SCLIPIREA MINTII

REVISTĂ DE CULTURĂ MATEMATICA ; PUBLICATIE SEMESTRIALĂ, AN III, NR VI, 2010 * 10 LEI

SM

ISTORIA MATEMATICII

PROBLEME PROPUSE

PROBLEME REZOLVATE

TESTE

CALEIDOSCOP MATEMATIC

SM

Societatea de Ştiinţe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,

ISSN 1716-3615

SCLIPIREA MINTII

Revistă de cultură matematică, publicaţie semestrială, An III, Nr. VI, NOIEMBRIE 2010, BUZĂU

COLECTIVUL DE REDACTIE

- Preşedinte de onoare:
  Constantin Apostol

Constantin Rusu - **Preşedinte Filiala Ramnicu Sărat a Societăţii de Ştiinţe Matematice**

Lenuţa Pîrlog – **Preşedinte Filiala Buzău a Societăţii de Ştiinţe Matematice**

- Director:
  Neculai Stanciu

- Redactor şef:
  Adrian Stan

- Redactori principali:

Constantin Dinu **Ana Panaitescu**
Gheorghe Bodea **Gabriela Nicoleta Lupşan**
Andrei Octavian Dobre **Iuliana Trască**
Nicolae Ivaşchescu **Constantin E. Păduraru**

Membri colaboratori: **Mihály Bencze,** Luca **Tuţă,** Natalia **Pleşu**, Florentina **Popescu**, Ciprian **Cheşcă**, Rodica **Lupşan,** Gheorghe **Manea,** Gheorghe **Struţu**, Ligia **Struţu**, Roxana **Stanciu**, Delia **Naidin**, Ion **Stănescu,** Simion **Marin**, Gherghina **Manea**, Marcela **Marin**, Ştefana **Ispas,** Maria **Anton**, Felicia **Avrigeanu**, Daniela **Dibu**, Daniela **Ion**, Ion **Lupşan**, Rodica **Ene**, Constantin **Lupşan,** Gheorghe **Dârstaru,** Elena **Cucu,** Viorel **Ignătescu,** Ion **Radu,** Ovidiu **Ţâţan,** Marius **Stan,** Mirela **Axente,** Cristian Cosmin **Brânză,** Manuela **Apostol,** Gabriel **Andrei,** Doina **Vizitiu,** Vasile **Prefac,** Maritanţa **Prefac,** Marioara **Vrabie,** Florica **Marchidanu,** Gabriela **Marinescu,** Maria **Caloian,** Florica **Anton,** Marian **Bănulescu,** Geanina **Bănulescu,** Mirela **Lupşan,** Nicuşor **Lupşan,** Georgeta **Răican,** Lăcrămioara **Năstase,** Viorel **Rotărescu,** Viorica **Rotărescu,** Violeta **Corbu.**

CUPRINS

ISTORIA MATEMATICII..... 1

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE..... 3

EXAMENE ŞI CONCURSURI..... 11

PROBLEME REZOLVATE..... 14

PROBLEME PROPUSE 28

CALEIDOSCOP MATEMATIC..... 34

POŞTA REDACŢIEI..... 36

GÂNDEŞTE CORECT !

REDACTIA

Grupul Şcolar „ Costin Nenițescu”, Buzău,
Strada Transilvaniei, Nr. 134,
Cod. 120012, Tel. 0238725206
e-mail: ady_stan2005@yahoo.com
Vizitați www. liceulnenitescu.rdsbz.ro

„ Tinereţea este timpul de a învăţa
înţelepciunea; bătrâneţea este timpul de a o aplica”.

Jean Jacques Rousseau

1. Istoria Matematicii

Civilizaţia arabă şi matematica

de prof. Adrian Stan, Buzău

Civilizaţia arabă a secolelor VII-XIII a lăsat o moştenire impresionantă în multe domenii cum ar fi construcţiile, agricultura, economia, ştiinţele exacte ca matematica, fizica, chimia, astronomia şi mai ales prin medicină dar şi prin artă.

Interferenţa cu ştiinţa greacă este evidentă, astfel filozofia medievală islamică îşi are ca model sistemul filozofic al lui **Aristotel**(384 î.e.n. – 322 î.e.n) din Grecia antică, cel care a pus bazele logicii formale.

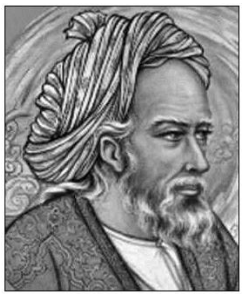
În secolul 2 î.e.n. un alt matematician grec avea să fie sursă de inspiraţie şi model pentru cultura musulmană. **Euclid**(365 î.e.n. – 275 î.e.n.), prin „ Elementele” sale a generat din partea unor învăţaţi ca **al-Hajjaj**, **Thabit ibn Qurra**, **Ibn al-Haythan**, **Omar al-Khayyan** şi mulţi alţii, un interes deosebit, mergând până la încercările lor de a da o demonstraţie a postulatului al cincilea din prima carte a „ Elementelor”, aşazisul postulat al paralelelor: „ Printr-un punct din plan nu se poate duce decât o paralelă la o dreaptă”.

al-Khwarizmi

În secolul al IX-lea, la Bagdad, **al-Khwarizmi**(780-850)(sau **al-Horezmi**) scrie „ Tabla indiană” cu evidente surse de inspiraţie din ştiinţa şi cultura indiană. Culegerea de texte de astronomie transcrisă în latină în sec. al XII-lea, făcea referire la o serie de calcule trigonometrice und apare pentru prima dată sinusul şi calculul indian deşi cu mult înaintea lui, în secolul al VII-lea, un episcop grec, **Sever –Sebokht** din mânăstirea Qennechne, în urma transcrierii unor texte în siriană face pentru prima dată o menţionare a cifrelor indiene.

