Polinoame simetrice si ecuatii algebrice

Autori:
Prof. Georgescu Carmen
Gr. Sc. Administrativ si de Servicii "Victor Slavescu", Ploiesti

Am scris acest articol pornind de la numeroasele probleme de algebra cu polinoame simetrice intalnite in culegerile de probleme sau propuse la concursurile scolare.

Mai precis, incerc sa reamintesc cateva proprietati ale polinoamelor simetrice, antisimetrice si omogene si sa prezint cateva aplicatii interesante ale acestora .

Reamintesc urmatoarele:

Definitie:

Fie R un inel comutativ si unitar. Polinomul $P(X_1,X_2,\ldots,X_n)\in R[X_1,X_2,\ldots,X_n]$ se numeste ***polinoam simetric*** daca pentru orice permutare $\sigma\in S_n$, avem:

$$P(X_1,X_2,\ldots,X_n)= P(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)},\ldots,X_{\sigma(n)})$$

Polinoamele $s_1,s_2,\ldots,s_n$ din $R[X_1,X_2,\ldots,X_n]$, definite prin

$s_1= X_1+X_2+\ldots+X_n$

$s_2= X_1X_2+ X_2X_3+\ldots +X_{n-1}X_n$

……………………………………………..

$s_n = X_1X_2\ldots X_n$

se numesc ***polinoame simetrice fundamentale in nedeterminatele $X_1,X_2,\ldots,X_n$.***

Obsevatie:

Pentru orice $k=\overline{1,n}$, polinomul s_k este simetric omogen de gradul k si reprezinta suma a C_n^k monoame.

Teorema fundamentala a polinoamelor simetrice

FieR un inel comutativ si unitar.Fiecare polinom simetric f din $R[X_1,X_2,\ldots,X_n]$ se poate exprima in mod unic ca polinom de polinoame simetrice fundamentale. Cu alte cuvinte, exista un unic polinom $g\in R[X_1,X_2,\ldots,X_n]$ astfel incat

$f=g(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ unde $s_1,s_2,\ldots,s_n$ sunt polinoame simetrice fundamentale.

Problema 1. Exprimati polinomul de mai jos ca polinom de polinoame simetrice fundamentale:

$P= X_1^4+X_2^4+X_3^4-2 X_1^2X_2^2-2 X_2^2X_3^2-2 X_1^2X_3^2$

Rezolvare: Exponentii termenilor principali ai polinoamelor care vor ramane dupa eliminarea succesiva a termenilor principali vor fi: (4,0,0), (3,1,0),(2,2,0),(2,1,1). Polinomul f va fi de forma:

$P= s_1^4 +as_1^2s_2+b s_2^2+c s_1s_3$,$a,b,c\in\mathbf{R}$.

Determinam coeficientii a,b,c inlocuind cu valori numerice nedeterminatele X_1,X_2,X_3.

X_1	X_2	X_3	s_1	s_2	s_3	P
1	0	1	2	1	0	0=16+4a+b
1	-1	1	1	-1	-1	-3=1-a+b-c
0	1	-1	0	-1	0	0=b

Obtinem a=-4, b=0, c=8 de unde $P= s_1^4 -4s_1^2s_2 +8 s_1s_3$

Formulele lui Newton

Daca $x_1, x, \ldots, x_n$ sunt radacinile unui polinom $P=X^n+a_1 X^{n-1}+ a_2 X^{n-2}+\ldots+a_n$ atunci conform relatiilor lui Viete, intre polinoamele simetrice elementare si coeficientii polinomului P exista relatiile $s_1= -a_1$, $s_2= a_2,\ldots, s_n= (-1)^n a_n$

Ne propunem sa calculam suma puterilor de forma:

$S_k=x_1^k+ x_2^k+\ldots+ x_n^k$, k=1,2,..,n.

Cu notatiile de mai sus, polinomul P se mai poate scrie:

$P= X^n -s_1 X^{n-1}+ s_2 X^{n-2}-\ldots+(-1)^n s_n$.

