DESPRE VALORILE UNUI POLINOM – DETERMINANTUL CICLIC DE ORDIN n.

OLÁH CSABA, GRUP SCOLAR „LIVIU REBREANU”, BALAN

Fie funcţia polinomială $g(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+...2x+1,\ n\in N, n\geq 2$, $\varepsilon_i\ i=\overline{1,n-1}$ rădăcinile de unitate de ordin n ($\varepsilon^n=1,\ \varepsilon^k\neq 1, k=\overline{1,n-1}$). Să determinăm valoarea produsului

$$P=g(\varepsilon_0)\cdot g(\varepsilon_1)\cdot...\cdot g(\varepsilon_{n-1})$$

Determinarea acestei valori o vom face în două trepte:

a) în prima treaptă vom demonstra – dacă $C_n=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ a_n & a_1 & ... & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{bmatrix}$, $a_1,a_2,...,a_n\in C$, atunci $\det(C_n)=f(\varepsilon_0)\cdot f(\varepsilon_1)\cdot...\cdot f(\varepsilon_{n-1})$, unde $f(x)=a_1+a_2x+...+a_{n-1}x^{n-2}+a_nx^{n-1}$, $\varepsilon_i\ i=\overline{0,n-1}$.

b) în a doua treaptă vom demonstra egalitatea următoare:

$$\det(M)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & 1 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\cdot n^{n-2},\ n\in N\ \ n\geq 1.$$

a) Să începem cu prima treaptă – luăm matricea determinantului *Vandermonde* de ordinul n :

$$V_n\left(\varepsilon_0,\varepsilon_1,...,\varepsilon_{n-1}\right)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_0^{n-1} & \varepsilon_1^{n-1} & \cdots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Atunci

$$C_n\cdot V_n\left(\varepsilon_0,\varepsilon_1,...,\varepsilon_{n-1}\right)=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ a_n & a_1 & ... & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_0^{n-1} & \varepsilon_1^{n-1} & \cdots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} a_1+a_2\varepsilon_0+...a_n\varepsilon_0^{n-1} & a_1+a_2\varepsilon_1+...a_n\varepsilon_1^{n-1} & \cdots & a_1+a_2\varepsilon_{n-1}+...a_n\varepsilon_{n-1}^{n-1} \\ a_n+a_1\varepsilon_0+...a_{n-1}\varepsilon_0^{n-1} & a_n+a_1\varepsilon_1+...a_{n-1}\varepsilon_1^{n-1} & \cdots & a_n+a_1\varepsilon_{n-1}+...a_{n-1}\varepsilon_{n-1}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2+a_3\varepsilon_0+...a_1\varepsilon_0^{n-1} & a_2+a_3\varepsilon_1+...a_1\varepsilon_1^{n-1} & \cdots & a_2+a_3\varepsilon_{n-1}+...a_1\varepsilon_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix}=T\ .$$

Să luam elementele acestei matrice T după rânduri – observăm că primul rând conţine $f\left(\varepsilon_0\right), f\left(\varepsilon_1\right),...,f\left(\varepsilon_{n-1}\right)$ (în această ordine). Elementele din rândul doi înmulţim cu ε_i^n, după indice, unde $i=\overline{1,n-1}$ (valorile acestora nu se vor schimba, pentru că $\varepsilon_i^n=1$, $i=\overline{1,n-1}$). Atunci elementul din al doilea rând şi prima coloană va arăta aşa:

$$a_n\varepsilon_0^n+a_1\varepsilon_0^{n+1}+a_2\varepsilon_0^{n+2}...+a_{n-1}\varepsilon_0^{2n-1}=\varepsilon_0\left(a_n\varepsilon_0^{n-1}+a_1\varepsilon_0^n+a_2\varepsilon_0^{n+1}+...a_{n-1}\varepsilon_0^{2n-1}\right)\underset{k\in N}{\overset{\varepsilon^{n+k}=\varepsilon^n}{=}}$$

$$\underset{k\in N}{\overset{\varepsilon^{n+k}=\varepsilon^n}{=}}\varepsilon_0\left(a_1+a_2\varepsilon_0+...a_{n-1}\varepsilon_0^{n-2}+a_n\varepsilon_0^{n-1}\right)=\varepsilon_0 f\left(\varepsilon_0\right).$$

