

## CONSTRUCȚIA INELULUI $\mathbf{Z}$

### 1. Noțiunea de grup. Grup abelian

Spunem că o mulțime  $M$  este o structură algebrică, dacă pe  $M$  s-au definit una sau mai multe operații (legi de compoziție) și, eventual alte tipuri de relații binare, care satisfac un număr de axiome, numite axiome de structură.

**Definiția 1.1:** Se numește grup o pereche  $(\mathbf{G}, *)$ , în care  $\mathbf{G}$  este o mulțime nevidă, iar „ $*$ ” o lege de compoziție internă pe  $\mathbf{G}$ , și care satisface axiomele:

1. Legea de compoziție este asociativă, adică oricare ar fi  $x, y, z \in \mathbf{G}$ ,  
 $(x * y) * z = x * (y * z)$ .
2. Există un element neutru  $e \in \mathbf{G}$ , astfel încât pentru orice  $x \in \mathbf{G}$ ,  
 $x * e = e * x = x$ .
3. Pentru orice  $x \in \mathbf{G}$ , există un element  $x' \in \mathbf{G}$  cu proprietatea  
 $x * x' = x' * x = e$ ,  
 adică orice element din  $\mathbf{G}$  este simetrizabil.
4. Dacă operația  $*$  este comutativă, adică, dacă pentru orice  $x, y \in \mathbf{G}$ ,  
 $x * y = y * x$ ,  
 grupul  $(\mathbf{G}, *)$  se numește comutativ sau abelian.

**Observația 1.2:** Mulțimea numerelor întregi  $\mathbf{Z}$  înzestrată cu operația de adunare, notată „ $+$ ”, formează o structură de grup abelian  $(\mathbf{Z}, +)$ , dar față de înmulțire  $\mathbf{Z}$  nu are structură de grup, deoarece nu satisface axioma 3.

### 2. Noțiunea de inel. Inel comutativ. Inel unitar

Pe o mulțime se pot introduce mai multe legi de compoziție. Un caz important îl constituie acela în care o mulțime este înzestrată cu două legi de compoziție, legate între ele printr-o anumită proprietate. În acest context se înscrie conceptul (structura) de inel. În continuare vom lua în considerare ca legi de compoziție operațiile de adunare (+) și înmulțire ( $\cdot$ ), fără a uita însă că, în general, legile de compoziție pot fi niște operații oarecare.

**Definiția 2.1:** Fie  $\mathbf{I}$  o mulțime nevidă, înzestrată cu două legi de compoziție pe  $\mathbf{I}$ . Spunem că  $\mathbf{I}$

are o structură de inel în raport cu operațiile de adunare (+) și înmulțire ( $\cdot$ ), dacă sunt satisfăcute următoarele axiome:

1. Perechea  $(\mathbf{I}, +)$ , formată din mulțimea  $\mathbf{I}$  și legea de compoziție (+), este un grup comutativ (abelian).
2. Mulțimea  $\mathbf{I}$  este închisă față de înmulțire, adică: oricare ar fi  $x, y \in \mathbf{I}$ ,  
 $x \cdot y \in \mathbf{I}$ .
3. Înmulțirea este distributivă față de adunare, adică pentru orice  $x, y, z \in \mathbf{I}$ ,  
 $x(y+z) = xy + xz$  și  $(y+z)x = yx + zx$ .

Inelul  $I$  va fi notat cu  $(I, +, \cdot)$ , punând în evidență în acest fel rolul diferit al celor două operații, prima operație fiind întotdeauna cea față de care mulțimea  $I$  are structură de grup comutativ.

După cum se vede din definiția dată, mulțimea  $I$  are o structură mai săracă cu privire la cea de-a doua operație, cea multiplicativă, deoarece se cere să fie satisfăcută numai proprietatea de parte stabilă. Operația multiplicativă poate avea însă și alte proprietăți pe lângă aceasta.