De aici prin calcule succesive se obtin formulele

$S_1=s_1$

$S_2 -s_1S_1= -2s_2$

$S_3 -s_1S_2+s_2S_1=3s_3$

$S_4 -s_1S_3+s_2S_2- s_3S_1= -4s_4$

....

$S_{n-1} -s_1S_{n-2}+s_2S_{n-3} - \ldots+(-1)^{n-2}s_{n-2} S_1= (-1)^n (n-1)s_{n-1}$, numite *Formulele lui Newton.*

Interpretand relatiile lui Newton ca un sistem de ecuatii liniare si rezolvand cu ajutorul teoremei lui Cramer, se obtine pentru S_k expresia:

$$S_k= \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0\ldots & 0 \\ 2s_2 & s_1 & 1\ldots & 0 \\ 3s_3 & s_2 & s_1\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ ks_k & s_{k-1} & s_{k-2}\ldots & s_1 \end{vmatrix}$$

Pentru a putea calcula aceste formule si atunci cand $k\geq n$,consideram polinomul:

$x^pP= x^{n+p} -s_1x^{n+p-1}+ s_2x^{n+p-2}-\ldots+(-1)^n s_nx^p$, unde $p\in\mathbf{N}$.

Daca luam o radacina x_k a lui P, aceasta verifica ecuatia:

$x_k^pP= x_k^{n+p} -s_1x_k^{n+p-1}+ s_2x_k^{n+p-2}-\ldots+(-1)^n s_nx_k^p$,k=1,2,..,n. Insumand de la 1 la n obtinem

$S_{n+p} -s_1S_{n+p-1}+s_2S_{n+p-2} - \ldots+(-1)^n s_nS_p= 0$. Dand valori succesive lui p obtinem S_n apoi S_{n+1} etc.

Observatii:

- Daca luam $S_p=x_1^p+ x_2^p+\ldots+ x_n^p$ si $S_q=x_1^q+ x_2^q+\ldots+ x_n^q$ cu $p,q\in\mathbf{N}$ atunci

$S_p S_q= (x_1^p+ x_2^p+\ldots+ x_n^p)(x_1^q+ x_2^q+\ldots+ x_n^q)=\sum_{i=1}^{n}x_i^{p+q} + \sum_{i\neq j} x_i^p x_j^q = S_{p+q} +\sum_{i\neq j} x_i^p x_j^q \Rightarrow$

$\sum_{i\neq j} x_i^p x_j^q = S_p S_q -S_{p+q}$ cu $i,j=1,2,\ldots,n$.

- Daca $p=q$ obtinem $\sum_{i\neq j} x_i^p x_j^p = (S_p)^2 -S_{2p}$ cu $i,j=1,2,\ldots,n$.
- Putem extinde la $\sum_{i\neq j\neq k} x_i^p x_j^p x_k^r= S_p S_q S_r -S_{p+q} S_r -S_{p+r}S_q-S_{r+q} S_p+ -S_{p+q+r}$ cu $i,j,k=1,2,\ldots,n$.
- Daca $p=q=r$ atunci $\sum_{i\neq j\neq k} x_i^p x_j^p x_k^r=\frac{1}{6}(S_p^3 -3S_{2p} S_p+2 S_{3p})$.

Aplicatii

<u>*Problema 2*</u>***-Tabara Nationala de Matematica din Baia Mare 16.I.1989***

Se dau numerele reale x,y,z,t astfel incat $x+y+z+t = x^7+y^7+z^7+t^7=0$.
Sa se arate ca $x(x+y)(x+z)(x+t)=0$.(1)

Rezolvare: Notam $b=\sum xy$, $c=\sum xyz$ si $d=xyzt \Rightarrow x,y,z,t$ sunt radacinile ecuatiei
$u^4 +bu^2 -cu+d=0$ (2)
Notam $S_k= \sum x^k$
Aplicand formulele lui Newton $\Rightarrow S_1=0$, $S_2= -2b$, $S_3= 3c$, $S_4=2b^2-4d$
Inmultim ecuatia (2) cu u^n si insumam $\Rightarrow S_{n+4}= -bS_{n+2}+ c S_{n+1} -d S_n$
Pentru $n=1$ avem $S_5= -bS_3+ c S_2 -d S_1 \Rightarrow S_5= -5bc$
si pentru $n=3$ avem $S_7= -bS_5+ c S_4 -d S_3 \Rightarrow S_7= 7c(b^2-d)$.
Deci $c=0$ sau $b^2=d$.