În mod similar, al doilea membru înmulţim cu ε_1^n, al treilea cu ε_2^n ş.a.m.d – în rândul al doilea obţinem $\varepsilon_0 f(\varepsilon_0), \varepsilon_1 f(\varepsilon_1), ..., \varepsilon_{n-1} f(\varepsilon_{n-1})$. Pentru fiecare rând efectuăm aceste operaţii, scoatem factorul comun corespunzător, şi matricea noastră va arăta în felul următor:

$$T = C_n \cdot V_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1}) = \begin{bmatrix} f(\varepsilon_0) & f(\varepsilon_1) & \cdots & f(\varepsilon_{n-1}) \\ \varepsilon_0 f(\varepsilon_0) & \varepsilon_1 f(\varepsilon_1) & \cdots & \varepsilon_{n-1} f(\varepsilon_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_0^{n-1} f(\varepsilon_0) & \varepsilon_1^{n-1} f(\varepsilon_1) & \cdots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} f(\varepsilon_{n-1}) \end{bmatrix}.$$

Să observăm că $\det T = f(\varepsilon_0) \cdot f(\varepsilon_1) \cdot ... \cdot f(\varepsilon_{n-1}) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_0^{n-1} & \varepsilon_1^{n-1} & \cdots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} =$

$= f(\varepsilon_0) \cdot f(\varepsilon_1) \cdot ... \cdot f(\varepsilon_{n-1}) \cdot \det V_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1})$ (am scos factor comun $f(\varepsilon_i)$ din coloana i).

Putem scrie $\det(C_n) \cdot \det(V_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1})) = \det(C_n \cdot V_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1})) = \det(T) =$

$= f(\varepsilon_0) \cdot f(\varepsilon_1) \cdot ... \cdot f(\varepsilon_{n-1}) \cdot \det V_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1})$, adică

$\det(C_n) \cdot \det(V_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1})) == f(\varepsilon_0) \cdot f(\varepsilon_1) \cdot ... \cdot f(\varepsilon_{n-1}) \cdot \det V_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1})$,

împărţim egalitatea cu $\det V_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1}) \neq 0$ ($\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$ pentru $i \neq j$, $i, j \in N \Rightarrow$

$\Rightarrow \det V_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1}) \neq 0$)), şi obţinem

$$\det(C_n) = f(\varepsilon_0) \cdot f(\varepsilon_1) \cdot ... \cdot f(\varepsilon_{n-1})$$

b) În a doua treaptă calculăm valoarea determinantului ciclic de ordinul n

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & 1 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+2+\ldots+n & 2 & \cdots & n \\ n+1+\ldots+n-1 & 1 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2+3+\ldots+1 & 3 & \cdots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}}{=} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 1 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

(am scos factor comun $\frac{n(n+1)}{2}$ din prima coloana).

De aici o să reducem ordinul determinantului de la n la $n-1$, apoi la $n-2$ - prima dată scăzând rândurile câte două, începând cu ultimul rând şi continuăm până la primul (ordinal se reduce la $n-1$), după aceasta scădem prima coloană din fiecare.

$$\det M = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 1 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n\times n} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & n-1 & -1 \end{vmatrix}_{n\times n} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 & -1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & -n & -n & \cdots & -n & -n \\ -1 & n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & n & 0 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} =$$

$$=-\frac{n(n+1)}{2}\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} -n & -n & -n & \cdots & -n & -n \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n & 0 \end{vmatrix}}_{(n-2)\times(n-2)}=-\frac{n(n+1)}{2}D.$$

Calculăm valoarea determinantului D - dezvoltăm după ultima coloană şi obţinem

$$D=(-1)^{1+(n-2)}\cdot(-n)\underbrace{\begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}}_{(n-3)\times(n-3)}=(-1)^{n-1}\cdot(-n)\cdot n^{n-3}=(-1)^{n}n^{n-2}.$$

