

ASUPRA DREPTEI LUI DROZ – FARNY

Corneliu M nescu-Avram

În 1899, Arnold Droz-Farny (1865-1912), un profesor elvețian de matematică științifică, a publicat fără demonstrație următoarea

Teorema 1. Două drepte perpendiculare duse prin ortocentrul unui triunghi interceptează câte un segment pe fiecare latură a triunghiului. Mijloacele celor trei segmente sunt coliniare.

Numeroși autori s-au ocupat de această problemă (a se vedea bibliografia) și (4) conține, din nou!, fără demonstrație următoarea generalizare, a cărei demonstrație face obiectul prezentei note :

Teorema 2. Se considerăm triunghiul ABC cu ortocentrul H . O hiperbolă echilaterală cu centrul în H intersectează dreapta BC în A_1 și A_2 , dreapta CA în B_1 și B_2 și dreapta AB în C_1 și C_2 . Să se demonstreze că punctele P , Q și R , mijloacele segmentelor $[A_1A_2]$, $[B_1B_2]$ și $[C_1C_2]$, respectiv, sunt coliniare.

Demonstrație : Presupunem că asimptotele hiperbolei rămân fixe și triunghiul se rotește în jurul ortocentrului. Se alege un sistem complex de coordonate cu originea O în centrul cercului circumscris triunghiului ABC , asimptotele hiperbolei echilaterale paralele cu axa reală și axa imaginară și vârfurile triunghiului pe cercul unitate. Rezultă $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ și $H(h)$, cu $a, b, c, h \in \mathbb{C}$, $|a| = |b| = |c| = 1$ și $h = a + b + c$. După transformarea $z \mapsto -z + h$ (o translație urmată de simetria față de un punct), asimptotele devin axe de coordonate și coordonatele punctelor sunt $A(b + c)$, $B(c + a)$, $C(a + b)$ și $H(0)$. Nu este necesar să rotim triunghiul în jurul ortocentrului, deoarece vârfurile au fost alese arbitrar.

În coordonate carteziene, ecuația unei hiperbole echilaterale este $xy = m$, cu m o constantă reală nenulă, astfel că hiperbola are în coordonate complexe ecuația

$$z^2 - \bar{z}^2 = n, \text{ cu } n \in \mathbb{C} - \mathbb{R}. \quad (1)$$

Dreapta BC are ecuația

$$z + bc\bar{z} = a + b + c + \frac{bc}{a}. \quad (2)$$

Din (1) și (2) obținem, prin eliminarea lui \bar{z} , ecuația de gradul al doilea

$$(b^2c^2 - 1)z^2 + 2\left(a + b + c + \frac{bc}{a}\right)z - \left(a + b + c + \frac{bc}{a}\right)^2 - b^2c^2n = 0, \quad (3)$$

ale c rei solu ii sunt a_1 i a_2 , coordonatele punctelor A_1 i A_2 respectiv. Rezult c p , coordonata punctului P este

$$p = \frac{a_1+a_2}{2} = \frac{a+b+c+\frac{bc}{a}}{1-b^2c^2} \quad (4)$$

i putem ob ine asem n tor, q i r , coordonatele punctelort Q i R respectiv.

Punctele P, Q, R sunt coliniare dac i numai dac se anuleaz urm torul determinant

$$= \begin{vmatrix} p & \bar{p} & 1 \\ q & \bar{q} & 1 \\ r & \bar{r} & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Având în vedere forma particular a coordonatelor p, q, r , putem scrie determinantul ca o sum de patru determinan i

$$= |a + b + c|^2 \cdot 1 + abc(a + b + c) \cdot 2 + a^2b^2c^2(ab + bc + ca) \cdot 3 + a^2b^2c^2 \cdot 4. \quad (6)$$

unde

$$\begin{aligned} \cdot 1 &= \begin{vmatrix} 1 & -b^2c^2 & 1 \\ 1-b^2c^2 & 1-b^2c^2 & 1 \\ 1 & -c^2a^2 & 1 \\ 1-c^2a^2 & 1-c^2a^2 & 1 \\ 1 & -a^2b^2 & 1 \\ 1-a^2b^2 & 1-a^2b^2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \cdot 2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1-b^2c^2 & 1-b^2c^2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1-c^2a^2 & 1-c^2a^2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1-a^2b^2 & 1-a^2b^2 & 1 \end{vmatrix}, \\ \cdot 3 &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a^2(1-b^2c^2) & a^2(1-b^2c^2) & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ b^2(1-c^2a^2) & b^2(1-c^2a^2) & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ c^2(1-a^2b^2) & c^2(1-a^2b^2) & 1 \end{vmatrix}, \quad \cdot 4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a^2(1-b^2c^2) & 1-b^2c^2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ b^2(1-c^2a^2) & 1-c^2a^2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ c^2(1-a^2b^2) & 1-a^2b^2 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Suma primelor dou coloane este egal cu a treia coloan în $\cdot 1$ i este egal cu 0 în $\cdot 2$ i $\cdot 3$ astfel c $\cdot 1 = \cdot 2 = \cdot 3 = 0$. Calcule directe (e simplu!) arat c $\cdot 4 = 0$.

Înlocuim aceste valori în (6) i ob inem (5), ceea ce încheie demonstra ia Teoremei 2.

Pentru $n = 0$ hiperbola degeneraz în dou drepte perpendiculare (asimptotele ei) i ob inem o demonstra ie a Teoremei 1, deoarece punctele P, Q, R sunt acelea i.

Bibliografie

1. Kao, S.T., Bernhart, A., Generalized Droz -Farny Transversals, www.jstor.org
2. Honsberger, R., Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry, USA, 1995
3. Grinberg, D., From the Complete Quadrilateral to the Droz -Farny Theorem, unpublished notes
4. Grinberg, D., Hyacinthos message 6268, Jan.5, 2003
5. Pohoata, C., Ta, Su Hong, A short Proof of Lamoen's generalization of the Droz-Farny Line theorem, www.cpohoata.com
6. Bogomolny, A., Droz-Farny Line Theorem, from *Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles*
7. Ayme, J.-L., A Purely Synthetic Proof of the Droz -Farny Line Theorem, Forum Geometricorum, Volume 4 (2004) 219 -224
8. Ehrmann, J.-P., van Lamoen, F.M., A projective generalization of the Droz -Farny line theorem, Forum Geometricorum, Volume 4 (2004) 225 -227
9. Thas, C., A note on the Droz -Farny theorem, Forum Geometricorum, Volume 6 (2006) 25-28
10. Bradley, C.J., Monk, D., Smith, G.C., On a Porism Associated with the Euler and Droz - Farny lines, Forum Geometricorum, Volume 7 (2007) 11 -17
11. Mihalescu, C., Geometria elementelor remarcabile, Societatea de Științe Matematice din România, București, 2007

CATEDRA DE MATEMATICĂ, GRUPUL ȘCOLAR DE TRANSPORTURI, PLOIESTI, ROMANIA

E-mail : avram050652@yahoo.com