

**Probleme rezolvate  
cu inegalitati geometrice in triunghi  
pentru gimnaziu si liceu**

**Prof. Andrei Dobre**

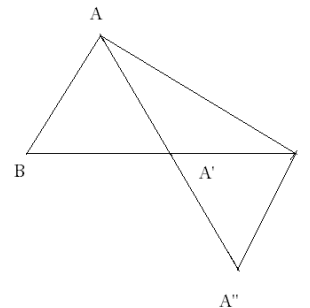
- 1. Sa se demonstreze ca o mediana a unui triunghi este mai mica decat semisuma laturilor alaturate cu ea.**

Solutie:

Fie triunghiul ABC si mediana AA' ; prelungim aceasta mediana cu o lungime [A'A''] ≡ [AA'] .

Se demonstreaza usor, congruenta triunghiurilor ABA' si CA'A'' ( cazul de congruenta , latura , unghi latura ), de unde rezulta [AB] ≡ [CA''].

In triunghiul ACA'' avem [AA''] < [AC] + [CA''] si, cum [A'A''] ≡ [AA''], rezulta ca  $AA' < \frac{AB+AC}{2}$ .



- 2. Sa se arate ca ,in triunghiul ABC, in care [ AB ] < [ AC ], avem ca [ AD ] < [ AC ], oricare ar fi D ∈ ( BC ).**

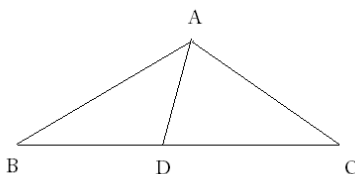
Solutie:

Cum din ipoteza [ AB ] < [ AC ], rezulta ca ∠B > ∠C.

Dar, ∠ADC > ∠B si ∠ADC > ∠C, conform unghiului exterior. Din ∠ADC > ∠B si ∠ADC > ∠C , urmeaza ca in triunghiul ADC avem [ AC ] > [ AD ].

**3.** Fie triunghiul ABC, in care  $m(\angle BAC) > m(\angle ABC) + m(\angle ACB)$  si fie D mijlocul segmentului [BC]. Sa se arate ca  $AD < \frac{BC}{2}$ .

Solutie:



Avem  $m(\angle BAC) = m(\angle BAD) + m(\angle DAC) > m(\angle ABC) + m(\angle ACB)$ , din ipoteza.

De aici rezulta : sau  $m(\angle BAD) > m(\angle ABC)$ , de unde  $BD \geq AD$  ; sau

$m(\angle DAC) > m(\angle ACB)$ , de unde  $DC > AD$ . Din  $BD > AD$  si  $DC > AD$ , adunandu-le, se obtine  $AD < \frac{BC}{2}$ .

**4.** Se ia un punct oarecare M in interiorul unui triunghi ABC .

Sa se demonstreze ca, suma  $MA + MB + MC$  este cuprinsa intre semiperimetrul si perimetrul triunghiului ABC.

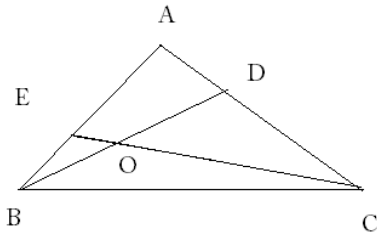
Solutie:

Din triunghiul MBC, MCA si MAB rezulta , respectiv , ca  $BC < MB + MC$  ,  $CA < MC + MA$  si  $AB < MA + MB$  ; adunandu-le, se obtine ca  $\frac{1}{2} ( AB + BC + CA ) < MA + MB + MC$ . In continuare, deoarece linia poligonala (franta) BAC inconjoara linia franta BMC , urmeaza ca  $MB + MC < AB + AC$ . Analog avem,  $MA + MC < AB + BC$  si  $MA + MB < AC + BC$ . Din aceste trei inegalitati , rezulta inegalitatea ceruta.

