Subiecte propuse pentru antrenamete la concursuri matematice 2009

Prof. Ionescu Nicoleta Agenna,
Şcoala nr. 194 „ Marin Sorescu", Bucureşti

1. **Să se determine toate tripletele de numere reale (a,b,c) astfel încât să respecte condițiile:**

a+b+c=2 şi
$2ab-c^2=4$

A. (2, 2, 2) B. (2, -2 , 3) C. (2, 2, -2) D. (1, 1, -2) E(2, 2, 1)

Soluție (posibilă):

Substituim pe c din prima relație şi o înlocuim în cea de-a doua: c=2-(a+b)
$2ab-[2-(a+b)]^2=4 \rightarrow 2ab-[4-4(a+b)+(a+b)^2]=4 \rightarrow 2ab-4+4(a+b)-a^2-2ab-b^2=4 \rightarrow$
$a^2+b^2-4a-4b+8=0 \rightarrow (a-2)^2+(b-2)^2=0$ de unde se deduce a=2, b=2 şi c=-2.
Raspuns corect C

2. Să se rezolve inecuația în mulțimea numerelor reale:
$x+214\sqrt{x} \le 2007$

A. [0, 81] B. (0, 78) C. {0, 1, 2, ….79, 80} D. (0, 81) E. (0, 81]

Soluție posibilă:

Condiția de existență pentru radical: $x \ge 0$.
Notăm $\sqrt{x}=t \ge 0$ de unde deducem: $x=t^2$. Inecuația devine: $t^2+214t \le 2007$ de unde obținem:
$t^2+214t-2007 \le 0$.$t^2+223t-9t-2007 \le 0$,adică $t(t+223)-9(t+223) \le 0$; $(t-9)(t+223) \le 0$
$t-9 \le 0$ şi $t+223 \ge 0$ sau $t-9 \ge 0$ şi $t+223 \le 0$
$t \in [-223,9]$, dar cum $t \ge 0$ avem $t \in [0,9]$ şi $x \in [0,81]$.
Raspuns corect A

3. Sa se determine restul r al impartirii numarului :

A=$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ..... \cdot (2n+1)$ + 2009 la 1309, n$\in$N, n≥ 8.

A. r=699 B. r=700 C. r= 1308 D. r=600 E. r=2009

Solutie :
Descompunem numarul 1309 = $7 \cdot 11 \cdot 17$;
Deoarece n≥ 8 => 2n+1 ≥ 17, astfel incat , in produsul numerelor
$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... 11 \cdot ... \cdot 17 \cdot ...(2n+1)$ regasim factorii primi : 7, 11, 17 si cum operatia de inmultire are proprietatea de asociativitate, prin asocierea acestora vom obtine ca produsul este divizibil cu 1309.
2009=1309+700
A se poate scrie:
A= M_{1309} +1309+700 =M_{1309} +700. Cum 700 <1309 => restul impartirii lui A la 1309 este 700.
Catul va fi : $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot ...(2n+1)+1$

Raspuns corect B

4. Fie numărul P= $2004^{n^2+n} \cdot 2007^{p^2+2} \cdot 2009^{m^2+m+1}$ **cu n, m, p numere naturale nenule. Calculați ultima cifră a lui P.(discuție după numărul p).**

A. 2 sau 5 B. 1 sau 3 C. 2 sau 6 D. 3 sau 4 E. 2 sau 9

Soluție :

- **$n^2+n=n(n+1)$ = număr par pentru orice n natural.**

Deci U(2004^{n^2+n})=U(4^{2k})=6 ;

- **$m^2+m+1=m(m+1)+1$ = număr impar pentru orice m număr natural .**

Deci U(2009^{m^2+m+1})=U(9^{m^2+m+1})=U(9^{2k+1})=9;

- **Pentru calculul ultimei cifre a lui 2007^{p^2+2} vom stabili mai întâi care sunt resturile posibile ale împăririi lui p^2+2 la 4.**

$\boxed{\text{Fie p =4x}}$ atunci $p^2+2=(4x)^2+2=M_4+2$, deci restul la împărțirea cu 4 este 2 şi în acest caz U (2007^{p^2+2})=U(7^2)=9.
$\boxed{\text{Fie p=4x+1}}$ atunci $p^2+2=(4x+1)^2+2= M_4+1+2= M_4+3$, deci restul la împărțirea cu 4 este 3 şi în acest caz U (2007^{p^2+2})=U(7^3)=3.
$\boxed{\text{Fie p=4x+2}}$ atunci $p^2+2=(4x+2)^2+2=M_4+2$ şi ultima cifră va fi 9.
$\boxed{\text{Pentru p=4x+3}}$, $p^2+2= (4x+3)^2+2 =M_4+9+2=M_4+3$ şi ultima cifră va fi 3.

In acest caz sintetizând situațiile care apar conchidem că:
Pentru p=4x sau 4x+2 U(P)=U(6·9·9)=6
Pentru p=4x+1 sau 4x+3 U(P)=U(6·3·9)=2.
U(P) $\in \{2,6\}$.

Raspuns corect C.

5. Să se determine numărul $\overline{mate}$ ştiind că $\overline{mate}$ nu este divizibil cu 3, câtul împărțirii cu 10 al lui $\overline{ma}+\overline{et}$ este m+e şi $m^3 + 1=e$. (cls. a V-a)

A. 2000 B. 2009 C. 9002 D. 1111 E. 2525

$\overline{ma}+\overline{et}$ = 10m+a+10e+t

Din T. Î obțin : 10m+a+10e+t = 10(m+e) => a+t=0 ⇔ a=t=o

Cum e cifră => m $\in$ { 1,2 } deci e $\in$ { 2, 9 } Numerele sunt : 1002 care nu convine fiind divizibil cu 3 şi 2009, numărul $\overline{mate}$.

Raspuns corect B.