Numere de tip Fibonacci

de Florin Antohe

Numim şir Fibonacci şirul $(F_n)_{n\geq 1}$ definit prin $F_1 = F_2 = 1$ şi $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pentru $n \geq 2$. Acest şir de numere a fost introdus în anul 1228 de către matematicianul italian Leonardo Fibonacci pornind de la studiul înmulţirii iepurilor de casă .

Ţinând cont că ecuaţia caracteristică ataşată şirului lui Fibonacci este $x^2 - x - 1 = 0$ cu rădăcinile $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ şi $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, deducem imediat că pentru orice $n \geq 1$:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x_2^{\,n} - x_1^{\,n}\right) = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n\right].$$

Următorul rezultat conţine o serie de proprietăţi interesante ale şirului $(F_n)_{n\geq 1}$.

Propoziţie :

(i) Pentru orice $m, n \geq 2$ are loc egalitatea $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_m F_{n-1}$;

(ii) Pentru orice $n \geq 1$ avem $(F_n, F_{n+1}) = 1$;

(iii) Dacă $m \mid n$, atunci $F_m \mid F_n$;

(iv) Dacă $n \geq 5$ si F_n este prim , atunci şi n este prim.

Demonstraţie :

(i) Se face inducţie matematică după m (sau n).

(ii) Presupunem prin reducere la absurd că există $m \geq 1$ astfel încât $(F_m, F_{m+1}) = d > 1$ şi îl alegem pe m minim cu această proprietate. Cum $F_{m+1} = F_m + F_{m-1}$ deducem că $d \mid F_{m-1}$ şi atunci $(F_{m-1}, F_m) \geq d > 1$, contrazicând minimalitatea lui m.

(iii) Să presupunem că $m \mid n$, adică $n = mk$ cu $k \geq 1$. Cum $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x_2^{\,n} - x_1^{\,n}\right)$ şi $F_m = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x_2^{\,m} - x_1^{\,m}\right)$ avem :

$$\frac{F_n}{F_m} = \frac{x_2^{\,n} - x_1^{\,n}}{x_2^{\,m} - x_1^{\,m}} = \frac{\left(x_2^{\,m}\right)^k - \left(x_1^{\,m}\right)^k}{x_2^{\,m} - x_1^{\,m}} = x_1^{\,m(k-1)} + x_1^{\,m(k-2)}x_2^{\,m} + \ldots + x_2^{\,m(k-1)} = \left[x_1^{\,m(k-1)} + x_2^{\,m(k-1)}\right] +$$
$$+ \left[x_1^{\,m(k-2)}x_2^{\,m} + x_1^{\,m}x_2^{\,m(k-2)}\right] + \ldots \in Z$$

(deoarece din $x_1 + x_2 = 1$ şi $x_1 x_2 = -1$ deducem că $x_1^{\,t} + x_2^{\,t} \in \mathbf{Z}$ pentru orice $t \geq 1$.), de unde concluzia.

(iv) Să presupunem prin absurd că n nu este prim ; atunci $n = kt$ cu $k \geq 3$ şi din (i) deducem că $F_k \mid F_n$ (cu $F_k \geq 2$) contrazicând faptul că F_n este prim.

Corolar :

(i) Pentru orice $n,k \geq 1$ avem $\left(F_{nk-1}, F_n\right) = 1$
(ii) Pentru orice $m,n \geq 1$ avem $\left(F_m, F_n\right) = F_{(m,n)}$;
(iii) Dacă $m,n \geq 1$ şi $\left(m,n\right) = 1$, atunci $F_m F_n \mid F_{mn}$.

Demonstraţie :

