INEGALITATEA IZOPERIMETRICĂ

ROXANA MIHAELA STANCIU [1]

1. Introducere

Teorema ce urmează îşi propune sã dea rãspuns la următoarea întrebare:
"Dintre toate curbele plane regulate, simple şi închise, având aceeaşi lungime L, care mãrgineşte domeniul cu aria maximã?".

R = multimea numerelor reale, $\mathrm{R}^2 = \{(x_1, x_2)/x_1 \in R, x_2 \in R\} =$ *spatiu* vectorial /R.

$\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle =$ *produsul* scalar a doi vectori din R^2.

$E_2 = (R^2, \langle .,. \rangle) =$ *spatiul* vectorial euclidian.

Def 1. Fie $\mathrm{I} \subset \mathrm{R}$, interval. Se numeste curbă în spatiul E_2, o aplicatie C^∞ - diferentiabilă $\mathrm{c}: \mathrm{I} \to \mathrm{E}_2, \mathrm{t} \to \mathrm{c}(\mathrm{t}) = (\mathrm{x}(\mathrm{t}), \mathrm{y}(\mathrm{t})) \in \mathrm{E}_2, \forall t \in I$.

Def 2. O curbă $\mathrm{C}: [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \to \mathrm{E}_2$ se numeste curbă regulată dacă $\mathrm{c}'(\mathrm{t}) \neq 0\ \forall \mathrm{t} \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$.

Def 3. O curbă $\mathrm{C}: [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \to \mathrm{E}_2$ se numeste curbă simplă dacă $\forall \mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2 \in [\mathrm{a}, \mathrm{b})$ cu $\mathrm{t}_1 \neq \mathrm{t}_2$, avem $\mathrm{c}(\mathrm{t}_1) \neq \mathrm{c}(\mathrm{t}_2)$.

Def 4. O curbă $\mathrm{C}: [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \to \mathrm{E}_2$ se numeste curbă inchisă dacă $\mathrm{c}(\mathrm{a}) = \mathrm{c}(\mathrm{b})$ si $\mathrm{c}^{(i)}(a) = c^{(i)}(b)\ \forall \mathrm{i} \rhd 0$.

Def 5. O curbă $\mathrm{C}: \mathrm{I} \to \mathrm{E}_2$ este parametrizată canonic, dacă $\|\mathrm{c}'(\mathrm{s})\| = 1, \forall s \in I$.

Pentru a stabili prima egalitate din (1) vom folosi formula lui Green

$$\int_{\mathrm{Imc}} \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\mathrm{dx} + \mathrm{Q}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\mathrm{dy} = \iint_{\mathrm{D}} \left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{x}} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$ unde P si Q sunt functii diferentiabile definite pe D.

Daca in formula lui Green luom $\mathrm{Q}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{x}$ si $\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = -\mathrm{y}$ atunci obtinem:

$$\mathrm{S} = \iint_{\mathrm{D}} \mathrm{dxdy} = \frac{1}{2}\int_a^b [x(s)y'(s) - y(s)x'(s)]ds = \int_a^b x(s)y'(s)ds = -\int_a^b x'(s)y(s)ds.$$

[1] Prof., Liceul cu Program Sportiv "Iolanda Balaş Sotter", Buzău
e-mail: roxanastnc@yahoo.com

Teorema : Consideram o curba plana regulata, simpla si inchisa, avand lungimea L si fie S aria domeniului

D marginit de curba C.Atunci $(*)\ 4\pi\pi \le L^2$.

Semnul egal are loc daca si numai daca curba C este un cerc.

Inegalitatea $(*)$ poarta numele de inegalitatea izoperimetrica.

Demonstraţie:

Fie t_1 şi t_2 douã drepte paralele, tangente la curba datã astfel încât toate punctele curbei sã se gãseascã în regiunea cuprinsã între t_1 şi t_2 .Fie 2r distanţa între cele douã drepte şi C(O,r) un cerc tangent dreptelor t_1 şi t_2.