**Definiția 2.2:** Inelul  $(\mathbf{I}, +, \cdot)$  se numește inel asociativ, dacă legea de compoziție multiplicativă ( $\cdot$ ) este asociativă, adică pentru orice  $x, y, z \in \mathbf{I}$ , avem

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

**Definiția 2.3:** Inelul  $(\mathbf{I}, +, \cdot)$  se numește inel comutativ, dacă legea de compoziție multiplicativă este comutativă, adică pentru orice  $x, y \in \mathbf{I}$ , avem

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

**Definiția 2.4:** Inelul  $(\mathbf{I}, +, \cdot)$  se numește inel unitar (inel cu element unitate) dacă legea de compoziție multiplicativă are element unitate, adică există un element notat cu  $\mathbf{1}$ ,  $\mathbf{1} \in \mathbf{I}$ , astfel încât, pentru orice  $x \in \mathbf{I}$  avem

$$x \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot x.$$

Se înțelege că un inel  $(I, +, \cdot)$  poate fi inel asociativ, comutativ și cu element unitate, spre exemplu mulțimea numerelor întregi  $\mathbf{Z}$  formează inel comutativ și cu element unitate în raport cu adunarea și înmulțirea numerelor întregi.

### 3. Mulțimi echivalente. Numere naturale. Operații cu numere naturale

#### 3.1 Mulțimi echivalente

**Definiția 3.1.1:** Două mulțimi:  $A$  compusă din elementele:  $a, b, c, \dots$  și  $B$  compusă din elementele:  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  se numesc echivalente atunci când elementele lor se pot asocia în perechi:

$$(a, \alpha); (b, \beta); (c, \gamma); \dots$$

astfel încât nici un element din cele două mulțimi să nu scape acestei asocieri și nici unul să nu se găsească în două perechi. O asemenea relație între cele două mulțimi este o relație de echivalență și se notează  $A \sim B$ .

Din felul cum a fost definită relația rezultă următoarele proprietăți:

- determinarea:  $A \sim B$  sau  $A \not\sim B$ ;
- reflexivitatea:  $A \sim A$ ;
- simetria:  $A \sim B$  implică  $B \sim A$ ;
- tranzitivitatea: dacă  $A \sim B$  și  $B \sim C$ , atunci  $A \sim C$ .

Această relație de echivalență împarte mulțimile în clase de echivalență în felul următor: două mulțimi fac parte din aceeași clasă dacă sunt echivalente, în caz contrar, ele aparțin la clase diferite. O clasă este caracterizată de o proprietate comună tuturor mulțimilor care o compun, proprietate independentă de natura elementelor acestor mulțimi. Această proprietate este puterea clasei, numărul cardinal, sau mărimea clasei.

#### 3.2 Numere naturale

**Definiția 3.2.1:** Numim număr natural o clasă de echivalență de mulțimi finite (o mulțime se numește finită dacă nu este de aceeași putere cu nici una din submulțimile sale proprii).

Astfel, proprietatea caracteristică a tuturor mulțimilor compuse dintr-un singur element, care formează clasa de echivalență respectivă se numește unu și se scrie  $1$ . Proprietatea caracteristică a clasei de echivalență formată din mulțimile care conțin un element și încă un element se numește doi și se scrie  $2$  etc.

În felul acesta se formează mulțimea  $N$  a numerelor naturale, care este compusă din elementele:

$$1; 2; 3; \dots; n; \dots,$$

la care s-a adăugat și zero înaintea numărului  $1$ . Zero este notat cu  $0$  și caracterizează clasa de

echivalență a mulțimii vide.

Mulțimea  $N$  satisface următoarele cinci *axiome ale lui Peano*:

### **3.3 Axiomele lui Peano**

1. Zero este un număr natural.
2. Orice număr natural  $n$  are un succesori, pe care îl notăm  $n^+$ .
3. Zero nu este succesoriul nici unui număr natural.
4. Două numere naturale care au același succesori sunt egale.
5. Dacă  $A$  este o submulțime a lui  $N$  ( $A \subset N$ ), care conține pe zero ( $0 \in A$ ) și care dacă conține pe  $n$  va conține și pe succesoriul  $n^+$ , atunci  $A=N$ .

Între elementele mulțimii  $N$  se pot stabili legi de compoziție internă (sau operații interne). Astfel, fiecărei perechi ordonate  $(a,b)$  aparținând mulțimii produs  $N \times N$  îi putem face să corespundă un element  $c$ , aparținând lui  $N$ , cu ajutorul unei legi de compoziție internă, numită adunare.

### **3.4 Operații cu numere naturale**

**Definiția 3.4.1:** Adunarea notată prin  $+$  este definită prin recurență cu ajutorul următoarelor două proprietăți:

1.  $n+0=n$ ;
2.  $n+p^+=(n+p)^+$ .