Calcul indian descris în lucrarea lui **al-Khwarizmi** avea la bază numărarea zecimală de poziţie în care intervenea cele nouă cifre de la 1 la 9 şi zero, toate reprezentate prin semne grafice ce permiteau efectuarea unor operaţii asemănătoare cu cele pe care le efectuăm astăzi, cu mult mai uşor decât calculul în baza sexagesimală. Toate aceste calcule se făceau la început pe tăbliţe acoperite cu nisip sau cu ceară iar după anul 751 în urma bătăliei de la Talas dintre arabi şi chinezi prizonierii chinezi dezvăluind secretul fabricării hârtiei au făcut posibilă construirea de fabrici de hârtie la Bagdad şi Samarkand.

Lui **al-Khwarizmi** i se datorează astfel introducerea în ştiinţa arabă a „ cifrelor arabe” şi prin tratatul său despre „ al-jabr”(restaurare şi mai apoi algebră) şi „ al-muqabala”(comparaţie-separarea termenilor într-o ecuaţie), devine întemeietorul algebrei arabe. Cunoştinţele sale erau folosite în probleme de schimburi comerciale, de moşteniri sau de măsurare a terenurilor. În acest sens, el introduce şase tipuri de ecuaţii canonice de gradul întâi şi de gradul al doilea. De la numele său a provenit şi cuvântul „ algoritm”, avându-şi originea etimologică mai întâi în latinescul „algorismus” şi mai apoi în franţuzescul „ algoritm”.



Ceilalţi matematicieni care l-au urmat pe **al-Khwarizmi**, printre care **Omar Khayyam**(1048-1131)(foto) şi **al-Kashi**(1380-1429) au dus mai departe descoperirile în algebră , geometrie şi trigonometrie introducând fracţiile zecimale, studiul asupra polinoamelor şi ecuaţiilor cubice înregistrând un oarecare progres.

Al-Kashi este autorul enciclopediei matematice „ Cheia aritmeticii” şi a contribuit la scrierea celebrelor tabele astronomice.

Algebra continuă să se dezvolte fără a se recurge la o scriere simbolistică ci la una sub formă de fraze. Alături de „sinusul” indian , astronomii arabi introduc funcţia tangentă şi demonstrează teorema sinusurilor. Multe cercetări în geometrie au dus la rezultate deosebite cu mult înaintea celor europene. Astfel, **al-Biruni** studiază triunghiurile înscrise într-o sferă precum şi eclipsele Lunii şi aplicaţiile lor în geodezie iar **Nasir al-Din al-Tusi**(1135-1213) în 1260 se preocupă de rezolvarea triunghiurilor. **Al – Kashi** calculează sin 1^0 şi dă formula **sin 3a =3sin a - 4sin^3 a**. **Omar Khayyam** în 1079 realizează reforma calendarului persan solar. **Ibn Yunus** în 1003 face remarci referitoare la eclipse , la conjuncţia planetelor precum şi asupra echinocţiilor. **Al-Samaw** în 1175 contribuie la studierea teoriei polinoamelor şi a fracţiilor zecimale.

Al-Quhi este autorul realizării unui compas special având un braţ variabil ca lungime, iar celălalt fix, făcea un unghi constant cu planul. Tot el dă şi un prim model de construcţie a unui observator ceresc.

În secolul al XI-lea, **Ibn al-Haythan**(965-1039) prin cartea sa „ Optica” îşi foloseşte cunoştinţele matematice la studiul reflexiei şi refracţiei, exercitând o mare influenţă în Europa începând cu secolul al XII-lea.

Un discipol al lui **Omar al-Khayyam** şi anume **al-Khazini**, descrie în 1121 o balanţă prin care se putea calcula ceea ce numim noi astăzi „ greutatea specifică” a metalelor şi pietrelor preţioase. Multe din cunoştinţele relatate de el, provin de la grecul Arhimede sau de la înaintaşii lui arabi însă cercetările lui experimentale îl duc la determinarea centrelor de greutate ale multor corpuri din spaţiu.

Încă din secolul al IX-lea, civilizaţia musulmană putea să se mândrească cu oraşele în care existau uriaşe clepsidre pentru măsurarea timpului, fântâni arteziene,poduri şi baraje uriaşe, mori dotate cu sisteme complexe de angrenaje, maşini pentru ridicat apa.

Ştiinţa arabă şi dezvoltările sale tehnice au pătruns prin Spania şi mai apoi prin Sicilia începând cu secolul al VII-lea respectiv al IX-lea. În secolul al X-lea , Cordoba era cel mai influent centru economic şi cultural prin cele 60 000 de palate, 700 de moschei şi 70 de biblioteci.

Leonardo Fibonacci un negustor din Pisa, prin călătoriile făcute în Antiohia, ia contact cu civilizaţia arabă şi cu scrierile arabe care erau traduse în latină. Făcând o sinteză a tuturor cunoştinţelor de matematică, inclusiv cele arabe, în 1202 scrie lucrarea „ **Liber Abaci**” prin care consfinţeşte definirea şi utilizarea sistemului zecimal în Europa.

Pagină din manuscrisul lui al-Khwarizmi

1	2	3	4	5	6	7	8	9
—	=	≡	+	h	φ	⁊	⁊	⁊

Numerele indiene

Bibliografie:

1. Danielle Jacquart. Ştiinţa arabă, o epopee a cunoaşterii. Editura Univers. 2007.
2. Nicolaie Mihăileanu. Istoria matematicii. Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică.1981

Profesor, Grupul Şcolar” Costin Neniţescu”, Buzău

„ Toată lumea se plânge că nu are memorie,
dar nimeni nu se vaită că nu are logică”.