Alegem sistemul de axe carteziene ortogonale cu originea în O şi axã a absciselor paralela la t_1 dusã prin O.

Curba consideratã este:

$$C:[0,L]\to E_2, c(s)=(x(s),y(s)), \|c'(s)\|=1, \forall s\in[0,L].$$

Pe cercul C(O, r) alegem ca parametru pe s.

Deci cercul C(O, r) este imaginea aplicatiei diferentiabile :

$$C_1:[0,L]\to E_2, c_1(s)=(x(s),y(s)).$$

Folosind formula (1) din lema anterioara, obtinem ca aria cercului este data de :

$$(2)\pi r^2=\int_0^L x(s)y'(s)ds$$

Aria S a domeniului D marginit de imaginea aplicatiei C este :

$$(3)S=-\int_0^L x'(s)y(s)ds,$$

$$\text{Din (2) si (3)} \Rightarrow \pi r^2+S=\int_0^L [x(s)y'(s)-y(s)x'(s)]ds\le$$

$$\le\int_0^L\sqrt{[x(s)y'(s)-y(s)x'(s)]^2}\,ds=$$

$$=\int_0^L\sqrt{[x^2(s)+y^2(s)][y'^2(s)+x'^2(s)]-[x(s)x'(s)+y(s)y'(s)]^2}\,ds=$$

$$=\int_0^L\sqrt{r^2-[x(s)x'(s)+y(s)y'(s)]^2}\,ds\le\int_0^L\sqrt{r^2}\,ds=rL,$$

Inmultind (6) si (8) obtinem :

$$(\pi r^2 + S)\sqrt{\pi r^2 S} \le (\frac{\pi r^2 + S}{2})rL \Rightarrow \pi r^2 S \le \frac{r^2 L^2}{4} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (*) 4\pi S \le L^2$ (adica tocmai inegalitatea care trebuia stabilita).

Singurul lucru pe care îl mai avem de arãtat este acela cã în (*) avem egalitate dacã şi numai dacã curba C este un cerc.

Necesitatea:

Presupunem cã curba C este un cerc de razã r, atunci avem:

$4\pi S = 4\pi \cdot \pi r^2 = (2\pi r)^2 = L^2$.

Suficienţa:

Reciproc sã presupunem cã avem egalitatea:

$4\pi S = L^2$

şi sã demonstrãm cã curba C este un cerc

(9) $r^2 4\pi S = L^2 r^2$, $(9)' 2\sqrt{\pi r^2 S} = rL$

Din (8) si (6) $\Rightarrow$ (10) $2\sqrt{\pi r^2 S} \le \pi r^2 + S \le rL \Rightarrow$ (11) $\pi r^2 + S = rL$

Tinand seama de drumul parcurs pentru stabilirea inegalitat ii (6),

egalitatea (11)

ne arata ca trebuie sa avem :

(12) $x(s)x'(s) + y(s)y'(s) = 0, \forall s \in [0, L]$

(13) $x(s)y'(s) - y(s)x'(s) \triangleright 0, \forall s \in [0, L]$

Deoarece curba C este regulata (12) poate fi scrisa sub forma $(12)' \; \frac{x(s)}{y'(s)} = -\frac{y(s)}{x'(s)} = \lambda(s), unde$

$\lambda : [0, L] \to R$ este o functie diferentiabila

Din $(12)' \Rightarrow \lambda^2(s) = \frac{x^2(s)}{y'^2(s)} = \frac{y^2(s)}{x'^2(s)} = \frac{x^2(s) + y^2(s)}{y'^2(s) + x'^2(s)} = r^2 \Rightarrow (14)\lambda(s) = \varepsilon r$, unde $\varepsilon = 1$ sau $\varepsilon = -1$

Din $(12)'$ si $(14) \Rightarrow (15)\begin{cases} x(s) = \varepsilon r y'(s) \\ y(s) = -\varepsilon r x'(s) \end{cases}$ Tinand seama de (15) conditia