1. $c=0\Rightarrow x,y,z,t$ sunt radacinile ecuatiei bipatrate $u^4 +bu^2 +d=0$, care sunt de forma $\pm u_1$, $\pm u_2$ si enuntul (1) este verificat.
2. $b^2=d\Rightarrow S_4= -2b^2$ deci $b=0$ si $S_4=0\Rightarrow x=y=z=t=0$ si enuntul (1) este
   $x^4+y^4+z^4+t^4\geq 0$ si $-2b^2\leq 0$ verificat.

<u>*Problema 3*</u>

Sa se calculeze suma $\sum_{i\neq j} x_i^3x_j^2$ unde x_i si x_j sunt radacinile ecuatiei
$x^3+ 3x-5=0$

Rezolvare: $S_3=x_1^3+ x_2^3+ x_3^3$ si $S_2=x_1^2+ x_2^2+ x_3^2$
Atunci $S_3 S_2 = S_5+ \sum_{i\neq j} x_i^3x_j^2 \Rightarrow \sum_{i\neq j} x_i^3x_j^2= S_3 S_2 -S_5$
Din $s_1=0$, $s_2=3$ si $s_3=5\Rightarrow S_1= s_1=0$, $S_2= s_1^2 -2 s_2= -6$, $S_3= s_1^3 -3s_1s_2 +3 s_3= 15$
$x^3+ 3x-5=0 \;\left|\, x^2\right. \Rightarrow x^5+ 3x^3-5x^2=0 \Rightarrow S_5+ 3S_3-5S_2 =0\Rightarrow S_5= -3S_3+-45-30= -75$
$\Rightarrow \sum_{i\neq j} x_i^3x_j^2=15\,(-6)+75= -90+75= -15.$

Definitie: Spunem ca un polinom de mai multe nedeterminate P(…,x,y…)este *antisimetric in x si y* daca
P(…,y,x,…) = -P(…,x,y…)

Exemplu: P(x,y)=x-y; P(y,x)= -P(x,y)
Daca vom considera un astfel de polinom ca polinom de o singura nedeterminata, de ex. Q(x), atunci facand x=y, avem Q(y)= P(…,y,y,…) =0
Am obtinut Q(y)=0 adica Q este divizibil prin x-y.

Proprietati ale polinoamelor simetrice si antisimetrice:
1. Suma a doua polinoame simetrice este un polinmom simetric.
2. Diferenta a doua polinoame simetrice este un polinmom simetric.
3. Produsul a doua polinoame simetrice este un polinmom simetric.
4. Catul a doua polinoame simetrice care se divid este un polinmom simetric.
5. Catul a doua polinoame antisimetrice care se divid este un polinmom simetric.
6. Daca P este un polinom antisimetric in x si y, atunci el este divizibil cu x-y.
7. Daca P este un polinom simetric in x si y se divide cu x-y, atunci el se divide si cu $(x-y)^2$.
8. Daca P este un polinom simetric in x si y se divide cu $(x-y)^{2n-1}$, atunci el se divide si cu $(x-y)^{2n}$.
9. Daca P este un polinom antisimetric in x si y se divide cu $(x-y)^{2n}$, atunci el se divide si cu $(x-y)^{2n+1}$.
10. Daca un polinom simetric in x,y,z se divide cu x-y , el se divide si cu y-z si cu z-x, deci si cu produsul (x-y)(y-z)(z-x).
11. Catul dintre un polinom simetric si unul antisimetric este un polinom antisimetric.

Exemplu: De remarcat polinomul antisimetric Vandermonde

$P(x_1,x_2,\dots,x_n)=\prod_{i<j}(x_i-x_j)$ care cuprinde $\frac{n(n-1)}{2}$ factori si tot atatea schimbari posibile de semn pentru cele n nedeterminate.