La Rochefoucault

2. Articole si note matematice

Aplicaţii ale inegalităţii lui Cauchy-Schwarz

de prof. **Mihály Bencze,** Braşov

În acest articol prezentăm câteva aplicaţii interesante ale inegalităţii lui *Cauchy-Schwarz*, a căror consecinţe rafinează inegalităţile clasice de geometrie.

Teorema 1. Dacă $a_k, b_k > 0$ $(k = 1,2,...,n)$ astfel încât $\{a_1, a_2,..., a_n\} = \{b_1, b_2,..., b_n\}$ atunci

$$\max\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{b_k}{a_k}}\right)^2;\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{a_k}{b_k}}\right)^2\right\} \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right).$$

Demonstraţie. Folosind inegalitatea lui *Cauchy-Schwarz*, obţinem:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}\right) \ge (\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{a_k}{b_k}})^2 \text{ şi } \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}\right) \ge (\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{a_k}{b_k}})^2$$

de unde rezultă afirmaţia teoremei.

Aplicaţia 1.

Dacă $a_k > 0$ $(k = 1,2,...,n)$, atunci $\max\left\{\left(\sum_{cyclic}\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\right)^2;\left(\sum_{cyclic}\sqrt{\frac{a_1}{b_2}}\right)^2\right\} \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)$.

Demonstraţie. În teorema 1, folosim notaţiile: $b_1 = a_2, b_2 = a_3,..., b_n = a_1$ respectiv $a_1 = b_2, a_2 = b_3,..., a_n = b_1$.

Aplicaţia 1.1. Dacă $x, y, z > 0$ şi $F(x, y, z) = \max\left\{\left(\sum_{cyclic}\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2;\left(\sum_{cyclic}\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2\right\}$ atunci

$$\left(\sum x\right)\left(\sum\frac{1}{x}\right) \ge F(x, y, z).$$

Aplicaţia 1.1.1. În orice triunghi ABC avem inegalităţile:

1) $\frac{s^2 + r^2 + 4Rr}{2Rr} \ge \{F(a,b,c); F(h_a, h_b, h_c)\} \ge 9$;

2) $1 + \frac{4R}{r} \ge \ \ge \left\{F(s-a, s-b, s-c); F(r_a, r_b, r_c); F(tg\frac{A}{2}, tg\frac{B}{2}, tg\frac{C}{2}), F(ctg\frac{A}{2}, ctg\frac{B}{2}, ctg\frac{C}{2}\right\} \ge 9$;

3) $\frac{(2R-r)(s^2 + r^2 - 8Rr)}{2Rr^2} \ge F(\sin^2\frac{A}{2}, \sin^2\frac{B}{2}, \sin^2\frac{C}{2}) \ge 9$;

4) $\frac{(4R+r)(s^2 + (4R+r)^2)}{2Rs^2} \ge F(\cos^2\frac{A}{2}, \cos^2\frac{B}{2}, \cos^2\frac{C}{2}) \ge 9$.

Aplicaţia 1.1.2. În orice triunghi ascuţit ABC avem inegalităţile:

1) $\frac{(R+r)(s^2 + r^2 - 4R^2)}{R(s^2 - (2R+r)^2)} \ge F(\cos A, \cos B, \cos C) \ge 9$;

2) $\dfrac{s^2-r^2-4Rr}{s^2-(2R+r)^2} \ge \{F(tgA,tgB,tgC);F(ctgA,ctgB,ctgC)\} \ge 9$.

Aplicaţia 1.2. Dacă $x,y,z,t>0$ şi $F(x,y,z,t)=\max\left\{\left(\sum_{cyclic}\sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)^2;\left(\sum_{cyclic}\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)^2\right\}$ atunci $\left(\sum x\right)\left(\sum\dfrac{1}{x}\right)\ge F(x,y,z,t)$.

Aplicaţia 1.2.1. În orice tetraedru $ABCD$ avem inegalităţile:

1) $\dfrac{1}{r}\sum h_a \ge F(h_a,h_b,h_c,h_d)\ge 16$; 2) $\dfrac{2}{r}\sum r_a \ge F(r_a,r_b,r_c,r_d)\ge 16$.

Teorema 2.

Dacă $a_k,b_k,c_k>0$ $(k=1,2,...,n)$ astfel încât $\{a_1,a_2,...,a_n\}=\{b_1,b_2,...,b_n\}=\{c_1,c_2,...,c_n\}$ atunci

1) $T(a_1,a_2,...,a_n)=\max\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{\dfrac{a_k}{b_kc_k}}\right)^3;\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{\dfrac{b_k}{c_ka_k}}\right)^3;\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{\dfrac{c_k}{a_kb_k}}\right)^3\right\}\le\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}\right)^2$;

2) $U(a_1,a_2,...,a_n)=\max\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{\dfrac{a_kb_k}{c_k}}\right)^3;\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{\dfrac{b_kc_k}{a_k}}\right)^3;\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{\dfrac{c_ka_k}{b_k}}\right)^3\right\}\le\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2\left(\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}\right)$

3) $V(a_1,a_2,...,a_n)=\max\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{\dfrac{a_k^2}{b_kc_k}}\right)^3;\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{\dfrac{b_k^2}{c_ka_k}}\right)^3;\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{\dfrac{c_k^2}{a_kb_k}}\right)^3\right\}\le\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}\right)^2$

Demonstraţie.

