

Elemente de geometria triunghiului în coordonate baricentrice (egalități și inegalități în triunghi).

ROXANA MIHAELA STANCIU¹

Articolul vine u or în completarea programei colare din liceu și are scopul de a pune în evidență noi metode de rezolvare a problemelor de geometrie și de a lărgi orizontul matematic al elevilor. În cele ce urmează, voi enunța șase teoreme importante și voi demonstra numeroase aplicații ale acestor teoreme referitoare la unele egalități și inegalități în triunghi.

Teorema 1. Se consideră un triunghi fix ABC și notăm $BC=a, CA=b, AB=c, S=Aria(ABC)$. Atunci pentru orice $M \in E_2$ (unde, E_2 este planul euclidian) există și este unic tripletul ordonat $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z=1$ astfel încât

$$x\vec{MA} + y\vec{MB} + z\vec{MC} = \vec{0}$$

și reciproc, pentru orice triplet ordonat $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z=1$ există și este unic un punct $M \in E_2$ astfel încât

$$x\vec{MA} + y\vec{MB} + z\vec{MC} = \vec{0}$$

și în acest caz vom spune că punctul M are coordonatele baricentrice (x, y, z) în raport cu triunghiul ABC și vom nota $M(x, y, z)$. Pentru orice $X \in E_2$ avem

$$x\vec{XA} + y\vec{XB} + z\vec{XC} = \vec{XM}$$

(demonstrație în [1] pag. 66).

Exemple de coordonate baricentrice pentru câteva puncte remarcabile într-un triunghi:

1.1. $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1)$;

1.2. $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ – centrul de greutate;

1.3. $I\left(\frac{a}{2p}, \frac{b}{2p}, \frac{c}{2p}\right)$ – centrul cercului înscris $C(I, r)$;

1.4. $I_a\left(\frac{a}{2(p-a)}, \frac{b}{2(p-a)}, \frac{c}{2(p-a)}\right)$ –
centrul cercului exinscris $C(I_a, r_a)$;

1.5. $N\left(\frac{p-a}{p}, \frac{p-b}{p}, \frac{p-c}{p}\right)$ – punctul lui Nagel;

¹ Prof., Liceul cu Program Sportiv “Iolanda Bala Sotter”, Buzău
e-mail: roxanastnc@yahoo.com

$$1.6. \Gamma \left(\frac{(p-b)(p-c)}{r(4R+r)}, \frac{(p-c)(p-a)}{r(4R+r)}, \frac{(p-a)(p-b)}{r(4R+r)} \right) -$$

punctul lui Gergone;

$$1.7. H(ctgBctgc, ctgCctgA, ctgActgB) - \text{ortocentrul};$$

$$1.8. O \left(\frac{R^2 \sin 2A}{2S}, \frac{R^2 \sin 2B}{2S}, \frac{R^2 \sin 2C}{2S} \right) -$$

centrul cercului circumscris $C(O, R)$;

$$1.9. L \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right) -$$

punctul lui Lemoine.

Teorema 2. Puterea punctului $M(x, y, z) \in E_2$ față de cercul $C(O, R)$, circumscris triunghiului ABC este dat de relația:

$$p_c(M) = -(yz a^2 + zx b^2 + xy c^2); OM^2 = R^2 - p_c(M).$$

(demonstrare în [1] pag.68).

Aplicații ale teoremei 2:

$$2.1. p_c(G) = -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}, OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9} \text{ și,}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2;$$

demonstrare: se aplică teorema 2 la 1.2.

$$2.2. p_c(I) = -2Rr, OI^2 = R^2 - 2Rr, \text{ și, } R \geq 2r;$$

demonstrare: rezultă imediat din teorema 2 la 1.3.

$$2.3. p_c(I_a) = -2Rr_a, OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a;$$

demonstrare: folosim teorema 2 la 1.4.

$$2.4. p_c(N) = -4r(R-r), ON = R-2r;$$

demonstrare: utilizăm teorema 2 la 1.5.

$$2.5. p_c(H) = -8R^2 \cos A \cos B \cos C, OH^2 = R^2(1 - 8 \cos A \cos B \cos C),$$

$$\text{și, } \cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}, \text{ iar}$$

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2), \text{ deoarece, } \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}.$$

demonstrare: se aplică teorema 2 la 1.7.

$$2.6. p_c(\Gamma) = -r(R+r) \left(\frac{2p}{4R+r} \right);$$

demonstrare: se folosește teorema 2 la 1.6.

$$2.7. p_c(L) = -3 \left(\frac{abc}{a^2 + b^2 + c^2} \right)^2, OL^2 = R^2 - 3 \left(\frac{abc}{a^2 + b^2 + c^2} \right)^2, \text{ și,}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3};$$

demonstra ie:rezultã imediat din teorema 2 i 1.9.