Din aceste relații rezultă că:

$$n^+=n+1.$$

Într-adevăr, avem:

$$n+1=n+0^+=(n+0)^+=n^+.$$

Proprietatea a doua se mai poate scrie astfel:

$$n+(p+1)=(n+p)+1,$$

ceea ce exprimă că, dacă  $n+m$  este definită pentru  $m=p$ , ea se deduce și pentru  $m=p+1$ , rezultând că  $m+n$  este determinată pentru orice  $m$ .

### 3.5 Proprietățile adunării

**Teorema 3.5.1:** *Au loc următoarele afirmații:*

1. *Adunarea este asociativă, adică: oricare ar fi  $n, p, r \in \mathbb{N}$ :*

$$(n+p)+r=n+(p+r).$$

**Demonstrație:** Egalitatea se verifică pentru  $r=0$ :

$$(n+p)+0=n+p \text{ și } p+0=p, \text{ deci } (n+p)+0=n+(p+0)=n+p.$$

Să arătăm că dacă egalitatea este adevărată pentru  $r$ , va fi adevărată și pentru  $r^+$ . Avem:

$$(n+p)+r^+=[(n+p)+r]^+=[n+(p+r)]^+=n+(p+r)^+=n+(p+r^+).$$

Egalitatea este adevărată pentru orice  $r \in \mathbb{N}$ .

2. *Adunarea este comutativă, adică: oricare ar fi  $n, p \in \mathbb{N}$ ,*

$$n+p=p+n.$$

**Demonstrație:** Demonstrăm mai întâi pentru  $p=0$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ . Avem:

$$n+0=n;$$

să arătăm că

$$0+n=n.$$

Această egalitate este verificată pentru  $n=0$ . Să arătăm că dacă este verificată pentru  $n$  este de asemenea verificată pentru  $n^+$ . Avem:

$$0+n^+=(0+n)^+=n^+.$$

Prin urmare, pentru orice element  $n \in \mathbb{N}$  avem:

$$n+0=0+n=n.$$

Să arătăm același lucru pentru  $p=1$ , astfel încât să avem:

$$n^+=n+1=1+n.$$

Trebuie să arătăm că egalitatea:

$$1+n=n+1$$

este adevărată, pentru orice număr natural  $n$ . Ea este adevărată pentru  $n=0$ . Presupunem că este adevărată și pentru  $n$ , adică

$$1+n=n+1$$

și demonstrăm că este adevărată și pentru  $n^+$ . Din:

$$1+n=n+1 \text{ rezultă } (1+n)^+=(n+1)^+,$$

două numere naturale egale au același succesori. Avem:

$$(1+n)^+=1+n^+ \text{ și } (n+1)^+=n+1^+=n+(1+1)=(n+1)+1=n^++1.$$

Deci ipoteza  $l+n=n+l$  implică  $n^++l=l+n^+$ . Egalitatea  $l+n=n+l$  este adevărată, pentru orice număr natural. Să demonstrăm că egalitatea

$$p+n=n+p,$$

care am văzut că este adevărată pentru orice  $n$ , dacă  $p$  este egal cu  $0$  sau  $1$ , este verificată de orice  $p$  număr natural. Presupunem că este adevărată pentru  $p$ , adică:

$$p+n=n+p,$$

de unde:

$$(p+n)^+=(n+p)^+.$$

Avem:

$$(p+n)^+=n+p^+=p+(n+1)=p+(l+n)=(p+1)+n=p^++n.$$

De asemenea avem:

$$(n+p)^+=n+p^+.$$

Prin urmare,

$$n+p^+=p^++n.$$

Deci egalitatea

$$n+p=p+n$$

este verificată oricare ar fi numerele naturale  $n$  și  $p$ .

### 3.6 Înmulțirea numerelor naturale

Altă operație internă pe mulțimea numerelor întregi este înmulțirea.

**Definiția 3.6.1:** Fiecărei perechi ordonate  $(n,p)$  de numere naturale îi putem face să-i corespundă un număr natural numit produs, pe care îl notăm  $np$ ,  $n \cdot p$  sau  $n \times p$ .

Această corespondență este o lege de compoziție internă sau o operație internă numită înmulțire, notată cu  $\cdot$  (un punct) sau  $\times$ .

Înmulțirea este definită prin următoarele două egalități:

1.  $n \times 0 = 0$ ;
2.  $np^+ = np + n$ .