(13) $(\varepsilon r y'^2(s) + \varepsilon r x'^2(s) \rhd 0)$ implica $\varepsilon = 1$

Deci avem $y(s) = -r x'(s) \Rightarrow x'(s) = -\frac{y(s)}{r}$ si din $x'^2(s) + y'^2(s) = 1$,

avem $\frac{y^2(s)}{r^2} + y'^2(s) = 1 \Rightarrow \frac{y'(s)}{\sqrt{r^2 - y^2(s)}} = \pm\frac{1}{r}$ care prin integrare

duce la (16) $y(s) = r\sin(\pm\frac{s}{r} + s_0), s_0 = cons\tan ta$ .din (16) si

$y(s) = -r x'(s) \Rightarrow x'(s) = -\sin(\pm\frac{s}{r} + s_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow (17) x(s) = \pm r\cos(\pm\frac{s}{r} + s_0) + a, a = cons\tan ta.$

Din (16) si $(17) \Rightarrow (18)[x(s) - a]^2 + y^2(s) = r^2$

Din $4\pi S = L^2$ si $(11) \Rightarrow (19) L = 2\pi r$

Din (18) si (19) $\Rightarrow$ curba cautata este cercul cu centrul

in punctul (a,0) si raza r, reprezentat de curba

$C : [0, L] \to E_2, c(s) = (\pm r\cos(\pm\frac{s}{r} + s_0) + a, r\sin(\pm\frac{s}{r} + s_0)).$

Observaţie: Este evident cã aria domeniului plan mãrginit de o curbã închisã şi convexã având lungimea L, este mai mare decât aria domeniului plan mãrginit de o curbã închisã neconvexã având lungimea L.Din această cauză în demonstra ţia teoremei curba C am considerat-o convexã.

2. Câteva observaţii ale ,, inegalităţii izoperimetrice”

O1. În 1827, Jacob Steiner (1796–1863) a demonstrat pentru prima oară teorema următoare:
,,Dintre toate figurile plane, convexe, izoperimetrice (adică care au aceeaşi lungime) aria maximă este realizată de cerc”.

O2. În 1916, Blaschke Wilhelm (1885-1961) demonstrează următoarea teoremă:
,,Pentru orice curbă plană, închisă, de lungime L şi arie A avem $4\pi A \le L^2$. $4\pi A = L^2 \Leftrightarrow$ curba este un cerc”.

O3. În 1921, Carleman Torsten (1892-1949) a demonstrat inegalitatea izoperimetrică pentru curbe pe suprafeţe minimale.

O4. În 1933, E.F.Beckenbach şi F.Radó demonstrează inegalitatea izoperimetrică pentru curbe pe suprafeţe de curbură gaussiană negativă.

3. Consecinţe ale inegalităţii izoperimetrice:

C1. Dintre toate triunghiurile izoperimetrice (care au acelaşi perimetru) aria maximă o are triunghiul echilateral (Zenodor, sec.2 î.Hr.).

Demonstraţie: Se va ţine cont de următoarea propoziţie:

Ⓟ ,, Dacă factorii unui produs au suma constantă, atunci produsul lor este maxim dacă factorii sunt egali”. Avem S = $\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$, aria triunghiului şi a+b+c = const.(din ipoteză), p = $\frac{(a+b+c)}{2}$ = const; a, b, c- variabile.

S este maximă $\Leftrightarrow S^2$ este maximă $\Leftrightarrow$ produsul $(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)$ cu suma factorilor constantă este maxim $\Rightarrow$ p-a = p-b = p-c $\Rightarrow$ a = b = c (q.e.d.).

