) ne dă:

$$AB^2 = AD^2 - BD^2,$$

$$l_3^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2,$$

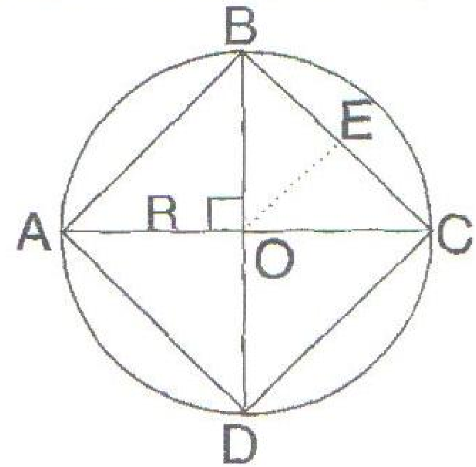
$$l_3 = R\sqrt{3}.$$

Patrulaterul OBDC fiind romb având laturile egale cu raza ($OB = CO = BD = CD$), diagonalele se taie în părți egale, și deci

$$OE = \frac{1}{2} OD, \quad a_3 = \frac{R}{2}.$$

11. Latura şi apotema pătratului înscris în cerc.

În cercul cu centrul O se duc două diametre perpendiculare ($AC \perp BD$).
Dacă notăm $AB = l_4$, $OE = a_4$,
în triunghiul AOB (din figura alăturată)
teorema lui **Pitagora** ne dă:

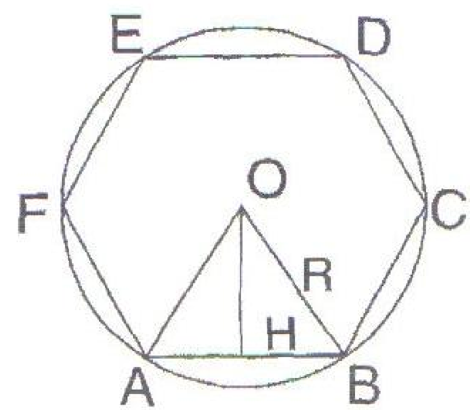


$$AB^2 = AO^2 + OB^2,\ l_4^2 = R^2 + R^2 = 2R^2,\ l_4 = r\sqrt{2}$$

$$OE = \frac{1}{2}DC,\ a_4 = \frac{l_4}{2};\ a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

12. Latura şi apotema hexagonului regulat înscris în cerc.

Din figura alăturată se constată că $m(A\hat{O}B) =$ $60°$;
$m(O\hat{A}B) = m(O\hat{B}A) = 60°$.
Triunghiul AOB este echilateral şi
deci $AB = AO = BO = R$, $l_6 = R$.



Dacă ducem $OH \perp AB$,
din triunghiul AOH ($A\hat{H}O = 90°$),

teorema lui **Pitagora** ne dă:

$$OH^2 = OA^2 - AH^2,\ a_6^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4},\ a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

CONCLUZII

Teorema lui Pitagora este una din cele mai frumoase lecţii de geometrie. Elevii sunt stimulaţi de forma clară, concisă a teoremei, uşor de reţinut şi de aplicat, fiind una din teoremele pe care şi le amintesc peste ani. Totodată, aplicaţiile ce folosesc această teoremă pot fi de un grad de dificultate foarte variat plecând de la simplu la complex şi având un caracter practic ridicat, ceea ce contribuie la o bună înţelegere de către un număr mare de elevi.

Din punct de vedere metodic, Teorema lui Pitagora permite o abordare atât clasică, dar şi prin perspectiva metodelor moderne. Din experienţa de la clasă, am constatat că alternarea metodelor tradiţionale de predare cu metodele interactive, duce la creşterea randamentului elevilor. Aceleaşi conţinuturi, prezentate într-o formă mai atractivă, favorizează participarea activă la lecţie şi o bună socializare în colectivul clasei, ducând la asumarea rolurilor şi valorizarea potenţialului fiecărui elev, indiferent de nivelul de pregătire. Dintre metodele interactive ce se pretează a fi aplicate în predarea lecţiei “Teorema lui Pitagora” sunt: mozaicul, cubul, ciorchinele, ştiu-vreau să ştiu-am învăţat, e.t.c.

BIBLIOGRAFIE

1. Diogenes Laerţios

Despre vieţile şi doctrinele filozofilor (vol. I;II) – Editura Minerva, Bucureşti, 1997

2. Mica enciclopedie matematică

Editura Tehnică, Bucureşti, 1990

3. N. Mihăileanu

Istoria matematicii – Editura Enciclopedică Română, Bucureşti, 1974

4. Ion Purcaru; Octavian Bască

Oameni, idei, fapte din istoria matematicii – Editura Economică, 1996

5. **Dana Radu; Eugen Radu**

Matematică – Manual pentru clasa a VII-a, Editura Teora