Revista Electronică MateInfo.ro ISSN 2065 - 6432 Nr. Mai 2010 www.mateinfo.ro

O metodă de calcul al primitivelor

de Marian Teler, Profesor Costeşti, Judeţul Argeş
şi Marin Ionescu, Profesor Piteşti, Judeţul Argeş

În manualul de analiză matematică pentru clasa a XII-a, capitolul „Integrarea prin părţi”, sunt propuse o serie de exerciţii care necesită aplicarea de două sau mai multe ori a formulei de integrare prin părţi.

Văzând rezultatele, observăm că la anumite tipuri de funcţii se obţin anumite tipuri de primitive.

Propunem în continuare rezolvarea unor probleme de calcul al primitivelor prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi.

1. Fie $f : R \to R,\ f(x) = P(x)e^x, P \in R[X]$.

   Există o primitivă $F : R \to R,\ f(x) = Q(x)e^x$, unde $Q \in R[X]$, $grad(Q) = grad(P)$

   Din relaţia $F' = f$, obţinem $Q' + Q = P$

Exemple:

1.a. Fie $f : R \to R,\ f(x) = (x^3 - x + 1)e^x$. Să se determine $a,b,c \in R$ astfel încât funcţia $F : R \to R, F(x) = (x^3 + ax^2 + bx + c)e^x$ să fie o primitivă a funcţiei f.

Soluţie:

Din $Q' + Q = P$, rezultă $x^3 + (a+3)x^2 + (b+2a)x + b + c = x^3 - x + 1, (\forall) x \in R$

Identificând coeficienţii, obţinem sistemul:

$$\begin{cases} a+3=0 \\ b+2a=-1 \\ b+c=1 \end{cases},\quad \begin{cases} a=-3 \\ b=5 \\ c=-4 \end{cases} \text{ şi } F(x) = \left(x^3 - 3x^2 + 5x - 4\right)e^x$$

1.b. Generalizare:

Fie $f : R \to R,\ f(x) = (x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n)e^x$, $a_1, a_2, ...a_n \in R$.

Să se determine $b_1, b_2, ...b_n \in R$, astfel încât funcţia

$F : R \to R, F(x) = (x^n + b_1x^{n-1} + ... + b_n)e^x$ să fie o primitivă a funcţiei f.

Soluţie:

Luând $b_0 = 1$, din $Q' + Q = P$, obţinem $b_k = a_k - (n - k + 1)b_{k-1}$, $k \in \{1,2,...,n\}$

2. Fie $f : (0,\infty) \to R,\ f(x) = x^n \ln^k x$, $n,k \in N^*$. Să se determine $b_1, b_2, ...b_k \in R$, astfel încât funcţia $F : (0,\infty) \to R, F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln^k x + b_1 \ln^{k-1} x + ... + b_k)$ să fie o primitivă a funcţiei f.

Soluţie:

Din $F'(x) = f(x), (\forall) x \in (0,\infty)$, obţinem (considerând $b_0 = 1$),

$$b_i = \frac{k-i+1}{n+1}, i \in \{1,2,...,k\}$$

Exemplu: Fie $f : (0,\infty) \to R,\ f(x) = x^3 \ln^2 x$. Să se determine $a,b \in R$ astfel încât funcţia $F : (0,\infty) \to R, F(x) = \frac{x^4}{4}(\ln^2 x + a\ln x + b)$ să fie o primitivă a funcţiei f.

Din $F'(x) = f(x), (\forall) x \in (0,\infty)$, obţinem $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{8}, F(x) = \frac{x^4}{4}\left(\ln^2 x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\right)$

3. Fie $f: R \to R,\ f(x) = (a\sin x + b\cos x)e^x, a, b \in R$.

Să se determine $m, n \in R$, astfel încât funcţia $F: R \to R, F(x) = (m\sin x + n\cos x)e^x$

Soluție:

Din $F'(x) = f(x), (\forall)x \in R$, obţinem: $\begin{cases} m - n = a \\ m + n = b \end{cases}$, $\begin{cases} m = \dfrac{a+b}{2} \\ n = \dfrac{-a+b}{2} \end{cases}$

Exemplu:

Fie $f: R \to R,\ f(x) = (\sin x - \cos x)e^x$.