În inegalitatea lui *Cauchy-Schwarz* $\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{x_ky_kz_k}\right)^3\le\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}y_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}z_k\right)$ alegem

1) $x_k=a_k, y_k=\dfrac{1}{b_k}, z_k=\dfrac{1}{c_k}$;2) $x_k=a_k, y_k=b_k, z_k=\dfrac{1}{c_k}$;3) $x_k=a_k^2, y_k=\dfrac{1}{b_k}, z_k=\dfrac{1}{c_k}$.

Aplicaţia 2.1. Dacă $x,y,z>0$ atunci

1) $\dfrac{27}{xyz}\le T(x,y,z)\le\left(\sum x\right)\left(\sum\dfrac{1}{x}\right)^2$; 2) $27xyz\le U(x,y,z)\le\left(\sum x\right)^2\left(\sum\dfrac{1}{x}\right)$;

3) $27\le V(x,y,z)\le\left(\sum x^2\right)\left(\sum\dfrac{1}{x}\right)^2$.

Aplicaţia 2.1.1. În orice triunghi ABC avem inegalităţile:

1) $\dfrac{27}{4sRr}\le T(a,b,c)\le\dfrac{(s^2+r^2+4Rr)^2}{8sR^2r^2}$;2) $108sRr\le U(a,b,c)\le\dfrac{s(s^2+r^2+4Rr)}{Rr}$;

3) $27\le V(a,b,c)\le\dfrac{(s^2-r^2-4Rr)(s^2+r^2+4Rr)^2}{8s^2R^2r^2}$;

4) $\dfrac{27}{sr^2}\le T(s-a,s-b,s-c)\le\dfrac{(4R+r)^2}{sr^2}$;5) $27sr^2\le U(s-a,s-b,s-c)\le\dfrac{(4R+r)s}{r}$;

6) $27\le V(s-a,s-b,s-c)\le(s^2-2r^2-8Rr)\left(\dfrac{4R+r}{sr}\right)^2$;

7) $\dfrac{27R}{2s^2r^2}\le T(h_a,h_b,h_c)\le\dfrac{(s^2+r^2+4Rr)}{2Rr^2}$;8) $\dfrac{54s^2r^2}{R}\le U(h_a,h_b,h_c)\le\dfrac{(s^2+r^2+4Rr)^2}{4R^2r}$;

9) $27\le V(h_a,h_b,h_c)\le\dfrac{(s^2+r^2+4Rr)^2-16s^2Rr}{4R^2r^2}$;10) $\dfrac{27}{s^2r}\le T(r_a,r_b,r_c)\le\dfrac{4R+r}{r^2}$;

11) $27s^2r \le U(r_a,r_b,r_c) \le \frac{(4R+r)^2}{r}$;12) $27 \le V(r_a,r_b,r_c) \le \frac{(4R+r)^2-2s^2}{r^2}$;

13) $\frac{27s}{r} \le T(tg\frac{A}{2},tg\frac{B}{2},tg\frac{C}{2}) \le \frac{s(4R+r)}{r^2}$;14) $\frac{27r}{s} \le U(tg\frac{A}{2},tg\frac{B}{2},tg\frac{C}{2}) \le \frac{(4R+r)^2}{sr}$;

15) $27 \le V(tg\frac{A}{2},tg\frac{B}{2},tg\frac{C}{2}) \le \frac{(4R+r)^2-2s^2}{r^2}$;

16) $\frac{27r}{s} \le T(ctg\frac{A}{2},ctg\frac{B}{2},ctg\frac{C}{2}) \le \frac{(4R+r)^2}{sr}$;17) $\frac{27s}{r} \le U(tg\frac{A}{2},tg\frac{B}{2},tg\frac{C}{2}) \le \frac{s(4R+r)}{r^2}$

18) $27 \le V(ctg\frac{A}{2},ctg\frac{B}{2},ctg\frac{C}{2}) \le \frac{(s^2-8Rr-2r^2)(4R+r)^2}{s^2r^2}$;

19) $\frac{432R^2}{r^2} \le T(\sin^2\frac{A}{2};\sin^2\frac{B}{2};\sin^2\frac{C}{2}) \le \frac{(2R-r)(s^2+r^2-8Rr)^2}{2Rr^4}$;

20) $\frac{27r^2}{16R^2} \le U(\sin^2\frac{A}{2};\sin^2\frac{B}{2};\sin^2\frac{C}{2}) \le \frac{(2R-r)^2(s^2+r^2-8Rr)}{2R^2r^2}$;

21) $27 \le V(\sin^2\frac{A}{2};\sin^2\frac{B}{2};\sin^2\frac{C}{2}) \le \frac{(8R^2+r^2-s^2)(s^2+r^2-8Rr)^2}{8R^2r^4}$;

22) $\frac{432R^2}{r^2} \le T(\cos^2\frac{A}{2};\cos^2\frac{B}{2};\cos^2\frac{C}{2}) \le \frac{(4R+r)(s^2+(4R+r)^2)^2}{2Rs^4}$;

Aplicaţia 2.1.2. În orice triunghi ascuţit ABC avem inegalităţile:

1) $\frac{108R^2}{s^2-(2R+r)^2} \le T(\cos A,\cos B,\cos C) \le \frac{(R+r)(s^2+r^2-4R^2)^2}{R(s^2-(2R+r)^2)^2}$;

2) $\frac{27(s^2-(2R+r)^2)}{4R^2} \le U(\cos A,\cos B,\cos C) \le \frac{(R+r)^2(s^2+r^2-4R^2)^2}{R^2(s^2-(2R+r)^2)}$;

3) $27 \le V(\cos A,\cos B,\cos C) \le \frac{(6R^2+4Rr+r^2-s^2)(s^2+r^2-4R^2)}{2R^2(s^2-(2R+r)^2)}$;

4) $\frac{27(s^2-(2R+r)^2)}{2sr} \le T(tgA,tgB,tgC) \le \frac{(s^2-r^2-4Rr)^2}{2sr(s^2-(2R+r)^2)}$;