Teorema 3.a)Pentru $M(x,y,z) \in E_2$ existã rela ia:

$$xMA^2 + yMB^2 + zMC^2 = -p_c(M)$$

b)Pentru orice $X \in E_2$ existã rela ia:

$$xXA^2 + yXB^2 + zXC^2 = XM^2 - p_c(M), \text{ si}$$

$$xXA^2 + yXB^2 + zXC^2 \geq yza^2 + zxb^2 + xyc^2.$$

(demonstra ie în [1] pag.69)

Aplica ii ale teoremei 3 :

$$3.1.M \equiv G \Rightarrow XA^2 + XB^2 + XC^2 = 3XG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \forall X \in E_2;$$

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3};$$

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \forall X \in E_2,$$

cu egalitate pentru $X \equiv G$.

$$3.2.M \equiv I \Rightarrow aXA^2 + bXB^2 + cXC^2 = 2pXI^2 + abc, \forall X \in E_2;$$

$$aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc;$$

$$aXA^2 + bXB^2 + cXC^2 \geq abc, \forall X \in E_2,$$

cu egalitate pentru $X \equiv I$.

$$3.3.M \equiv I_a \Rightarrow bXB^2 + cXC^2 + abc = aXA^2 + 2(p-a)XI_a^2, \forall X \in E_2;$$

$$X \equiv I_a \Rightarrow bI_aB^2 + cI_aC^2 + abc = aI_aA^2; bXB^2 + cXC^2 + abc \geq aXA^2$$

cu egalitate pentru $X \equiv I_a$.

3.4.Daca $M(x, y, z) \in E_2$, atunci $\forall X \in E_2$ avem :

$$yza^2 + zxb^2 + xyc^2 \leq xXA^2 + yXB^2 + zXC^2 \leq XM^2 + R^2,$$

cu egalitate in s tan ga, pentru $X \equiv M$

si egalitate in dreapta, pentru $M \equiv O$.

De exemplu, pentru $M \equiv I \Rightarrow$

$$abc \leq aXA^2 + bXB^2 + cXC^2 \leq 2p(XI^2 + R^2).$$

$$3.5.Daca, X \equiv M \Rightarrow xMA^2 + yMB^2 + zMC^2 =$$

$$= yza^2 + zxb^2 + xyc^2 = R^2 - OM^2, \text{ si,}$$

$$xMA^2 + yMB^2 + zMC^2 \leq R^2, \text{ cu egalitate pentru } M \equiv O;$$

3.6.Daca, $X \equiv A \Rightarrow MA^2 = p_c(M) + zb^2 + yc^2$, de unde, rezulta :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3p_c(M) + (y+z)a^2 + (z+x)b^2 + (x+y)c^2.$$

Teorema 4. Dacă $M_k(x_k, y_k, z_k) \in E_2, k = \overline{1,2}$, atunci distanța între punctele M_1, M_2 este dată de relația:

$$M_1 M_2^2 = \sqrt{\begin{aligned} & (y_1 - y_2)(z_1 - z_2)a^2 + (z_1 - z_2)(x_1 - x_2)b^2 + \\ & + (x_1 - x_2)(y_1 - y_2)c^2 \end{aligned}}$$

(demonstrare în [1] pag.70).

Aplicații ale teoremei 4:

Utilizând coordonatele baricentrice (vezi exemplele date) și teorema 4 obținem următoarele relații:

$$4.1. OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}; 4.2. OH^2 = R^2(1 - 8 \cos A \cos B \cos C) =$$

$$9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2(1 + \cos A \cos B \cos C), \text{ de unde rezulta,}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ este, dreptunghic}$$

$$4.3. OI^2 = R^2 - 2Rr; HN = 2OI;$$

$$4.4. NI^2 = 9GI^2 = p^2 + 5r^2 - 16Rr \Rightarrow$$

$$p^2 + 5r^2 \geq 16Rr; 4.5. HI^2 = 4R(R + r) + 3r^2 - p^2 \leq 4R(R + r) + 3r^2;$$

$$4.6. \Gamma I^2 = r^2 \left[1 - \left(\frac{p\sqrt{3}}{4R + r} \right)^2 \right] \Rightarrow p\sqrt{3} \leq 4R + r;$$

$$4.7. LI^2 = \frac{4S^2 R(R + r)}{p^2 - r^2 - 4Rr};$$

$$4.8. GI^2 = \frac{4}{9(4R + r)^2} [p^2(4R^2 + 8Rr - 5r^2) - r(4R + r)^3] \Rightarrow$$

$$(2R - r)(2R + 5r)p^2 \geq r(4R + r)^3;$$

$$4.9. HI^2 = 4R^2 \left[1 - \frac{2p^2(2R - r)}{R(4R + r)^2} \right] \Rightarrow 2p^2(2R - r) \leq R(4R + r)^2.$$

Teorema 5. Dacă $M_k(x_k, y_k, z_k) \in E_2, k = \overline{1,2}$, atunci avem:

$$\overrightarrow{OM_1} \overrightarrow{OM_2} = R^2 - \frac{1}{2} [(y_1 z_2 + y_2 z_1)a^2 + (z_1 x_2 + z_2 x_1)b^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)c^2]$$

(demonstrare în [1] pag.71.).