**Teorema 3.6.2:** Au loc următoarele afirmații:

1. Oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ , avem

$$n \times 1 = n.$$

**Demonstrație:** Într-adevăr:

$$n \times 1 = n \times 0^+ = (n \times 0) + n = n.$$

2. Suma a  $p$  elemente toate egale cu  $n$  este egală cu  $pn$ .

**Demonstrație:** După definiția înmulțirii avem:

$$n \times 1^+ = n \times 1 + n = n + n = 2n.$$

Dacă suma

$$S_p = n_1 + n_2 + \dots + n_p,$$

unde toți termenii sunt egali cu  $n$  este egală cu  $pn$ , atunci deducem că:

$$S_{p+1} = S_p + n = np + n = n \times p^+ = (p+1)n.$$

Prin urmare oricare ar fi  $p$  avem:

$$S_p = np.$$

Înmulțirea este distributivă față de adunare, adică oricare ar fi  $n, p, q \in \mathbb{N}$  este adevărată relația:

$$n(p+q) = np + nq.$$

Este adevărată pentru  $q=0$  oricare ar fi  $n$  și  $p$ :

$$n(p+0) = np + n \cdot 0 = np.$$

O presupunem adevărată pentru  $q$  și demonstrăm că este adevărată și pentru  $q^+$ . Avem:

$$n(p+q^+) = n(p+q)^+ = n(p+q) + n = np + nq + n = np + nq^+.$$

Deci relația este adevărată oricare ar fi numerele naturale  $n, p$  și  $q$ .

Înmulțirea se mai bucură și de proprietățile de asociativitate și comutativitate, care pot fi dovedite cu ajutorul definiției și a inducției complete.

**Teorema 3.6.3:** *Au loc următoarele afirmații:*

1.  $(np)q = n(pq)$ ;
2.  $np = pn$ .

Operațiile de adunare și înmulțire sunt definite pentru orice pereche de numere naturale, adică sunt definite peste tot în mulțimea  $\mathbb{N}$ .

Operația inversă adunării, scăderea și operația inversă înmulțirii, împărțirea nu sunt posibile pentru orice pereche ordonată de numere naturale.

### **3.7 Relația de ordine în $\mathbb{N}$**

**Definiția 3.7.1:** *Fie două numere naturale oarecare  $n$  și  $p$ . Spunem că  $p$  este cel mult egal cu  $n$  sau că  $n$  este mai mare sau egal cu  $p$ , dacă există un număr natural  $d$ , astfel încât*

$$n = p + d.$$

Notăm această relație dintre  $n$  și  $p$  prin:

$n \leq p$  sau  $n \geq p$ .

**Teoremă 3.7.2:** Fiind date două numere naturale  $n$  și  $p$  are loc una și numai una dintre relațiile:

$n < p$  sau  $n \geq p$ .

Relația definită prin simbolul  $\geq$  între elementele mulțimii  $N$  este o relație de ordine, deoarece este:

- reflexivă:  $n \geq n$ ;
- antisimetrică: dacă  $n \geq p$  și  $p \geq n$ , atunci  $n = p$ ;
- tranzitivă: dacă  $n \geq p$  și  $p \geq r$ , atunci  $n \geq r$ ;

Mulțimea  $N$ , în care a fost stabilită această relație, este o mulțime (total) ordonată.

#### 4. Mulțimea numerelor întregi

##### 4.1 Construcția mulțimii numerelor întregi

Vom arăta în continuare că mulțimea numerelor întregi  $Z$  formează inel asociativ, comutativ și cu element unitate, în raport cu adunarea și înmulțirea numerelor întregi, notat  $(Z, +, \cdot)$ .

În mulțimea numerelor naturale  $N$  scăderea nu este întotdeauna posibilă. Diferența  $n - p$  nu există decât dacă  $n \geq p$  sau, altfel spus, ecuația

$$x + p = n$$

nu are soluții în  $N$  decât dacă  $n \geq p$ .

A lua o pereche de numere  $n$  și  $p$ , într-o anumită ordine în mulțimea  $N$ , înseamnă a lua un element din mulțimea produs  $N \times N$ . Se pot determina în mulțimea  $N \times N$  două submulțimi, una  $P$ , formată din elementele  $\alpha = (n, p)$ , în care  $n \geq p$  și  $n - p$  este un număr natural, alta  $P'$ , formată din elementele  $\alpha' = (n', p')$ , în care  $n' < p'$ .