5) $\frac{54sr}{s^2-(2R+r)^2} \le U(tgA,tgB,tgC) \le \frac{2sr(s^2-r^2-4Rr)}{(s^2-(2R+r)^2)^2}$;

6) $27 \le V(tg\frac{A}{2},tg\frac{B}{2},tg\frac{C}{2}) \le \frac{(4s^2r^2-2(s^2-r^2-4Rr)(s^2-r^2-4Rr))(s^2-r^2-4Rr)^2}{4s^2r^2(s^2-(2R+r)^2)^2}$;

7) $\frac{54sr}{s^2-(2R+r)^2} \le T(ctgA,ctgB,ctgC) \le \frac{2sr(s^2-r^2-4Rr)}{(s^2-(2R+r)^2)^2}$;

Aplicaţia 2.1.3. În orice tetraedru avem inegalităţile:

1) $\frac{64}{h_ah_bh_ch_d} \le T(h_a,h_b,h_c,h_d) \le \frac{1}{r^2}\sum h_a$; 2) $64h_ah_bh_ch_d \le U(h_a,h_b,h_c,h_d) \le \frac{1}{r}(\sum h_a)^2$;

3) $64 \le V(h_a,h_b,h_c,h_d) \le \frac{1}{r^2}\sum h_a^2$;4) $\frac{64}{r_ar_br_cr_d} \le T(r_a,r_b,r_c,r_d) \le \frac{r}{r^2}\sum r_a$;

5) $64r_ar_br_cr_d \le U(r_a,r_b,r_c,r_d) \le \frac{1}{r}(\sum r_a)^2$;6) $64 \le V(r_a,r_b,r_c,r_d) \le \frac{4}{r^2}\sum r_a^2$.

Bibliografie:

[1]. Bencze M., *Inegalităţi* (manuscris, 1982);

[2]. Octogon Mathematical Magazine (1993 – 2010)

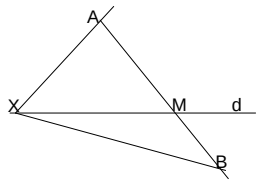
Asupra unor probleme de minim

de prof. **Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

În această lucrare se prezintă observaţii interesante asupra a două probleme de minim cunoscute.

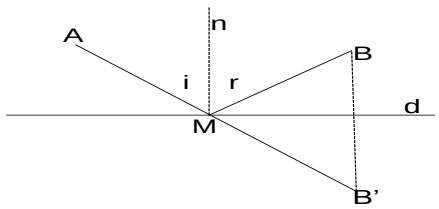
I. Fie în planul π o dreaptă d şi două puncte A şi B. Determinaţi punctul $M \in d$ astfel încât suma $AM + MB$ să fie minimă. Deosebim două cazuri:

a) Punctele A şi B se află în semiplane diferite. Fie $X \in d$.



Avem din inegalitatea triunghiului $AX + XB \geq AB$.
Egalitatea se produce dacă $X \in AB$.

b) Punctele A şi B se află în acelaşi semiplan.



Construim simetricul B' al lui B faţă de dreapta d şi se observă că $MB = MB'$.Din cazul a) urmează că punctele A, M, B' sunt coliniare şi deci $\{M\} = AB' \cap d$.

Observaţia 1. Legătura dintre cazul b) şi legea a II-a a reflexiei. Dacă din A pleacă o rază de lumină, în ce punct trebuie să atingă dreapta d pentru ca raza reflectată să ajungă în B'? Conform punctului b) avem $\sphericalangle i \equiv \sphericalangle r$ (unghiul de reflexie este congruent unghiul de incidenţă).Acasta este de fapt *legea a II-a a reflexiei*.

Observaţia 2.Legătura cazului b) cu *problema biliardului*.Fie o dreaptă d şi punctele A şi B situate în acelaşi semiplan.Fie B' simetricul lui B faţă de dreapta d .Dacă $M \in d$ şi suma $AM + MB$ este minimă, atunci punctele $A., M, B'$ sunt colineare.

Observaţia 3. În problema I, dacă dreapta d se înlocuieşte cu un plan rezultatele rămân aceleaşi.

II. Considerăm în planul π punctele P_1, P_2, P_3. Să se determine în planul π punctul M astfel încât suma $MP_1^2 + MP_2^2 + MP_3^2$ să fie minimă.

*Soluţie.*Cu formula distanţei avem $f(M) = MP_1^2 + MP_2^2 + MP_3^2$

$\Leftrightarrow f(x, y) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2$

$\Leftrightarrow f(x, y) = 3x^2 - 2x(x_1 + x_2 + x_3) + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + (y - y_1)^2 + (y - y_2)^2 + (y - y_3)^2$. Considerând funcţia reală f de variabilă reală x rezultă un minim atins în $x = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$.Similar se obţine minimul $y = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$ dacă se consideră funcţia de variabilă y .Constatăm că $M \equiv G$(unde G este centrul de greutate al triunghiului $P_1P_2P_3$.

Şi această problemă poate fi extinsă la n puncte $P_1, P_2, ..., P_n$ .Cu acelaşi raţionament găsim că minimil sumei $\sum_{i=1}^{n} MP_i^2$ se realizează când M coincide cu baricentrul sistemului de puncte $P_1, P_2, ..., P_n$.

Observaţia 4. Problema a doua se extinde la n puncte din spaţiu.

Bibliografie:

[1] Ţiţeica, Ghe., *Culegere de probleme de geometrie*, Editura tehnică, Bucureşti, 1965, Ediţia a IV-a.