Aplicații ale teoremei 5:

Folosind această teoremă obținem egalități și inegalități importante printre care cele ce urmează:

$$5.1. \overrightarrow{OGOM} = R^2 - \frac{1}{6}[(y+z)a^2 + (z+x)b^2 + (x+y)c^2]$$

$$5.1.1. \overrightarrow{OGOA} = R^2 - \frac{1}{6}(b^2 + c^2); OG \perp OA \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 6R^2, \text{ si } b^2 + c^2 \leq 6R^2$$

$$\Leftrightarrow m(AOG) \leq 90^\circ$$

$$5.1.2. \overrightarrow{OGOI} = R^2 - \frac{1}{6}(p^2 + r^2 - 2Rr), \text{ si } 2R(3R+r) \geq p^2 + r^2 \Leftrightarrow m(IOG) \leq 90^\circ, \text{ iar,}$$

$$2R(3R+r) = p^2 + r^2 \Leftrightarrow a = b = c, \text{ sau, } OI \perp OG;$$

$$5.1.3. \overrightarrow{OGON} = (R+r)^2 - \frac{p^2}{3}, \text{ si } p \leq \sqrt{3}(R+r) \Leftrightarrow m(NOG) \leq 90^\circ, \text{ iar,}$$

$$p = \sqrt{3}(R+r) \Leftrightarrow a = b = c, \text{ sau, } ON \perp OG;$$

$$5.2. \overrightarrow{OIO M} = R(R+r) - \frac{1}{2}(xbc + yca + zab);$$

$$5.2.1. \overrightarrow{OION} = R^2 + 5Rr - \frac{1}{2}(p^2 + r^2), \text{ si } 2R(R+5r) \geq p^2 + r^2$$

$$\Leftrightarrow m(ION) \leq 90^\circ, \text{ iar,}$$

$$2R(R+5r) = p^2 + r^2 \Leftrightarrow a = b = c, \text{ sau, } OI \perp ON;$$

$$5.2.2. \overrightarrow{OIOA} = R^2 + Rr - \frac{1}{2}bc, \text{ si } aR \geq (b+c)r \Leftrightarrow m(AOI) \leq 90^\circ, \text{ iar,}$$

$$aR = (b+c)r \Leftrightarrow a = b = c, \text{ sau, } OA \perp OI.$$

Teorema6.

Dacă

$M_k(x_k, y_k, z_k) \in E_2, k = \overline{1,2}, \text{ avem :}$

$$a) \overrightarrow{IM_1IM_2} = -4Rr + \frac{1}{2}[(z_1 + z_2)ab + (x_1 + x_2)bc + (y_1 + y_2)ca] -$$

$$- \frac{1}{2}[(y_1z_2 + y_2z_1)a^2 + (z_1x_2 + z_2x_1)b^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)c^2]$$

(demonstra ie în [1], pag.73)

$$b) \overrightarrow{GM_1GM_2} = \frac{2}{9}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{6}[(x_1 + x_2)a^2 + (y_1 + y_2)b^2 + (z_1 + z_2)c^2] -$$

$$- \frac{1}{2}[(y_1z_2 + y_2z_1)a^2 + (z_1x_2 + z_2x_1)b^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)c^2]$$

(demonstra ie în [1], pag.74)

$$c) \overrightarrow{MM_1MM_2} = p_c(M) + \frac{1}{2} \{ [y(z_1 + z_2) + z(y_1 + y_2) - (y_1z_2 + y_2z_1)]a^2 + \dots \}$$

(demonstra ie în [1], pag.75)

Observa ie. Cu ajutorul acestor rela ii remarcabile se pot determina ,în particular, produse scalare, distan e, egalită i i inegalită i utilizând puncte din mul imea:

$\{A, B, C, O, G, H, I, I_a, I_b, I_c, N, \Gamma, L\}$

asociată unui triunghi ABC. (**Exerci iu!**).

Mai fac observa ia că particularizări i unele extinderi ale coordonatelor baricentrice sunt abordate în lucrările [2] , [3] i articolele [4] , [5] . Un fapt care motivează studiul coordonatelor baricentrice este legătura acestora cu calculul vectorial recent (relativ) introdus în programele colare IX -XII .

Notă:Problemele rezolvate aici s-au vrut cât mai elegante;ele au fost alese dintre cele date la diferite concursuri sau publicate în diverse alte cărți sau reviste.

Bibliografie

- [1] .V.Nicula,Geometrie plană,Ed.Gil,2002.
- [2].N.Teodorescu, .a.,Culegere de probleme pentru concursurile de matematică,vol.5,S.S.M.R,București,1977.
- [3].M.Craioveanu,I.D.Albu,Geometrie afină și euclidiană,Ed.Facla,Timisoara,1982.
- [4] .T. Bârsan, Recreații matematice, nr. 1 / 2002;
- [5] .C. Coandă, Gazeta matematică, nr. 8 / 2005;
- [6].N.Stanciu, *Matematică gimnaziu & liceu*, Editura "Rafet", Rm. Sărat, 2007