Fie  $q$  un număr natural.

Toate elementele mulțimii  $N \times N$  care pot fi puse sub forma:

$$\alpha_p = [(p+q), p]$$

aparțin submulțimii  $P$ . Pentru orice element al acestei submulțimi avem:

$$(p+q) - p = q,$$

corespunzând numărului natural  $q$ .

Două elemente ale submulțimii  $P$ ,

$$\alpha_1=(n_1,p_1) \text{ și } \alpha_2=(n_2,p_2)$$

care corespund aceluiași număr natural sunt legate între ele printr-o relație binară  $\mathfrak{R}$ , definită în mulțimea  $P$  prin:

$(n_1 - p_1) \in \mathbb{N}$  și  $(n_2 - p_2) \in \mathbb{N}$  implică  $\alpha_1 \mathfrak{R} \alpha_2$ , unde:

$$n_1 - p_1 = n_2 - p_2.$$

Egalitatea:

$$n_1 - p_1 = n_2 - p_2$$

este în mulțimea  $P$  echivalentă cu

$$n_1 + p_2 = n_2 + p_1,$$

dar această egalitate este verificată și de celelalte elemente din  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  care nu aparțin mulțimii  $P$ .

Definim astfel o relație binară  $\mathfrak{R}'$  în  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  prin:

$\alpha_1 \mathfrak{R}' \alpha_2$  dacă și numai dacă  $n_1 + p_2 = n_2 + p_1$ .

**Teorema 4.1.1:** Relația  $\mathfrak{R}'$  este o relație de echivalență.

**Demonstrație:** Într-adevăr, relația este:

- reflexivă:  $\alpha_1 \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  implică  $\alpha_1 \mathfrak{R}' \alpha_1$ , deoarece:

$$n_1 + p_1 = n_1 + p_1;$$

- simetrică:  $\alpha_1 \mathfrak{R}' \alpha_2$  implică  $\alpha_2 \mathfrak{R}' \alpha_1$ , deoarece:

$$n_1 + p_2 = n_2 + p_1 \text{ implică } n_2 + p_1 = n_1 + p_2;$$

- tranzitivă:  $\alpha_1 \mathfrak{R}' \alpha_2$  implică  $n_1 + p_2 = n_2 + p_1$ ;

$\alpha_2 \mathfrak{R}' \alpha_3$  implică  $n_2 + p_3 = n_3 + p_2$ , de unde:

$$n_1 + p_2 = n_2 + p_1 = n_2 + p_1 = n_1 + p_2 \text{ sau}$$

$$(n_1 + p_3) + (p_2 + n_2) = (n_3 + p_1) + (p_2 + n_2)$$

(am folosit asociativitatea și comutativitatea adunării numerelor naturale).

De unde

$$n_1 + p_3 = n_3 + p_1 \text{ (regularitatea numerelor naturale în raport cu adunarea).}$$

Avem deci:

$$\alpha_1 \mathfrak{R}' \alpha_3.$$

Relația  $\mathfrak{R}'$  fiind o relație de echivalență determină o partiție a lui  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  în  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \mathfrak{R}'$  clase de echivalență. Mulțimea  $\mathbb{Z}$  a acestor clase de echivalență este mulțimea numerelor întregi.

Notăm cu  $a = (\overline{n, p})$  clasa de echivalență (sau numărul întreg) care conține elementul  $\alpha = (n, p) \in \mathcal{N}^2$ . Spunem că  $\alpha$  este un reprezentant a lui  $a$ . Orice element poate reprezenta clasa de echivalență respectivă, determinând-o.

#### 4.2 Adunarea numerelor întregi

**Definiția 4.2.1:** Suma a două elemente ale mulțimii  $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ :  $\alpha_1 = (n_1, p_1)$  și  $\alpha_2 = (n_2, p_2)$  este un element  $\alpha_3 = (n_3, p_3)$  definit prin

$$n_3 = n_1 + n_2, \quad p_3 = p_1 + p_2.$$

Adunarea în  $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$  este o lege de compunere internă definită peste tot.

**Teorema 4.2.2:** Suma a două elemente  $\alpha_1 = (n_1, p_1)$  și  $\alpha_2 = (n_2, p_2)$  echivalente, respectiv cu  $\alpha_1' = (n_1', p_1')$  și  $\alpha_2' = (n_2', p_2')$ , este echivalentă cu suma  $\alpha_1' + \alpha_2'$ .