Inegalităţi în triunghi

de prof. **Daniela Ungureanu,** Buzău

Articolul de faţă face referire la o serie de inegalităţi în triunghi demonstrate sintetic cât şi analitic cu ajutorul inegalităţii mediilor sau a inegalităţii Cauchy-Buniakowschi-Schwarz.

1. Să se arate că în orice triunghi are loc relaţia $S \le \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$.

Demonstraţie : Conform inegalităţii mediilor avem :

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \le \frac{p-a+p-b+p-c}{3} = \frac{p}{3} \Leftrightarrow (p-a)(p-b)(p-c) \le \frac{p^3}{27} \Leftrightarrow$$

$p(p-a)(p-b)(p-c) \le \frac{p^4}{27} \Leftrightarrow S \le \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$ cu egalitate pentru triunghiul echilateral , pentru că avem egalitate în inegalitatea mediilor .

Reformulări ale inegalităţii $S \le \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$:

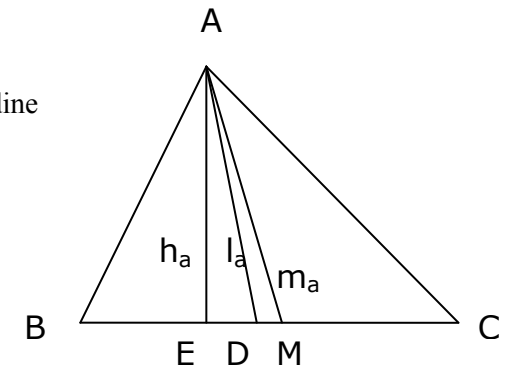
1. Dintre triunghiurile de perimetru dat , cel de arie maximă este echilateral.
2. Dintre triunghiurile de arie dată , cel de perimetru minim este echilateral.
3. Dacă într-un triunghi $p^2=3\sqrt{3}\,S$, atunci triunghiul este echilateral.

Cum S= pr, înlocuindu-l pe S în inegalitate se obţine : $r \le \frac{p}{3\sqrt{3}}$.

4. Dintre triunghiurile de perimetru constant, cel cu raza cercului înscris maximă este echilateral.
5. Dintre triunghiurile cu raza cercului înscris dată, cel de perimetru minim este echilateral.

2. În orice triunghi are loc relaţia : $h_a \le l_a \le m_a$, unde h_a, l_a şi m_a sunt respectiv lungimile înălţimii , bisectoarei şi medianei corespunzătoare laturii [BC].

Demonstraţie :
Soluţia sintetică:
Cazul I : $m(\sphericalangle B) \langle 90^0$



Măsurile unghiurilor $\hat{B}$ şi $\hat{C}$ pot fi luate într-o anumită ordine fără a afecta rezultatul .
Fie $m(\sphericalangle B) \ge m(\sphericalangle C) \Rightarrow$ b $\ge$ c .
Fie [AM] mediana corespunzătoare laturii [BC] , [AD] bisectoarea unghiului A şi [AE] înălţimea corespunzătoare laturii [BC] .

Din teorema bisectoarei $\Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} \le 1$

$\Rightarrow$ DB $\le$ DC $\Rightarrow$ punctul D este situat între punctele B şi M (1)

Rămâne de stabilit poziţia piciorului înălţimii faţă de piciorul bisectoarei .

$$m(\sphericalangle BAE) = 90^0 - m(\sphericalangle B) = \frac{m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C})}{2} - m(\sphericalangle B) = \frac{m(\hat{A})}{2} + \frac{m(\hat{C})-m(\hat{B})}{2} \quad (2)$$

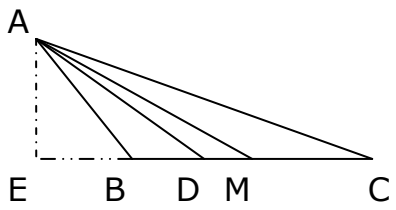
Cum $m(\sphericalangle B) \ge m(\sphericalangle C) \Rightarrow \frac{m(\hat{C})-m(\hat{B})}{2} \le 0$ şi din (2) rezultă că $m(\sphericalangle BAE) \le \frac{m(\hat{A})}{2} = m(\sphericalangle BAD)$.

De aici rezultă că E este situat între punctele B şi D. (3)
Din (1) şi (3) obţinem că $l_a \le m_a$ ca oblică mai apropiată de piciorul perpendicularei.

Cazul II : $m(\sphericalangle B) \rangle 90^0$.

Practic nu se schimbă nimic. Punctul D este între B şi M conform teoremei bisectoarei .

Soluţia analitică:



Se ştie că : $l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$ iar $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ $\Rightarrow$

$l_a = \frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \Rightarrow l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}$, din inegalitatea mediilor avem $\sqrt{bc} \le \frac{b+c}{2}$ şi vom obţine :

$l_a \le \frac{2}{b+c}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\sqrt{p(p-a)}$ adică $l_a \le \sqrt{p(p-a)}$ (1)

Rămâne de dovedit că : $\sqrt{p(p-a)} \le m_a$ (2) ceea ce este echivalent cu

$p(p-a) \le m_a^2 \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2} \le \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} \Leftrightarrow (b-c)^2 \ge 0$, evident adevărată.

Din (1) şi (2) obţinem $l_a \le m_a$ şi cum $h_a \le l_a$ rezultă $h_a \le l_a \le m_a$.

3. Să se arate că în orice triunghi $l_a + l_b + l_c \le p\sqrt{3}$, unde s-a notat cu l_a, l_b, l_c lungimile bisectoarelor unui triunghi .