(i) Fie $\left(F_{nk-1}, F_n\right) = d > 1$. Cum $F_{nk+1} = F_{nk} + F_{nk-1}$, $d \mid F_n$ si $F_n \mid F_{nk}$, deducem că $d \mid F_{nk}$ şi deci : $\left(F_{nk-1}, F_{nk}\right) \geq d > 1$ ceea ce este absurd (conform cu (ii) din propoziţia de mai sus)
(ii) Fie $d = (m,n)$. Dacă $n > m$ atunci scriind algoritmul lui Euclid :
$n = mq_1 + r_1$, $m = r_1 q_2 + r_2$, $r_1 = r_2 q_3 + r_3, \ldots,$ $r_{i-1} = r_i q_{i+1}$, atunci $d = r_i$. Ţinând cont de propoziţia de mai sus avem :
$\left(F_m, F_n\right) = \left(F_m, F_{mq_1+r_1}\right) = \left(F_m, F_{mq_1-1}F_{r_1} + F_{mq_1}F_{r_1+1}\right) = \left(F_m, F_{mq_1-1}F_{r_1}\right) = \left(F_m, F_{r_1}\right)$.
Însă $\left(F_m, F_{r_1}\right) = \left(F_{r_1}, F_{r_2}\right)$ deci $\left(F_m, F_n\right) = \left(F_m, F_{r_1}\right) = \left(F_{r_1}, F_{r_2}\right) = \ldots = \left(F_{r_i-1}, F_{r_i}\right) = F_{r_i} = F_d$.
(iii) Din $\left(m,n\right) = 1$ şi (ii) deducem că $\left(F_m, F_n\right) = F_1 = 1$. Din propoziţia de mai sus deducem că $F_m \mid F_{mn}$ si $F_n \mid F_{mn}$, iar cum $\left(F_m, F_n\right) = 1$ deducem că $F_m F_n \mid F_{mn}$.

Teorema 1.

Fie $p \geq 2$ un număr prim.
(i) Dacă $p = 5k \pm 1$, atunci $p \mid F_{p-1}$;
(ii) Dacă $p = 5k \pm 2$, atunci $p \mid F_{p+1}$;

Demonstraţie :

(i) Cum pentru $p = 2$, $F_3 = 2$, putem presupune $p \neq 2$ şi $p \neq 5$.
Cum $F_n = \frac{1}{2^n \sqrt{5}}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n\right]$ deducem că $2^{n-1}F_n = C_n^1 + C_n^3 5 + C_n^5 5^2 + \ldots$

Pentru n=p , cum $p \mid C_p^k$ pentru $1 \leq k \leq p-1$ şi $2^{p-1} \equiv 1$(mod p), deducem că $F_p \equiv 5^{\frac{p-1}{2}}$ (mod p).
Atunci $5^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{5}{p}\right)$ mod p şi deci $F_p \equiv \pm 1$(mod p).

Din cele de mai sus deducem imediat că $2^p F_{p+1} \equiv C_{p+1}^1 + C_{p+1}^p 5^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 + 5^{\frac{p-1}{2}}$ (mod p) , deci :

$2F_{p+1} \equiv 1 + 5^{\frac{p-1}{2}}$ (mod p).

Din legea reciprocităţii pătratice a lui Gauss avem : $\left(\frac{5}{p}\right)\left(\frac{p}{5}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{5-1}{2}}=1$, deci $\left(\frac{5}{p}\right)=\left(\frac{p}{5}\right)$, adică : $\left(\frac{5}{p}\right)=\left(\frac{p}{5}\right)$, adică $\left(\frac{5}{p}\right)\equiv p^{\frac{5-1}{2}}$ (mod p) , de unde deducem că $\left(\frac{5}{p}\right)=\left(\frac{p}{5}\right)=1$ dacă : $p=5k\pm1$ si $\left(\frac{5}{p}\right)=\left(\frac{p}{5}\right)=-1$ dacă $p=5k\pm2$.

În primul caz deducem că $F_p\equiv5^{\frac{p-1}{2}}\equiv1$ (mod p), $2F_{p+1}\equiv1+5^{\frac{p-1}{2}}\equiv2$ (mod p) , $F_{p+1}\equiv1$ (mod p), $F_{p-1}=F_{p+1}-F_p\equiv1-1\equiv0$ (mod p) , iar în cazul al doilea $2F_{p+1}\equiv1+5^{\frac{p-1}{2}}\equiv0$ (mod p) şi atunci: $F_{p+1}\equiv0$ (mod p).

Teorema 2 (Zeckendorf).

Orice număr natural $n\geq1$ se reprezintă în mod unic ca sumă de termeni distincţi şi neconsecutivi ai şirului lui Fibonacci:

$$n=\sum_{j=1}^{m}F_{i_j},i_j-i_{j-1}\geq2$$

Demonstraţie :