**Demonstrație:** Avem:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 = (n_3, p_3),$$

$$\alpha_1' + \alpha_2' = \alpha_3' = (n_3', p_3'),$$

în care:

$$n_3 = n_1 + n_2, \quad p_3 = p_1 + p_2,$$

$$n_3' = n_1' + n_2', \quad p_3' = p_1' + p_2'.$$

Numerele  $\alpha_3$  și  $\alpha_3'$  sunt echivalente atunci când:

$$n_3 + p_3' = n_3' + p_3,$$

adică:

$$(n_1 + n_2) + (p_1' + p_2') = (n_1' + n_2') + (p_1 + p_2).$$

Primul membru se poate scrie:

$$(n_1 + p_1') + (n_2 + p_2'),$$

iar al doilea

$$(n_1' + p_1) + (n_2' + p_2).$$

Dar  $\alpha_1$  și  $\alpha_1'$  sunt echivalente, deci

$$n_1 + p_1' = n_1' + p_1,$$

la fel  $\alpha_2$  și  $\alpha_2'$  sunt echivalente, deci

$$n_2 + p_2' = n_2' + p_2.$$

Avem:

$$(n_1 + p_1') + (n_2 + p_2') = (n_1' + p_1) + (n_2' + p_2).$$

Prin urmare cele două elemente  $\alpha_3$  și  $\alpha_3'$  sunt echivalente.

**Consecința 4.2.3:** Clasa de echivalență a sumei a două elemente din  $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$  depinde de clasa de echivalență a fiecăruia din aceste elemente, dar nu depinde de reprezentantul ales în fiecare din aceste clase.

**Definiția 4.2.4:** Se numește sumă a două numere întregi  $\mathbf{a}_1$  și  $\mathbf{a}_2$ , care au ca reprezentanți respectiv pe  $\alpha_1$  și  $\alpha_2$ , numărul întreg  $\mathbf{a}_3$  care admite ca reprezentant  $(\alpha_1 + \alpha_2)$ .

### 4.3 Proprietățile adunării numerelor întregi

**Teorema 4.3.1:** Au loc următoarele afirmații:

1. Adunarea pe  $\mathbf{Z}$  este o lege de compoziție internă comutativă.

**Demonstrație:** Fie:  $a_1 = (\overline{n_1, p_1})$  și  $a_2 = (\overline{n_2, p_2})$ . Atunci avem:

$$a_1 + a_2 = \left[ (\overline{n_1 + n_2}), (\overline{p_1 + p_2}) \right]$$

$$a_2 + a_1 = \left[ (\overline{n_2 + n_1}), (\overline{p_2 + p_1}) \right],$$

deci:

$$a_1 + a_2 = a_2 + a_1.$$

2. Adunarea pe  $\mathbf{Z}$  este o lege de compoziție internă asociativă.

**Demonstrație:** Fie:  $a_1 = (\overline{n_1, p_1})$ ;  $a_2 = (\overline{n_2, p_2})$ ;  $a_3 = (\overline{n_3, p_3})$ . Atunci avem:

$$(a_1 + a_2) + a_3 = (\overline{n, p}), \text{ unde } \begin{cases} n = (n_1 + n_2) + n_3 \\ p = (p_1 + p_2) + p_3 \end{cases},$$

$$a_1 + (a_2 + a_3) = (\overline{n', p'}), \text{ unde } \begin{cases} n' = n_1 + (n_2 + n_3) \\ p' = p_1 + (p_2 + p_3) \end{cases}.$$

Asociativitatea numerelor naturale implică:

$$n = n' \text{ și } p = p'$$

deci:

$$[(a_1 + a_2) + a_3] = [a_1 + (a_2 + a_3)],$$

ca având același reprezentant.

3. Adunarea pe  $\mathbf{Z}$  admite (un) element neutru.

**Demonstrație:** Fie elementul  $e = (\overline{n, n})$ ; avem:

$$(\overline{n, n}) = (\overline{0, 0}),$$

oricare ar fi  $n$ , deoarece

$$n + 0 = 0 + n.$$

Fie  $a = (\overline{n, p})$ ; avem:

$$a + e = e + a = [(\overline{n+0}), (\overline{p+0})] = (\overline{n, p}) = a.$$

Deci  $e$  este element neutru pentru adunare.