Să se determine $m, n \in R$, astfel încât funcţia $F: R \to R, F(x) = (m\sin x + n\cos x)e^x$ să fie o primitivă a funcţiei f.

Soluție: Avem $a = 1, b = -1$, rezultă $m = 0, n = -1$, $F(x) = (-\cos x)e^x$

4. Fie $f: R \to R,\ f(x) = P(x)\sin x + Q(x)\cos x, P, Q \in R[X]$.

Există $R, S \in R[X]$, $\max(gradR, gradS) \le \max(gradP, gradQ)$, astfel încât funcţia $F: R \to R, F(x) = R(x)\sin x + S(x)\cos x$ să fie o primitivă a funcţiei f.

Soluție: Din $F'(x) = f(x), (\forall)x \in R$, obţinem: $\begin{cases} R' - S = P \\ R + S' = Q \end{cases}$

Exemplu: Fie $f: R \to R,\ f(x) = (x^2 - x + 1)\sin x$. Să se determine $a, b, c, m, n, p \in R$, astfel încât funcţia $F: R \to R, F(x) = (ax^2 + bx + c)\sin x + (mx^2 + nx + p)\cos x$ să fie o primitivă a funcţiei f.

Soluție: Din $F'(x) = f(x), (\forall)x \in R$, obţinem: $\begin{cases} m = 1 \\ b + 2m = 0 \\ b - p = 1 \\ a = 0 \\ 2a - n = 1 \\ c + n = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \\ c = -1 \\ m = -1 \\ n = 1 \\ p = 1 \end{cases}$

$$F(x) = (2x - 1)\sin x + (-x^2 + x + 1)\cos x$$

5. Fie $f: R \to R,\ f(x) = e^x[P(x)\sin x + Q(x)\cos x], P, Q \in R[X]$. Există $R, S \in R[X]$, $\max(gradR, gradS) \le \max(gradP, gradQ)$, astfel încât $F: R \to R, F(x) = e^x[R(x)\sin x + S(x)\cos x]$ să fie o primitivă a funcţiei f.

Exemplu: Fie $f: R \to R,\ f(x) = xe^x \sin x$. Să se determine $a, b, m, n \in R$ astfel încât funcţia $F: R \to R, F(x) = e^x[(ax + b)\sin x + (mx + n)\cos x]$ să fie o primitivă a funcţiei f.

Soluție: Din $F'(x) = f(x), (\forall)x \in R$, obţinem: $\begin{cases} a - m = 1 \\ a + m = 0 \\ b + n + m = 0 \\ b - n + a = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = 0 \\ m = -\dfrac{1}{2}` \\ n = \dfrac{1}{2} \end{cases}$,

$$F(x) = \frac{1}{2}e^x[x\sin x + (-x + 1)\cos x]$$

6. Fie $f: I \to R, f(x) = \dfrac{a\sin x + b\cos x}{m\sin x + n\cos x}, a,b,m,n \in R$, iar I un interval de numere reale astfel încât $a\sin x + b\cos x \neq 0, (\forall) x \in I$. Există $\alpha, \beta \in R$ astfel încât $f(x) = \alpha + \beta\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, unde $u(x) = m\sin x + n\cos x$. Atunci, funcţia $F: I \to R, F(x) = \alpha x + \beta\ln|u(x)|$ este o primitivă a funcţiei f.