Demonstraţie :

Se dovedeşte mai întâi că : $l_a \le \sqrt{p(p-a)}$ şi însumând cele trei inegalităţi obţinute prin permutări avem : $l_a + l_b + l_c \le \sqrt{p(p-a)} + \sqrt{p(p-b)} + \sqrt{p(p-c)} \le \sqrt{3[p(p-a)+p(p-b)+p(p-c)]} =$

$= \sqrt{3p(p-a+p-b+p-c)} = p\sqrt{3}$. S-a utilizat inegalitatea Cauchy-Buniakowschi-Schwarz :

Dacă $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i=\overline{1,n}$, atunci $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \ge \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$, unde numerele a_i sunt radicalii $\sqrt{p(p-a)}$, iar b_i sunt toate egale cu 1 .

Bibliografie:

1) Mircea Becheanu şi Bogdan Enescu , Inegalităţi elementare şi mai puţin elementare, Ed. GIL 2002.

2) Metodica predării matematicii. Curs. Laurenţiu Panaitopol.

Profesor, Seminarul Teologic Liceal Ortodox
„ Chesarie Episcopul”, Buzău

Cuburi de numere naturale

1	**1**
3 5	**8**
7 9 11	**27**
13 15 17 19	**64**
21 23 25 27 29	**125**
31 33 35 37 39 41	**216**
.....	**.....**

Asupra numărului de perechi distincte de numere naturale care au acelaşi cmmmc

de prof. **Cheşcă Ciprian**, Buzău

Una dintre problemele de la Olimpiada Naţională de Informatică, Constanţa 2010, clasa a IX-a a solicitat elevilor scrierea unui program care să determine numărul de perechi distincte de numere naturale care au acelaşi cel mai mic multiplu comun dat.

Articolul de faţă prezintă câteva consideraţii matematice legate de acest aspect, consideraţii care se vor finaliza cu un algoritm de determinare a numărului solicitat.

Notaţii : {a,b} = perechea (a,b); (a,b) = cmmdc{a,b}; [a,b] = cmmmc{a,b}

În vederea evidenţierii componentei matematice a problemei, enunţul a fost simplificat după cum urmează:

Dându-se un număr natural nenul n, să se determine numărul de perechi distincte de numere naturale x,y cu proprietatea că cmmmc{x,y} = n.

Exemplu :
Pentru n = 12 există următoarele perechi distincte de numere naturale nenule având cmmmc = 12.
{1,12}, {2,12}, {3,12}, {4,12}, {6,12}, {12,12}
{12,1}, {12,2}, {12,3}, {12,4}, {12,6},
{6,4}, {4,6}
{3,4}, {4,3}
În total există 15 perechi distincte de numere naturale cu cmmmc = 12.

Formulă :
Fie perechea de numere naturale nenule {x,y} având [x,y] = **n**.
Fie ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$) reuniunea factorilor primi care intră în descompunerea numerelor x şi y.
Conform teoremei factorizării unice avem :

$$x = \alpha_1^{p_1} \cdot \alpha_2^{p_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_t^{p_t}$$

$$y = \alpha_1^{q_1} \cdot \alpha_2^{q_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_t^{q_t}$$

cu observaţia că unii dintre factorii ($p_1, p_2, \dots, p_t, q_1, q_2, \dots, q_t$) pot fi 0.
Deoarece

$$[x, y] = \frac{x \cdot y}{(x, y)}$$

obţinem

$$[x, y] = \frac{\alpha_1^{p_1+q_1} \cdot \alpha_2^{p_2+q_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_t^{p_t+q_t}}{\alpha_1^{\min\{p_1,q_1\}} \cdot \alpha_2^{\min\{p_2,q_2\}} \cdot \ldots \cdot \alpha_t^{\min\{p_t,q_t\}}}$$

sau

$$[x, y] = \alpha_1^{p_1+q_1-\min\{p_1,q_1\}} \cdot \alpha_2^{p_2+q_2-\min\{p_2,q_2\}} \cdot \ldots \cdot \alpha_t^{p_t+q_t-\min\{p_t,q_t\}}$$

sau

$$[x, y] = \alpha_1^{\max\{p_1,q_1\}} \cdot \alpha_2^{\max\{p_2,q_2\}} \cdot \ldots \cdot \alpha_t^{\max\{p_t,q_t\}}$$

Considerând că descompunerea în factori primi a lui n este :

$$n = \alpha_1^{k_1} \cdot \alpha_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_t^{k_t}$$

se pune problema numărării perechilor distincte de numere naturale nenule {p,q} astfel încât max{p,q} = k.

Cum p poate lua k + 1 valori distincte (0,1,2,…,k) şi q poate lua k + 1 valori distincte (0,1,2,…,k) iar una dintre perechi este numărată de 2 ori (perechea pentru care p=q), în total vor exista (k+1)+(k +1)-1=2k+1 perechi distincte de numere naturale nenule cu această proprietate.
Deoarece în descompunerea în factori primi a lui n există t factori la puterile k_1, k_2, … , k_t, numărul cerut de problemă va fi : $(2 \cdot k_1 + 1) \cdot (2 \cdot k_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (2 \cdot k_t + 1)$
Algoritmul care dermină numărul cerut de problemă va parcurge etapele :
Citirea lui n din fişierul de intrare;
Descompunerea în factori primi a lui $n = \alpha_1^{k_1} \cdot \alpha_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_t^{k_t}$;
Determinarea produsului $(2 \cdot k_1 + 1) \cdot (2 \cdot k_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (2 \cdot k_t + 1)$;
Scrierea rezultatului în fişierul de ieşire.
O funcţie (C++) care implementează acest algoritm este :

```
void BuildFactors()[1]
{
        factors.CL, compacted.CL;
        LL aux = n;
        int iPrime = 0, gyok = sqrt(double(n));
        while (iPrime < primes.SZ && aux > 1)
        {
                int exponent = 0, prime = primes[iPrime];
                if (prime > gyok) break;
                while (!(aux % prime))
                {
                        ++exponent;
                        aux /= prime;
                }
                if (exponent) factors.PB(MP(prime, exponent));
                if (aux < isPrime.SZ && isPrime[aux]) break;
                ++iPrime;
        }
        if (aux > 1) factors.PB(MP(aux, 1));
        FORN(i, factors.SZ)
        {
                LL factor = factors[i].X;
                FOR(j, 2, factors[i].Y) factor *= factors[i].X;
                compacted.PB(factor);
        }
}
```

Profesor, Grup Şcolar “Costin Neniţescu” Buzău

„ Experienţa este cel mai dur profesor, pentru că întâi îţi dă testul şi apoi îţi spune care era lecţia”.