4. Fiecare element din  $\mathbf{Z}$  are un simetric (sau opus) față de operația de adunare pe  $\mathbf{Z}$ .

**Demonstrație:** Oricărui element  $a_1 = (\overline{n, p})$  îi putem face să-i corespundă un element  $a_2 = (\overline{p, n})$ , astfel încât:

$$a_1 + a_2 = a_2 + a_1 = [(\overline{n+p}), (\overline{n+p})] = (\overline{0, 0}) = e.$$

În mulțimea  $\mathbf{Z}$  în care s-a definit operația adunării, care este asociativă, fiecare element posedă un simetric (opus) și unul singur. Notăm cu  $-a$  simetricul lui  $a$ .

**Teorema 4.3.2:** Simetricul (opusul) sumei este egal cu suma simetricelor (opusurilor).

**Demonstrație:** Notând cu  $a'$  și  $b'$  simetricii lui  $a$  și  $b$ , avem:

$$(a+b) + (a'+b') = [(a+b) + a'] + b' = [a + a' + b] + b' = (e+b) + b' = b + b' = e..$$

**Teorema 4.3.3:** Ecuația

$$x + b = a, \quad a, b \in \mathbf{Z},$$

admite în  $\mathbf{Z}$  o singură soluție și numai una.

**Demonstrație:** Dacă  $x$  există, notând cu  $b'$  simetricul lui  $b$  avem:

$$(x+b) + b' = b' + a = x + (b+b') = x + e = x,$$

deci dacă  $x$  există și el este egal cu  $b' + a$ .

Dar oricare ar fi  $a$  și  $b$  avem:

$$(b' + a) + b = a + (b' + b) = a.$$

Ecuația admite o singură rădăcină:

$$x = b' + a.$$

#### 4.4 Grup abelian în raport cu adunarea

Mulțimea numerelor întregi  $\mathbf{Z}$ , pe care s-a stabilit operația de adunare, formează un grup, deoarece adunarea posedă următoarele trei proprietăți:

1. Este asociativă;
  2. Admite un element neutru  $e = (0, 0)$ ;
  3. Orice element  $a$ , al mulțimii  $\mathbf{Z}$ , are un simetric  $a'$  (în cazul adunării, un opus).
- Adunarea este și comutativă, deci formează un grup comutativ sau abelian.

#### 4.5 Înmulțirea numerelor întregi

**Definiția 4.5.1:** Numim produs a două elemente  $(n_1, p_1)$  și  $(n_2, p_2)$  elementul  $(n_3, p_3)$ , în care:  
 $n_3 = n_1 n_2 + p_1 p_2$  și  $p_3 = n_1 p_2 + n_2 p_1$ .

**Teorema 4.5.2:** Operația de înmulțire în  $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$  păstrează relația de echivalență  $\mathfrak{R}'$ .

**Demonstrație:** Pentru a demonstra aceasta este suficient să înlocuim un element  $(n_1, p_1)$  sau  $(n_2, p_2)$  printr-un element echivalent; vom obține un produs  $(n_3', p_3')$  echivalent cu  $(n_3, p_3)$ .

Înlocuind, de exemplu, pe  $(n_2, p_2)$  obținem:

$$a_3' = (\overline{n_3', p_3'}), \text{ unde } \begin{cases} n_3' = n_1 n_2' + p_1 p_2' \\ p_3' = n_1 p_2' + n_2' p_1. \end{cases}$$

$a_3$  și  $a_3'$  sunt echivalente dacă

$$n_3 + p_3' = n_3' + p_3;$$

avem:

$$n_3 + p_3' = n_1 n_2 + p_1 p_2 + n_1 p_2' + n_2' p_2 = n_1 n_2 + p_2' + p_1 p_2 + n_2'$$

$$n_3 + p_3' = n_1 n_1' + p_1 p_2' + n_2 p_1 + n_2 p_1 = n_1 n_1' + p_2 + p_1 p_2' + n_2$$

dar  $(n_2, p_2)$  și  $(n_2', p_2')$  sunt echivalente. Avem deci

$$n_2 + p_2' = n_2' + p_2,$$

de unde

$$n_3 + p_3' = n_3' + p_3,$$

deci  $(n_3, p_3)$  și  $(n_3', p_3')$  sunt echivalente aparținând aceleiași clase de echivalență.

