Partea întreagă a unui numar real
Câteva proprietăți cu mare aplicabilitate în probleme pentru concursuri

Definiția 1.

Funcția $f : R \to Z, \quad f(x) = [x]$ se numeşte ***funcția parte întreagă***.

- $[x]$ este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu numărul real x. De aici, avem că

$$[x] \le x < [x] + 1, (\forall) x \in R.$$

Exemple:

$[7] = 7$; $[-1] = -1$; $[0] = 0$; $[5{,}8] = 5$; $[-3{,}1] = -4$.

Definiția 2.

Funcția $f : R \to [0,1), \; f(x) = \{x\}$ se numeşte ***funcția parte fracționară***.

- $\{x\} = x - [x], (\forall) x \in R$; $0 \le \{x\} < 1$.

Exemple:

$\{7\} = 0$; $\{-1\} = 0$; $\{0\} = 0$; $\{5{,}8\} = 0{,}8$; $\{-3{,}1\} = 0{,}9$.

Oricare ar fi x număr real**,**

$$x = [x] + \{x\}$$

Proprietăți ale funcției parte întreagă

Proprietatea 1. $\quad f(x+y) \ge f(x) + f(y)$; $(\forall) x, y \in R$

Altfel scris: $[x+y] \ge [x] + [y] \; (\forall) x, y \in R$.

Proprietatea 2. $\quad f\left(\frac{[x]}{n}\right) = f\left(\frac{x}{n}\right), \; (\forall) n \in Z^*, \; (\forall) x \in R$

Altfel scris: $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right] \; (\forall) n \in Z^*, \; (\forall) x \in R$.

Proprietatea 3. $\quad f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f(2x) - f(x), \; (\forall) x \in R$

Altfel scris: $\left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x] - [x] \; (\forall) x \in R$ ***(identitatea lui Hermite).***

Demonstrație.

Fie $x \in R \Rightarrow x = [x] + \{x\}$; $[x] \in Z$, $\{x\} \in [0,1)$.

Distingem două cazuri: $0 \le \{x\} < \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} \le \{x\} < 1$.

- I. $0 \le \{x\} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \le \{x\} + \frac{1}{2} < 1$ (1) și $0 \le 2\{x\} < 1$ (2).

Avem: $\left[x + \frac{1}{2}\right] = \left[[x] + \{x\} + \frac{1}{2}\right] \overset{(1)}{\Rightarrow} \left[x + \frac{1}{2}\right] = [x]$ (3);

$[2x] = [2[x] + 2\{x\}] \overset{(2)}{\Rightarrow} [2x] = 2[x]$ (4).

Din (3) deducem: $\left[x + \frac{1}{2}\right] = 2[x] - [x] \overset{(4)}{\Rightarrow} \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x] - [x]$.

- II. $\frac{1}{2} \le \{x\} < 1 \Rightarrow 1 \le \{x\} + \frac{1}{2} < 1\frac{1}{2}$ (5) și $1 \le 2\{x\} < 2$ (6).

Avem: $\left[x + \frac{1}{2}\right] = \left[[x] + \{x\} + \frac{1}{2}\right] \overset{(5)}{\Rightarrow} \left[x + \frac{1}{2}\right] = [x] + 1 = 2[x] - [x] + 1$ (7);

$[2x] = [2[x] + 2\{x\}] \overset{(6)}{\Rightarrow} [2x] = [2x] = 2[x] + 1 \overset{(7)}{\Rightarrow} \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x] - [x]$.

Așadar: $\left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x] - [x]$, $(\forall) x \in R$.

Proprietatea 4.

$$f(x) + f\left(x + \frac{1}{n}\right) + f\left(x + \frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(x + \frac{n-1}{n}\right) = f(nx),\ (\forall) x \in R,\ (\forall) n \in Z^*$$

Altfel scris: $[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$ $(\forall) x \in R$, $(\forall) n \in Z^*$.

Problema 1

Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{x}{5}\right] - \left[\frac{x}{10}\right] = 2$

Rezolvare:

Notez $\frac{x}{10} = y \Rightarrow [2y] - [y] = 2$.

Aplic identitatea lui Hermite şi obțin $\left[y + \frac{1}{2}\right] = 2$

$$2 \le y+\frac{1}{2}<3 \Rightarrow 4 \le 2y+1<6 \Rightarrow 3 \le 2y<5 \Rightarrow \frac{3}{2} \le y<\frac{5}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} \le \frac{x}{10}<\frac{5}{2}$$
$$\Rightarrow x \in [15,25)$$

Problema 2

Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} [x]+\{y\}=1,2 \\ \{x\}+[y]=3,3 \end{cases}$$

Din prima ecuaţie $\{y\}-0,2=1-[x]$. Dar $[x]\in Z$, $\{y\}\in[0,1) \Rightarrow 1-[x]\in Z$ si $[x]\in Z$, $\Rightarrow [x]=1$, $\{y\}=0,2$

Din a doua ecuaţie $\{x\}=0,3$ si $[y]=3 \Rightarrow x=1,3; y=3,2$

Problema 3

Să se calculeze suma $\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{4}\right]+\left[\frac{n+4}{8}\right]+\ldots+\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]+\ldots$, $n\in N$.

(O.I.M.-Anglia)

<u>*Rezolvare:*</u>

Avem S = $\left[\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{n}{8}+\frac{1}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right]+\ldots$

$$\overset{P3}{\Rightarrow} S=\left[2\cdot\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{2}\right]+\left[2\cdot\frac{n}{4}\right]-\left[\frac{n}{4}\right]+\left[2\cdot\frac{n}{8}\right]-\left[\frac{n}{8}\right]+\ldots+\left[2\cdot\frac{n}{2^{k+1}}\right]-\left[\frac{n}{2^{k+1}}\right]+\ldots$$

$$\Rightarrow S=[n]-\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{2^2}\right]+\left[\frac{n}{2^2}\right]-\ldots-\left[\frac{n}{2^k}\right]+\left[\frac{n}{2^k}\right]-\left[\frac{n}{2^{k+1}}\right]+\left[\frac{n}{2^{k+1}}\right]-\ldots$$

$$\Rightarrow S=[n].$$

Bibliografie

1. Matematică, manuale pentru clasa a IX-a(M. Ganga , Editura Mathpress, 2003; I. D. Ion, N. Angelescu, A. Ghioca, Editura Teora,1999);
2. Culegere de probleme de algebra pentru clasele IX-XII, Gh. A. Schneider;
3. Teme şi probleme de matematică, M. Ganga, Editura Tehnică.