<u>*Problema 4*</u> Sa se descompuna in factori polinomul
$P(x,y,z)=x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$

Rezolvare: Polinomul este omogen de grad patru si observam ca este antisimetric in x si y, deci este divizibil prin x-y. Analog , este divizibil si prin y-z si z-x.
Deci P este divizibil prin (y-z) (z-x) (x-y). Fiind un polinom de grad patru va fi divizibil si printr-un polinom omogen de grad unu.
Avem: $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)=(y-z)(z-x)(x-y)(ax+by+cz)$
Dand valori lui x=0,y=1,z= -1 obtinem b=c
x=1,y=2,z= -1deci a+2b-c=-2
x=1,y=0,z= -1 si a=c.
Am obtinut a=b=c=-1 deci

$$P(x,y,z)= -(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z)$$

Observatie: Daca P(x,y) este un polinom omogen de gradul n
$P(x,y)= a_0x^n+ a_1x^{n-1}y+ a_2x^{n-2}y^2+\dots+a_{n-1}xy^{n-1} +a_n y^n \quad a_kx^{n-k}y^k$
Se mai poate scrie

$$P(x,y)=\sum_{k=0}^{n} a_kx^{n-k}y^k$$

Daca luam x=ty, obtinem

$P(y,ty)= a\sum_{k=0}^{n}{}_k(ty)^{n-k} y^k = y^n \sum_{k=0}^{n} a_kt^{n-k}$ care este produsul dintre monomul y^n si polinomul de o singura nedeterminata $Q(t)= \sum_{k=0}^{n} a_kt^{n-k}$

Aplicatii

Problema 5 Sa se arate ca polinomul $x^{2n}+ px^ny^n+ qy^{2n}$ sa fie divizibil prin x^2+xy+y^2 este necesar sa avem:
$n= 3k$ si $p+q+1= 0$ sau $n\neq 3k$ si $p=q=1$

Rezolvare: Avem un polinom omogen de gradul 2n. Conform observatiei de mai sus, facem substitutia x=ty. Obtinem:
$x^{2n}+ px^ny^n+ qy^{2n} =y^{2n}(t^{2n}+ pt^n +q)$;
$x^2+xy+y^2= y^2(t^2 +t+1)$
Problema revine la a cerceta conditiile de divizibilitate ale polinomului $P(t) = t^{2n}+ pt^n +q$ prin polinomul $Q(t)= t^2 +t+1$.
Q/P daca orice radacina α a lui Q este radacina si a lui P.
Daca $Q(\alpha)=0$, adica $\alpha^2+ \alpha+1 =0$ rezulta $\alpha^3 =1$.
Conditia $P(\alpha) =0$ ne da $\alpha^{2n} +p\, \alpha^n +q=0$
n poate avea una din formele: $n=3k+r$, cu $k\in\mathbf{N}$ si $r\in 0,1,2\}$.
Vom avea :

$$\alpha^{6k+2r} + p\alpha^{3k+r} +q =0$$

Cunoscand ca $\alpha^3 =1$ obtinem $\alpha^{2r} + p\alpha^r +q =0$.
Asta inseamna ca :

A) $p+q+1=0$ daca $r=0$, adica pentru $n=3k$;
B) $\alpha^2 +p\, \alpha +q=0$ daca $r=1$ pentru $n=3k+1$;
$\alpha^4 +p\, \alpha^2 +q=0$ daca $r=2$ pentru $n=3k+2$;

Tinand cont ca $\alpha^2+ \alpha+1 =0$ si $\alpha^3 =1$, obtinem ca:
$\alpha^2 +p\, \alpha +q= - \alpha-1+p\, \alpha+q = \alpha(p-1)+q-1=0$ deci $p=1$, $q=1$
respectiv
$\alpha^4 +p\, \alpha^2 +q= \alpha+ p(-1- \alpha)+q= \alpha(1-p)-p+q=0$ de unde $p=1$, $q=1$.