Se verifică imediat că proprietatea din enunş este adev arată pentru $n\leq F_4$ =3.
Să presupunem că ea este adevarată pentru toate numerele naturale până la F_k, $k\geq4$ şi să o demonstrăm pentru numărul n astfel încât $F_k<n\leq F_{k+1}$. Dacă $n=F_{k+1}$ totul este clar. În caz contrar, $n=F_k+(n-F_k)$ si $n-F_k<F_{k+1}-F_k=F_{k-1}$, deci conform ipotezei de inducţie :

$$n-F_k=F_{i_1}+...+F_{i_r},i_{j+1}\leq i_j-2,i_1\leq k-2.$$

Deducem că $n=F_k+F_{i_1}+...+F_{i_r}$. Unicitatea reprezentării din enunş rezultă tot prin inducţie, observând că dacă $F_k\leq n<F_{k+1}$ atunci F_k apare obligatoriu în reprezentarea lui n. Într-adevăr, o sumă de numere Fibonacci F_{k_i} cu $k_{i+1}\leq k_i-2$, i=1,...,r-1 şi $k_r\geq2$ este cel mult

$F_{k_1}+F_{k_1-2}+...=\left(F_{k_1+1}-F_{k_1-1}\right)+\left(F_{k_1-1}-F_{k_1-3}\right)+...=F_{k_1+1}-1$.

Deducem că dacă $n=F_k$ atunci aceasta este reprezentarea unică a lui n, iar dacă $F_k<n<F_{n+1}$ atunci reprezentarea lui n îl conţine obligatoriu pe F_k şi $n-F_k<F_{k-1}$. În continuare folosim reprezentarea unică a lui $n-F_k$.

Aplicaţii :

- Să se arate că şirul $(F_n)_{n\geq 1}$ de numere Fibonacci verifică relaţiile:

1. $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \forall n \geq 1$
2. $F_1 + F_2 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$
3. $\sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$
4. $F_{2n} + F_n^{\ 2} = 2F_n F_{n+1}$;
5. $F_{2n} = F^{2}{}_{n+1} - F^{2}{}_{n-1}$;
6. $\sum_{k=1}^{2n-1} F_k F_{k+1} = F_{2n}^{\ 2}$
7. $F^{2}{}_{n+3} - 2F^{2}{}_{n+2} - 2F^{2}{}_{n+1} + F_n^{\ 2} = 0$

Rezolvare :

1. Demonstrăm relaţia prin inducţie :

Evident avem : $F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right]$.

Fie $n \geq 1$ a.î. $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$. Atunci $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

$$F_{n+1} = \left\{\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right] - \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]\right\}$$

$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

2. Din definiţia şirului $(F_n)_{n\geq 1}$ avem :

$F_1 = 1$
$F_2 = F_1 + F_0$
$F_3 = F_2 + F_1$
$F_4 = F_3 + F_2$
....
$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$
Prin adunare deducem : $F_{n+2} = 1 + F_1 + F_2 + ... + F_n$.

3. Avem de arătat că :
$F_2 + F_4 + F_6 + ... + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$
Demonstrăm prin inducţie relaţia.
Verificarea propoziţiei :
P(1) : $F_2 = F_3 - 1$ ceea ce este evident.
Presupunem P(n) : $F_2 + F_4 + F_6 + ... + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$ propoziţie adevărată.
Dar P(n)$\Rightarrow$P(n+1)
P(n+1) : $F_2 + F_4 + F_6 + ... + F_{2n} + F_{2n+2} = F_{2n+3} - 1$
Rămâne să arătăm că :
$F_{2n+1} - 1 + F_{2n+2} = F_{2n+3} - 1$ ceea ce este evident , deci P(n) propoziţie adevărată , de unde rezultă că P(n) este adevărată.

4. Arătăm relaţia prin calcul direct.
Avem de arătat că $F_{2n} + F_n^{\ 2} = 2F_n F_{n+1}$
Folosim faptul că : $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right)$ unde $\alpha + \beta = 1$.
Deci : $F_{2n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{2n} - \beta^{2n}\right)$; $F_n^{\ 2} = \frac{1}{5}\left(\alpha^{2n} - 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n}\right)$; $2F_n F_{n+1} = \frac{2}{5}\left(\alpha^n - \beta^n\right)\left(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\right)$
Deci relaţia devine :
$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{2n} - \beta^{2n}\right) + \frac{1}{5}\left(\alpha^{2n} - 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n}\right) = \frac{2}{5}\left(\alpha^n - \beta^n\right)\left(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\right)$$
$$\sqrt{5}\left(\alpha^{2n} - \beta^{2n}\right) + \alpha^{2n} - 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n} = 2\left[\alpha^{2n+1} - \beta\cdot(\alpha\beta)^n - \alpha\cdot(\alpha\beta)^n + \beta^{2n+1}\right]$$
Deoarece $\alpha + \beta = 1.$ rămâne să arătăm că :
$\left(\sqrt{5} + 1\right)\cdot\alpha^{2n} + \left(1 - \sqrt{5}\right)\cdot\beta^{2n} = 2\alpha\cdot\alpha^{2n} + 2\beta\cdot\beta^{2n}$, care este adevărată.