**Consecința 4.5.3:** Oricare ar fi reprezentanții aleși a celor două clase de echivalență  $a_1$  și  $a_2$ , produsul acestor reprezentanți aparțin unei aceleiași clase de echivalență  $a$ .

Această clasă de echivalență  $a$  o vom numi produsul întregilor  $a_1$  și  $a_2$  și o vom nota

$$a = a_1 \times a_2 \text{ sau } a_1 a_2.$$

Avem:

$$a = a_1 a_2 = \overline{[(n_1 n_2 + p_1 p_2), (n_1 p_2 + n_2 p_1)]}.$$

#### 4.6 Proprietățile înmulțirii numerelor întregi

**Teorema 4.6.1:** Au loc următoarele afirmații:

1. Înmulțirea numerelor întregi este o operație comutativă.

**Demonstrație:** Avem:

$$a_1 \times a_2 = \overline{[(n_1 n_2 + p_1 p_2), (n_1 p_2 + n_2 p_1)]} \text{ și}$$

$$a_2 \times a_1 = \overline{[(n_2 n_1 + p_2 p_1), (p_2 n_1 + p_1 n_2)]},$$

deci:

$$a_1 \times a_2 = a_2 \times a_1.$$

2. *Înmulțirea numerelor întregi este o operație asociativă, adică:*

$$(a_1 \times a_2) \times a_3 = a_1 \times (a_2 \times a_3),$$

ceea ce rezultă înlocuind  $a_1, a_2, a_3$  prin  $\overline{(n_1, p_1)}, \overline{(n_2, p_2)}, \overline{(n_3, p_3)}$  și efectuând calculele.

3. *Elementul  $\varepsilon = \overline{(1, 0)}$  este element neutru pentru înmulțirea numerelor întregi.*

**Demonstrație:** Oricare ar fi  $a = \overline{(n, p)}$ , avem:

$$a \times \varepsilon = \varepsilon \times a = \overline{[(n \times 1 + 0 \times p), (0 \times n + 1 \times p)]} = \overline{(n, p)} = a.$$

4. *Înmulțirea numerelor întregi este o operație distributivă în raport cu adunarea.*

**Demonstrație:** Punând:  $a_1 = \overline{(n_1, p_1)}, a_2 = \overline{(n_2, p_2)}, a_3 = \overline{(n_3, p_3)}$ ,

avem:

$$a_1(a_2 + a_3) = \overline{(n, p)}, \text{ unde:}$$

$$n = n_1[n_2 + n_3] + p_1[p_2 + p_3]$$

$$p = n_1[p_2 + p_3] + p_1[n_2 + n_3]$$

Pe de altă parte avem:

$$a_1 a_2 + a_1 a_3 = \overline{(n', p')}, \text{ unde:}$$

$$\begin{cases} n' = (n_1 n_2 + p_1 p_2) + (n_1 n_3 + p_1 p_3) = n \\ p' = (n_1 p_2 + n_2 p_1) + (n_1 p_3 + n_3 p_1) = p. \end{cases}$$

Rezultă că:

$$a_1(a_2 + a_3) = a_1 a_2 + a_1 a_3.$$

#### **4.7 Inelul numerelor întregi**

În mulțimea numerelor întregi  $\mathbf{Z}$  am stabilit două legi de compoziție internă: una numită *adunare*, care satisface proprietățile unui *grup abelian*, iar cealaltă numită *înmulțire*, care satisface următoarele proprietăți:

- *asociativitate,*
- *comutativitate,*
- *element neutru și*
- *distributivitate în raport cu adunarea.*

În acest caz spunem că mulțimea numerelor întregi formează un inel comutativ și unitar.

***BIBLIOGRAFIE***

- [1] **Andrei, GH., Caragea, C., Cucurezeanu, I., Bordea, Gh.,** *Probleme de algebră*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1993.
- [2] **Andrica D., Duca I. D., Pop I., Purdea I.,** *Matematica de bază*, Editura Studium, Cluj-Napoca, 2000.
- [3] **Beju, A. E., Beju, I.,** *Compendiu de matematică*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1983.
- [4] **Bușneag, D., Boboc, Fl., Piciu, D.,** *Elemente de aritmetică și teoria numerelor*, Editura Universitaria, Craiova, 1999.
- [5] **Popovici, C. P.,** *Teoria numerelor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1973.

**Prof. Adela Cotul, Gr. Șc. „L. Rebreanu” , Maieru, B-N**