Problema 6 - ***O. I. M nr. 17 (Burgas, Bulgaria, 1975), propusa de Anglia, 8 puncte.***

Sa se afle toate polinoamele P de doua variabile cu proprietatile:

i. $P(tx, ty) = t^n P(x, y)$ $\forall x, y, z\in R$, unde $n\in Z$, n pozitiv , $n\geq 2$
(P- omogen de grad n in x, y) ;

ii. $P(a+b, c) + P(b+c, a) + P(c+a, b) = 0, \quad \forall a, b, c \in R$;
iii. $P(1, 0) = 1$.

Rezolvare :
Fie a= b= c= y => $3P(2y, y) = 0 \Rightarrow P(2y, y) = 0 \Rightarrow P(x, y) \vdots (x-2y)$ (1)
Fie a= b= x si c= -2x
$$\Rightarrow P(2x, -2x) + P(-x, x) + P(-x, x) = 0 \quad (2)$$
Din (2) , **i.** $\Rightarrow 2^n P(x, -x) + 2P(-x, x) = 0$.(3)
Fie a= x, b= -x, c= 0
$$\Rightarrow P(0,0) + P(-x, x) + P(x, -x) = 0 \quad (4);$$
Dar $P(0,0) = 1$ (conform **i.**)
Din (3), (4) $\Rightarrow (2^n - 2)P(x, -x) = 0 \Rightarrow P(x, -x) = 0$ ($n \geq 2$)
$$\Rightarrow P(x, y) \vdots (x+y) \ (n \geq 2) \ (5).$$
Fie $P_1(x, y) = \dfrac{P(x,y)}{x+y}$. Acest polinom verifica proprietatile :

i') P_1- omogen de grad n-1 in x, y, adica $P(tx, ty) = t^{n-1} P(x, y) \ \forall x, y, z \in R$, unde $n \in Z$, n pozitiv ; $n \geq 2$ **;**
ii') $P_1(a+b, c) + P_1(b+c, a) + P_1(c+a, b) = 0, \quad \forall a, b, c \in R$;
iii') $P_1(1, 0) = 1$, deoarece

$P_1(tx, ty) = \dfrac{t^n P(x,y)}{t(x+y)} = t^{n-1} P_1(x,y) \ \forall \ x, y, z \in R$, unde $n \in Z$, n pozitiv ; $n \geq 2$ si P_1 are gradul n- 1 conform relatiei (5) ;
$P_1(a+b, c) + P_1(b+c, a) + P_1(c+a, b) = \dfrac{P(a+b,c) + P(b+c,a) + P(c+a,b)}{a+b+c} = 0$, pentru $a+b+c \neq 0$;

$P_1(1, 0) = \dfrac{P(1,0)}{1+0} = 1$.
Deci avem ca $P(x,y) = P_1(x,y)(x+y) = P_2(x, y)(x+y)^2 = \ldots = P_{n-1}(x, y)(x+y)^{n-1}$ (cu un rationament similar celui precedent) .(6)
Din (1), (6) rezulta ca $P(x, y) \vdots (x-2y)(x+y)^{n-1} \Rightarrow$ exista $q \in R^*$ a. i.
$$P(x, y) = q(x-2y)(x+y)^{n-1};$$
Dar $P(1, 0) = 1$, rezulta ca q = 1.
Asadar $P(x, y) = (x-2y)(x+y)^{n-1}$.

Bibliografie

1. Aritmetica si algebra ……………..…...C. Nastasescu, C.Nita, Cvraciu;
2. Culegere de Exercitii si probleme de algebra…….I.Stamate si I. Stoian;
3. Culegere de Probleme de matematica……………………….M. Cocuz;
4. Gazeta Matematica pentru elevi
5. Olimpiadele internationale de matematica ale elevilor…....I. Cuculescu;
6. Polinoame si ecuatii algebrice………..L. Panaitopol, I. C. Draghicescu;
7. Probleme de algebra ………………….………C. Cosnita si F. Turtoiu;
8. Recueil D'Algebre Superieure………………...D. Faddeev, I. Sominski.