5. Arătăm şi această relaţie tot prin calcul direct.
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right)$$
$$F_{2n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{2n} - \beta^{2n}\right);\quad F^2_{\ n+1} = \frac{1}{5}\left(\alpha^{2n+2} - 2\alpha^{n+1}\beta^{n+1} + \beta^{2n+2}\right)$$

$$F^2_{n-1} = \frac{1}{5}\left(\alpha^{2n-2} - 2\alpha^{n-1}\beta^{n-1} + \beta^{2n-2}\right)$$

Deci avem de arătat că :

$$\sqrt{5}\left(\alpha^{2n} - \beta^{2n}\right) = \alpha^{2n+2} + 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n+2} - \alpha^{2n-2} - 2\alpha^n\beta^n - \beta^{2n-2}$$

$$\sqrt{5}\alpha^{2n} - \sqrt{5}\beta^{2n} = \left(\alpha^2 - \frac{1}{\alpha^2}\right)\cdot\alpha^{2n} + \left(\beta^2 - \frac{1}{\beta^2}\right)\cdot\beta^{2n}$$

Efectuând calculele obţinem că : $\alpha^2 - \frac{1}{\alpha^2} = \sqrt{5};\ \beta^2 - \frac{1}{\beta^2} = \sqrt{5}$

6. Vom demonstra relaţia prin inducţie matematică .

Avem de demonstrat că : $F_1F_2 + F_2F_3 + ... + F_{2n-1}F_{2n} = F^2{}_{2n}$.

P(2) : $F_1F_2 + F_2F_3 + F_3F_4 = F^2{}_4 \Leftrightarrow 1 + 2 + 6 = 9$, deci P(2) propoziţie adevărată.

Presupunem că propoziţia P(n) este adevărată .

P(n)$\Rightarrow$P(n+1)

P(n+1) : $F_1F_2 + F_2F_3 + ... + F_{2n-1}F_{2n} + F_{2n}F_{2n+1} + F_{2n+1}F_{2n+2} = F^2{}_{2n+2}$

Rămâne să arătăm că : $F^2{}_{2n} + F_{2n}F_{2n+1} + F_{2n+1}F_{2n+2} = F^2{}_{2n+2}$

$F_{2n}\left(F_{2n} + F_{2n+1}\right) + F_{2n+1}F_{2n+2} = F_{2n}F_{2n+2} + F_{2n+1}F_{2n+2} = F_{2n+2}\left(F_{2n} + F_{2n+1}\right) = F^2{}_{2n+2}$, deci P(n) este propoziţie adevărată , ceea ce ne asigură că relaţ ia $\sum_{k=1}^{2n-1} F_kF_{k+1} = F_{2n}{}^2$ este adevărată.

- Produsul a opt numere naturale consecutive nu poate fi pă trat perfect.

Rezolvare :

Fie P= $(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$, $n \geq 4$.

Dacă $n \in \{4,5,6\}$ prin calcul direct rezultă că P nu este pă trat perfect . Pentru $n \geq 7$ avem :

P= $\left(n^2 - 3n\right)\left(n^2 - 3n + 2\right)\left(n^2 + 5n + 4\right)\left(n^2 + 5n + 6\right) = \left[\left(n^2 - 3n + 1\right)^2 - 1\right]\left[\left(n^2 + 5n + 5\right)^2 - 1\right]$

Utilizând faptul că : $\left(a^2 - 1\right)\left(b^2 - 1\right) = (ab - 1)^2 - (a - b)^2$ rezultă că :

$\left[\left(n^2 - 3n + 1\right)\left(n^2 + 5n + 5\right) - 2\right]^2 < P < \left[\left(n^2 - 3n + 1\right)\left(n^2 + 5n + 5\right) - 1\right]^2$, adică P este cuprins între două pătrate perfecte consecutive , deci nu poate fi pă trat perfect.

Bibliografie:

[1]. Buşneag D. , Chirteş F. , Piciu D. , Complemente de aritmetică şi teoria elementară a numerelor , Editura Gil , Zalău, 2007.

[2]. Cucurezeanu I. Pătrate şi cuburi perfecte de numere î ntregi , Editura Gil , Zalău , 2007.

profesor Şcoala “Nichita Stănescu”
str Costache Conachi nr 2 , cod 800643
Galaţi , jud Galaţi