**5.** Fie ca O un punct in interiorul triunghiului ABC. Dreptele BO si CO intersecteaza AC si AB in D, respectiv E. Stiind ca unghiul  $\angle BAC$  este obtuz, sa se arate ca  $BD + CE > BE + ED + DC$  .

Solutie:

Din triunghiurile AEC, ABD și AED rezulta, respectiv, ca  $EC > AD + DC$ ,  $BD > AE + BE$  și  $ED < AE + AD$ . Apoi,  $EC + BD > AD + DC + AE + BE$  și, cum  $AE + AD > ED$ , urmează inegalitatea cerută.



**6.** În triunghiul ABC are loc inegalitatea  $BC > AC$ . Dacă AD și BE sunt înălțimi din A, respectiv din B, să se arate că  $BC + AD \geq AC + BE$ . Să se precizeze, apoi, când are loc egalitatea.

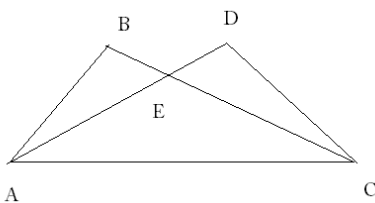
Soluție:

Notăm  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AD = h_a$ ,  $BE = h_b$ . Atunci, relația cerută se scrie:  $a + h_a \geq b + h_b$ , sau  $a + b \sin C \geq b + a \sin C$ , adică  $(a - b) \cdot (1 - \sin C) \geq 0$ .

Cum, prin ipoteză  $a > b$ , egalitatea are loc pentru  $\sin C = 1$ , adică pentru triunghiul dreptunghic în C.

**7.** Două triunghiuri sunt așezate astfel încât au o latură comună, iar alte două laturi se intersectează. Să se demonstreze că, suma lungimilor laturilor care se intersectează este mai mare decât suma lungimilor laturilor care nu se intersectează.

Soluție:



Fie AC latura comuna triunghiurilor ABC și ADC și, fie E punctul de intersecție al laturilor AD și BC. Din triunghiurile AEB și CDE, rezulta, respectiv, ca  $AE + BE > AB$  și  $EC + ED > CD$ , care, adunate membru cu membru, și tinând seama ca  $AE + ED = AD$ , iar  $BE + EC = BC$ , conduc la  $AD + BC > AB + CD$ .

**8. Medianele corespunzătoare laturilor BC și AC ale triunghiului ABC sunt perpendiculare. Sa se demonstreze ca  $\frac{1}{2} < \frac{BC}{AC} < 2$ .**

Soluție:

Fie AD, BE, CF, medianele triunghiului ABC și fie G punctul lor de intersecție. Notăm  $AB = c$ ,  $BC = a$  și  $AC = b$ .

Din triunghiul dreptunghic AGB, rezulta  $GF = \frac{c}{2}$ .

Construim paralelogramul ACBC' ( $AC \parallel BC'$  și  $AC' \parallel BC$ ). Cum  $CF = \frac{3c}{2}$ , urmează ca  $CC' = 3$ .

Folosind rezultatul cunoscut, anume ca "într-un paralelogram suma patratelor diagonalelor este egală cu suma patratelor tuturor laturilor", putem scrie:

$$(3c)^2 + c^2 = 2a^2 + 2b^2, \quad 5c^2 = a^2 + b^2.$$

Deoarece  $|a-b| < c < a+b$ , urmează ca  $5(a+b)^2 > a^2 + b^2$  și, pe de altă parte,  $5(a-b)^2 < a^2 + b^2$ .

Inegalitatea  $5(a-b)^2 < a^2 + b^2$  este echivalentă cu  $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{a}{b}\right) + 1 < 0$ , de unde rezulta  $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2$ .