C2. Dintre toate patrulaterele inscriptibile, izoperimetrice, aria maximă o are pătratul **(Zenodor).**

Demonstraţie: Considerăm patrulaterul inscriptibil de laturi a, b, c, d. Din ipoteză, a+b+c+d = const. Aria patrulaterului inscriptibil, este dată de formula: S = $\sqrt{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)}$, unde p = $\frac{(a+b+c+d)}{2}$ = const. Avem suma: (p-a)+(p-b)+(p-c)+(p-d) constantă, şi din propoziţia Ⓟ $\Rightarrow$ p-a = p-b = p-c = p-d $\Rightarrow$ a=b=c=d (q.e.d.).

$\boxed{\text{C3}}$. **Un poligon de laturi date, are aria maximă, dacă este inscriptibil.** (enunţată de Christian Huygens (1629-1695) în 1675 şi demonstrată de Gabriel Cramer (1704 -1752) în 1752).

Demonstraţie: Fie două poligoane P şi P' formate cu aceleaşi laturi, cu P înscris într - un cerc şi P' neinscriptibil. Pe laturile poligonului P' purtăm exterior segmen te de cerc, corespunzătoare laturilor poligonului P. Obţinem astfel o linie curbă (C') izoperimetrică cu (C). Din inegalitatea izoperimetrică avem Aria (C) > Aria (C') .

Aria (C) = Aria (P) + Aria (segm. de cerc) >Aria (P') + Aria (segm. de cerc)= Ari a (C')

Deci Aria (P) > Aria (P') (q.e.d.).

$\boxed{\text{C4}}$. **Dintre toate poligoanele izoperimetrice cu acelaşi număr de laturi, poligonul regulat are aria maximă.** (Zenodor)

Demonstraţie: Din consecinţa 3 avem că poligonul de arie maximă este inscriptibil. Pe de altă parte, acest poligon trebuie să aibă laturile egale. În caz contrar, presupunem $AB \neq BC$ şi construim triunghiul isoscel AB'C cu acelaşi perimetru cu ΔABC. Dar Aria (AB'C) > Aria (ABC) şi obţinem un polig on izoperimetric de arie mai mare, ceea ce este contrar ipotezei. Poligonul care extremează aria, are deci toate laturile egale, şi fiind inscriptibil, este regulat.

$\boxed{\text{C5}}$. **Dintre toate poligoanele echivalente (cu aceeaşi arie), de acelaşi număr de laturi, poligonul regulat are perimetrul minim.**

Demonstraţie: Fie **P** un poligon oarecare, de arie **a** şi perimetru ℓ, şi **P', P"** două poligoane regulate de acelaşi număr de laturi cu **P**, astfel încât **P'** este echivalent cu **P** **(a'=a)** şi **P"** izoperimetric cu **P (**ℓ"=ℓ**).**

Deoarece **P"** este izoperimetric cu **P** şi **P"** este regulat, rezultă din $\boxed{\text{C4}}$ **a">a.**

$\begin{cases} a'' > a \\ a = a' \end{cases} \Rightarrow$ **a">a'** $\Rightarrow \ell'' > \ell'$. Din $\ell''=\ell$ şi $\ell''>\ell' \Rightarrow \ell>\ell' \Rightarrow$ **P'** are perimetrul minim (q.e.d.).

<u>Notă</u>: Am optat pentru aceste consecinţe deoarece, pot fi înţelese uşor de elev ii din liceu şi de cei din clasele terminale din gimnaziu.

Bibliografie:

1. N. Mihăileanu - ,,Istoria matematicii”, vol.1, Editura Enciclopedică Română, Bucureşti, 1974.
2. N. Mihăileanu - ,,Istoria matematicii”, vol. 2, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1981.
3. L. Nicolescu - ,,Geometrie”, Editura Universităţii Bucureşti, 1993.
4. N.Stanciu**,** *Matematică gimnaziu & liceu*, Editura ’’Rafet’’, Rm. Sărat, 2007
5. N.Stanciu, Câteva consecinţe ale „inegalităţii izoperimetrice” ’’ – Recreaţii Matematice, nr. 2 / 2005, Iaşi