Atunci $\det M=-\frac{n(n+1)}{2}D=-\frac{n(n+1)}{2}\cdot(-1)^{n}\cdot n^{n-2}=(-1)^{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\cdot n^{n-2}$, deci

$$\det M=(-1)^{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\cdot n^{n-2}.$$

Punând la un loc rezultatele din **a)** şi **b)** , luând în

$f(x)=a_1+a_2x+...+a_{n-1}x^{n-2}+a_nx^{n-1}$, $a_i=i$ (aşa obţinem g din enunţ), putem scrie:

$$P=g(\varepsilon_0)\cdot g(\varepsilon_1)\cdot...\cdot g(\varepsilon_{n-1})=\det M=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & 1 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}n^{n-2}$$, deci

$g(\varepsilon_0)\cdot g(\varepsilon_1)\cdot\ldots\cdot g(\varepsilon_{n-1}) = (-1)^{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\cdot n^{n-2}$, ce trebuia calculat.

La sfârşit să vedem un rezultat mai general, din care, caz special, obţinem valoarea determinantului M din problema precedentă.

Generalizare – fie $(a_n)_{n\geq 1}$ progresie aritmetică, cu primul membru a_1 şi cu raţia r. Atunci să socotim valoarea determinantului Δ în funcţie de a_1 şi r, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

. Metoda o să fie similară cu ce am văzut mai sus.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1+a_2+...+a_n & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1+a_2+...+a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1+a_2+...+a_n & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1+a_2+...+a_n & a_4 & a_5 & \cdots & a_2 \\ a_1+a_2+...+a_n & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} \overset{\sum_{i=1}^{n} a_i = S_n}{=} S_n \cdot \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 1 & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_4 & a_5 & \cdots & a_2 \\ 1 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} =$$

$$= S_n \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & -r & -r & \cdots & -r & -r \\ 0 & (n-1)r & -r & \cdots & -r & -r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -r & -r & \cdots & -r & -r \\ 0 & -r & -r & \cdots & (n-1)r & -r \end{vmatrix}_{n\times n} = S_n \begin{vmatrix} -r & -r & \cdots & -r & -r \\ (n-1)r & -r & \cdots & -r & -r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -r & -r & \cdots & -r & -r \\ -r & -r & \cdots & (n-1)r & -r \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} =$$

$$= S_n \cdot r^{n-1} \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 & -1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} \text{(am scos factor comun } r \text{ din fiecare coloană)}.$$

Să observăm că determinantul $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 & -1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$ a aparut şi mai sus,

şi

valoarea lui este egală cu $\underline{-D = -(-1)^n n^{n-2} = (-1)^{n+1} n^{n-2}}$.

Atunci putem scrie $\Delta = S_n \cdot r^{n-1} \cdot (-1)^{n+1} n^{n-2} = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)r\right) \cdot r^{n-1} \cdot (-1)^{n+1} n^{n-2} =$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{2} \cdot (r \cdot n)^{n-1} \cdot \left(2a_1 + (n-1)r\right).$$

Deci

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \cdot (r \cdot n)^{n-1} \cdot \left(2a_1 + (n-1)r\right)$$

unde $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetica, primul membru a_1 si cu ratia r .

Obs.: **a)** să observăm următoarele – dacă punem $a_1 = 1$ şi $r = 1$, obţinem determinatul

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & 1 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot n^{n-2}$$

– verificăm rezultatul cu formula noastră mai generală $a_1 = 1, r = 1$ obţinem ($\Delta_{\substack{a_1=1 \\ r=1}}$)

$$\det M = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \cdot (1 \cdot n)^{n-1} \cdot \left(\underbrace{2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 1}_{=n+1} \right) = (-1)^{n+1} \frac{n^{n-1}(n+1)}{2} = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2} n^{n-2}$$

adică rezultatul obţinut la problema din enunţ.

b) la scăderea rândurilor determinantului Δ am folosit $a_{n+1} - a_n = r$ şi $a_n = a_1 + (n-1)r$, $n \in N^*$.

Bibliografie

1. Marcus, A. and Szántó, Cs. (1996): Problems in General Algebra. "Babes -Bolyai" University, Cluj-Napoca. 105pp. (in Hungarian).