**9. În triunghiul ABC, fie [BL bisectoarea unghiului  $\sphericalangle ABC$ ,  $L \in [AC]$ . Sa se arate ca  $BA > LA$  și  $BC > LC$ .**

Soluție:

Unul dintre unghiurile  $\sphericalangle BLA$ ,  $\sphericalangle BLC$  este mai mare sau cel puțin egal cu  $90^\circ$ . Fie  $m\angle(BLA) \geq 90^\circ$ ; atunci, din triunghiul ABL avem  $AB > AL$ .

Acum,  $m\angle(BLC) > m\angle(LBC)$ , deoarece  $\sphericalangle BLC$  este unghi exterior triunghiului ABL și  $\sphericalangle ABL \equiv \sphericalangle LBC$ . Atunci, din triunghiul BLC rezulta ca  $BC > LC$ .

**10.** Fie ABC un triunghi dreptunghic in A. Sa se arate ca  $AD > AB + AC - BC$ , unde D este piciorul inaltimii din A.

Solutie:

Inegalitatea din enunt mai poate fi scrisa:

$AD + BC > AB + AC$  sau  $(AB + AC)^2 > (AD + BC)^2$  si cum  $AB^2 + AC^2 = BC^2$ , iar  $AB \cdot AC = BC \cdot AD$ , ea devine  $AD^2 > 0$ , ceea ce este evident.

**11.** Sa se arate ca, daca a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi oarecare, atunci are loc inegalitatea  $b^2 + c^2 < a^2 + 2bc$ .

Solutie:

Din  $b^2 + c^2 < 2bc$ , obtinem succesiv:

$(b^2 + c^2 - 2bc) - a^2 < 0$ ,  $(b^2 - c^2) - a^2 < 0$ ,  $(b - c + a) \cdot (b - c - a) < 0$ , ultima fiind, evident, adevarata deoarece prima paranteza este pozitiva, iar a doua este negative.

**12.** Sa se demonstreze ca in orice triunghi ABC au loc inegalitatile:

1)  $h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a \leq p^2$

2)  $h_a + h_b + h_c < 2p$

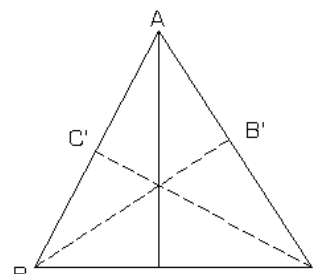
Solutie:

1) Se stie ca:  $S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$ , prin

$$\begin{aligned} \text{urmatoarele: } h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a &= \frac{2S}{a} \frac{2S}{b} + \frac{2S}{b} \frac{2S}{c} + \frac{2S}{c} \frac{2S}{a} = 4S^2 \left( \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) = \frac{4S^2(c+a+b)}{abc} = \\ &= \frac{4S}{abc} 2Sp = \frac{2rp^2}{R} \leq \frac{Rp^2}{R} = p^2 \end{aligned}$$

ceea ce conduce la:  $h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a \leq p^2$  cu egalitate in cazul triunghiului echilateral.

2) Fie triunghiul ABC si  $A' \in BC$ ,  $B' \in AC$ ,  $C' \in AB$



astfel încât  $AA' \perp BC, BB' \perp AC, CC' \perp AB$ .

**In triunghiul AA'B,  $m(\angle A') > m(\angle B)$ , ceea ce implica:**

$$c > h_a.$$

In triunghiul ACC',  $m(\angle C') > m(\angle A)$  și deci  $b > h_c$ ,

iar in triunghiul BB'C,  $(\angle B') > m(\angle C)$  de unde  $a > h_b$

Prin urmare,  $c > h_a, b > h_c$  și  $a > h_b$  ceea ce conduce la  $a+b+c > h_a+h_b+h_c$  și deci:  $h_a+h_b+h_c > 2p$

**13. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu  $m(\angle A) = 90^\circ$**

**Atunci are loc inegalitatea :**

$$h_a \leq \frac{p}{1 + \sqrt{2}}$$

Solutie:

Se știe ca :  $h_a = \frac{bc}{a}$  și  $p = \frac{a+b+c}{2}$ . Prin urmare, inegalitatea din enunț devine:

$$\frac{b-c}{a} \leq \frac{a+b+c}{2(1+\sqrt{2})} \Leftrightarrow 2(1+\sqrt{2})(bc) \leq b^2+c^2+(b+c)\sqrt{b^2+c^2} \quad (*)$$

Din relația  $(b-c)^2 \geq 0$  obținem  $\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} \geq \frac{b+c}{2}$ , iar  $b^2+c^2+(b+c)\sqrt{b^2+c^2} =$  deci pentru a demonstra (\*)

$$b^2+c^2+\sqrt{2}(b+c) \cdot \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} \geq b^2+c^2+\frac{\sqrt{2}(b+c)^2}{2}$$

$$b^2+c^2+\frac{\sqrt{2}(b+c)^2}{2} \geq 2(1+\sqrt{2})bc \Leftrightarrow$$

este suficient să verificăm:  $2b^2+2c^2+\sqrt{2}b^2+\sqrt{2}c^2+2\sqrt{2}bc \geq 4bc+4\sqrt{2}bc \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2(b^2+c^2-2bc)+\sqrt{2}(b^2+c^2-2bc) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(b-c)^2+\sqrt{2}(b-c)^2$$

care este adevărată. Egalitate avem dacă  $b=c$ , adică în cazul triunghiului dreptunghic isoscel.

**14. Sa se demonstreze ca in orice triunghi ABC au loc inegalitatile:**

1)  $m_a < p, m_b < p, m_c < p$

2)  $2m_a < b + c, 2m_b < c + a, 2m_c < a + b$

3)  $p < m_a + m_b + m_c < 2p$

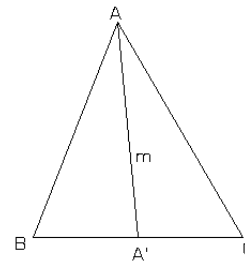
Solutie:

1) Fie triunghiul ABC și  $A' \in (BC)$

In triunghiul  $ABA'$ :  $m_a = \frac{c + a}{2}$ , iar in triunghiul  $ACA'$ :  $m_a = \frac{b + a}{2}$ ,

deci  $2m_a = a + b + c$ , de unde  $m_a < p$

Celelalte relatii se obtin in mod analog.



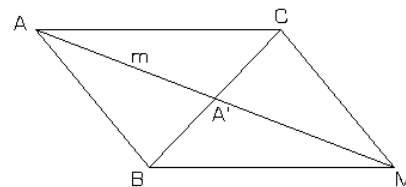
2) Fie triunghiul ABC și  $A' \in (BC)$ .

Consideram punctul M ca fiind simetricul lui A fata de mijlocul segmentului (BC)

Prin urmare  $AM = AA' + A'M = m_a + m_a$ .

Triunghiurile  $AA'C$  și  $MA'B$  sunt congruente (L.U.L) ceea ce implica:  $BM = AB = b$

In triunghiul ABM avem:  $AM < AB + BM$ , ceea ce implica  $2m_a < b + c$ .



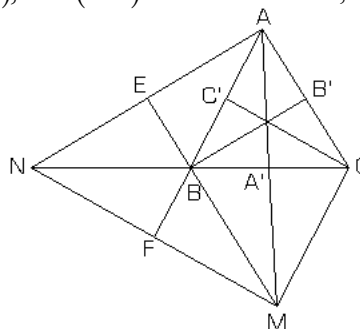
Celelalte relatii se obtin in mod similar

3) Fie triunghiul ABC și  $A' \in (BC), C' \in (AB), B' \in (AC)$  astfel incat  $AA', BB', CC'$  sunt mediane

conform punctului 2) avem:

$2m_a < b + c, 2m_b < b + c,$

$2m_c < a + b$  ceea ce implica



$$2(m_a + m_b + m_c) < 2(a + b + c)$$

adica  $m_a + m_b + m_c < 2p$  (\*)

Consideram punctul N ca fiind intersectia dreptei BC cu paralela prin A la mediana BB'. Notam cu  $\{E\} = AN \cap MB$ , unde M este simetricul

lui A fata de mijlocul segmentului (BC), iar cu  $\{F\} = AB \cap MN$ .