Exemplu: Fie $f: I \to R, f(x) = \dfrac{3\sin x - \cos x}{\sin x - \cos x}, I = \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Obţinem: $f(x) = 2 + \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, $u(x) = \sin x - \cos x$ şi $F: I \to R, F(x) = 2x + \ln|\sin x - \cos x|$

Observaţii:

- Exemplele rezolvate fac parte din exerciţiile propuse în manualele alternative de Analiză matematică pentru clasa a XII-a, capitolul „Integrarea prin părţi”, sau au fost propuse la concursuri şcolare şi în Gazeta matematică,
- Cititorul poate să aplice metoda expusă şi la alte exemple şi poate obţine şi generalizări, ca de exemplu pentru $f: (0,\infty) \to R, f(x) = x^{\alpha}\ln^k x, \alpha \in R - \{-1\}, k \in N^*$ sau $f: R \to R, f(x) = (a\sin\alpha x + b\cos\alpha x)e^{\beta x}, a,b,\alpha,\beta \in R$
- Se pot elabora programe pe calculator pentru rezolvarea unor probleme de calcul al primitivelor, ca de exemplu:

1.b. Generalizare:

.Fie $f: R \to R, f(x) = (x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n)e^x$, $a_1, a_2, ...a_n \in R$. Să se determine $b_1, b_2, ...b_n \in R$, astfel încât funcţia $F: R \to R, F(x) = (x^n + b_1x^{n-1} + ... + b_n)e^x$ să fie o primitivă a funcţiei f.

2. Fie $f: (0,\infty) \to R, f(x) = x^n\ln^k x$, $n,k \in N^*$. Să se determine $b_1, b_2, ...b_k \in R$, astfel încât funcţia $F: (0,\infty) \to R, F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}(\ln^k x + b_1\ln^{k-1} x + ... + b_k)$ să fie o primitivă a funcţiei f.

Obţinem următoarele programe Pascal pentru determinarea coeficienţilor :

$b_1, b_2, ...b_n$, (1.b),

```
Program Primitive;
  uses crt;
  var n,i:integer;
      a,b:array[0..100] of integer;
  begin
  ClrScr;
  write('n=');read(n);
  for i:=1 to n do
     begin
     write('a[',i,']=');read(a[i]);
     end.
  b[0]:=0;
  for i:=1 to n do
     begin
     b[i]:=a[i]-(n-i+1)*b[i-1];
     write('b[',i,]=',b[i],' ');
     end;
  readln;readln;
```

$b_1, b_2, ...b_k$, (2.)

```
Program Primitive;
 uses crt;
var n,k,i:integer;
 b:array[0..100] of real;
 begin
 ClrScr;
 write('n=');read(n); write('k=');read(k);
 b[0]:=1
 for i:=1 to k do
    begin
    b[i]:=-(k-i+1)*b[i-1]/(n+1);
    write('b[',i,]=',b[i],' ');
    end;
readln;readln;
end.
```

end.

- Se pot calcula primitive utilizând softul interactiv Maple.

Exemple:

1. `Int(x^2-4*x+3,x)=int(x^2-4*x+3,x);`

$$\int x^2-4x+3\,dx=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$$

2. `Int((x^3*ln(x)^2,x))=collect((int(x^3*ln(x)^2,x),x));`

$$\int x^3\ln(x)^2\,dx=\left(\frac{1}{4}\ln(x)^2-\frac{1}{8}\ln(x)+\frac{1}{32}\right)x^4$$

3. `Int((x^2-x+1)*sin(x),x)=collect(int((x^2-x+1)*sin(x),x),cos(x));`

$$\int (x^2-x+1)\sin(x)\,dx=(-x^2+1+x)\cos(x)+2\sin(x)\,x-\sin(x)$$

4. `Int(x*ln(x),x)=collect(int(x*ln(x),x),x);`

$$\int x\ln(x)\,dx=\left(\frac{1}{2}\ln(x)-\frac{1}{4}\right)x^2$$

5. `Int(sin(x)^3*cos(x)^2,x)=int(sin(x)^3*cos(x)^2,x);`

$$\int \sin(x)^3\cos(x)^2\,dx=-\frac{1}{5}\sin(x)^2\cos(x)^3-\frac{2}{15}\cos(x)^3$$

Bibliografie:

1. Analiză matematică pentru clasa a XII-a, Manuale alternative,
2. Gazeta matematică, Ediţia electronică,
3. Analiză matematică cu MAPLE, Lică Dionis, Bucureşti, 2003,
4. http://mateinfo.ro/