Observam ca AE $BB'$  este paralelogram de unde rezulta ca EB=AB'=b/2 și cu BM=AC=b, obtinem ME=3b/2.

In triunghiul MNA avem: NA' este mediana iar BE=ME/3 și BM=2ME/3 prin urmare, NA', ME și AF sunt mediane  $\{B\} = AF \cap ME \cap NA$ .

De asemenea, AM=2m<sub>a</sub>, NM=2m<sub>c</sub>, AN=2m<sub>b</sub>, iar  $ME = \frac{3b}{2}$ ;  $NA' = \frac{3a}{2}$ ;  $AF = \frac{3c}{2}$  (\*\*)

Conform relatiilor din punctul 2) vom avea in triunghiul ANM: 2AF<AN+AM, 2ME<MA+MN, 2NA'<NA+NM, dar având in vedere relatiile (\*\*) obtinem:

$3c < 2m_a + 2m_b$ ,  $3b < 2m_a + 2m_c$  de unde rezulta  $3(a+b+c) < 4(m_a+m_b+m_c)$  care este echivalenta cu :

$\frac{3p}{2} < m_a + m_b + m_c$ , dar  $p < \frac{3p}{2}$  și deci  $p < m_a+m_b+m_c$ , care impreuna cu (\*) ne da dubla inegalitate din enunt.

**15. Se noteaza cu M,N și P respectiv mijloacele laturilor (BC); (AC) și (AB) ale triunghiul ABC oarecare. Dreptele AM , BN și CP intersecteaza cercul circumscris triunghiul ABC in Q,S,T. Sa se arate ca:**

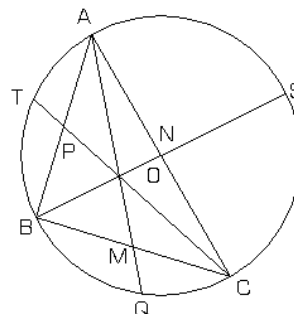
$$\frac{AM}{MQ} + \frac{BN}{NS} + \frac{CP}{PT} \geq 9$$

Solutie:

Puterea punctului M fata de cerc implica:

AM/MQ=BM/BC dar BM=MC=A/2 iar

AM=m<sub>a</sub> de unde rezulta  $\frac{AM}{MQ} = \frac{4m_a}{a^2}$  deci



$$\frac{AM}{MQ} = \frac{4m_a^2}{a^2}. \text{ In mod analog obținem } \frac{BN}{NS} = \frac{4m_b^2}{b^2}$$

și  $\frac{CP}{PT} = \frac{4m_c^2}{c^2}$ . Având cele trei relații și folosind teorema medianei avem:

$$\begin{aligned} \frac{AM}{MQ} + \frac{BN}{NS} + \frac{CP}{PT} &= \frac{4m_a^2}{a^2} + \frac{4m_b^2}{b^2} + \frac{4m_c^2}{c^2} = \\ &= \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{a^2} + \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{b^2} + \frac{2(b^2 + a^2) - c^2}{c^2} = \\ &= 2\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2}\right) + 2\left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2}\right) + 2\left(\frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2}\right) - \end{aligned}$$

$$- 3 \geq 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 3 = 9.$$

In concluzie  $\frac{AM}{MQ} + \frac{BN}{NS} + \frac{CP}{PT} \geq 9$ .

#### Bibliografie:

Ion Vârtopeanu, Olimpia Vârtopeanu – Geometrie plană pentru gimnaziu și liceu. Craiova, Editura Sibia 1994

Chiței, Gh. A. Metode pentru rezolvarea problemelor de geometrie. București, Editura Didactică și Pedagogică 1969