Vernon Law

[1] Cod sursă scris de asistent univ. Csaba Patcas, ONI 2010 Constanţa

„ Dacă găseşti un drum fără obstacole,
probabil că drumul acela nu duce nicăieri”
J. F. Kennedy

3. Examene şi concursuri

CONCURSUL JUDETEAN DE MATEMATICA

SCLIPIREA MINTII

ediţia a V-a,
(6 noiembrie 2010)

La Şcoala cu clasele I-VIII, “George Emil Palade”, Buzău, în data de 6 Noiembrie 2010 a avut loc ediţia a V-a a concursului judeţean de matematică “ Sclipirea Minţii” , clasele V- XII. Prezentăm în continuare subiectele de la gimnaziu urmând ca în numărul următor să prezentăm şi subiectele de la liceu.

Clasa a V-a

1. Fie şirul de numere naturale: 3, 9, 15,....
a) Completaţi şirul cu încă cinci termeni;
b) Ce termen se află pe locul 2010 ?
c) Este 2013 termen al şirului ?(justificaţi).Dacă răspunsul este afirmativ pe ce loc se află el?

Dârstaru Gheorghe, Buzău

2. Determinaţi perechile (x, y) de numere naturale care verifică ecuaţia:
$x(x+1)(x+7)=2^y$.

RMT, Nr.2/2010, Neculai Stanciu, Buzău

3. Suma a patru numere este 2010. Aflaţi numerele ştiind că dacă la primul se adaugă 3, din al doilea se scade 4, al treilea se înmulţeşte cu 5 şi al patrulea se împarte la 6, rezultatele obţinute sunt egale.

Tuţă Luca, Buzău

Clasa a VI-a

1. Fie numărul $N=\overline{abcd}$.Ştiind că $\overline{ab}=3\cdot\overline{cd}$, să se arate că N este divizibil cu 43.

RMT, Nr.2/2010, Victor Felecan, Focşani

2. Dacă pe segmentul $[AB]$ se consideră punctele M, N şi P în această ordine astfel încât $[AM]\equiv[MB]$ şi $[PN]\equiv[PB]$, atunci determinaţi raportul $\frac{AN}{MP}$.

Tuţă Luca & Neculai Stanciu, Buzău

3. Arătaţi că numărul $A=10^{2n}\cdot 7^{n+3}-2^{2n+3}\cdot 5^{2n}\cdot 7^n+2^{n+1}\cdot 5^n\cdot 7^{n+3}-2^{n+4}\cdot 5^n\cdot 7^n$ este multiplu al lui 2010.

Dârstaru Gheorghe, Buzău

Clasa a VII-a

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia:
$\frac{x+5}{3}+\frac{x+13}{7}+\frac{x+37}{19}+\frac{x+61}{31}+\frac{x+73}{37}=10$.

Dârstaru Gheorghe, Buzău

2. Să se arate că dacă $a,b\in N^*$, atunci $4[a,b]+3(a,b)\geq 4a+3b$.

RMT, Nr.3/2008, Ion Neaţă, Slatina , Olt

3. Fie M,N,P mijloacele laturilor $[AB],[BC]$ respectiv $[AC]$ ale triunghiului ABC, iar E respectiv D pe dreapta NP respectiv CM astfel încât $[NP]\equiv[PE]$ şi $[CM]\equiv[MD]$. Arătaţi că:
a) $AD=2\cdot AE$; b) $DE\|BC$.

Tuţă Luca, Buzău

Clasa a VIII-a

1. Demonstraţi că $\sqrt{\left(2^{2009}+3^{2010}+4^{2010}\right)^{2011}+2010}$ nu este raţional.

RMT, Nr.2/2010, Augustin Devian, Vulcan

2. Dacă $x,y,z\in(0,\infty)$ şi $x+y+z+t=1$, arătaţi că
$\sqrt{xy+xz+xt}+\sqrt{xy+yz+yt}+\sqrt{yz+xz+tz}+\sqrt{zt+yt+xt}\leq 2$.

Dârstaru Gheorghe, Buzău

3. Fie tetraedrul $ABCD$.Un plan α intersectează segmentele $[AB],[CD],[AC]$ şi $[BD]$ respectiv în M,N,P şi Q.Dacă $MP\|BC$ şi $\frac{AM}{MB}=\frac{DN}{NC}=\frac{AD}{BC}$ să se arate că $MNPQ$ este romb.

Tuţă Luca & Neculai Stanciu, Buzău

Ştiaţi că .....

Inducţia matematică apare pentru prima dată în Europa în secolul al XVI – lea în lucrările renumitului savant sicilian **Francesco Maurolico**, care în anul 1557 arăta în cartea sa publicată mai târziu, în 1575, faptul că un raţionament valabil pentru un număr n poate fi aplicat şi la următorul n+1. De abia în 1654, **Blaise Pascal** foloseşte metoda inducţiei complete pentru a exprima termenul general din linia n şi coloana m a „triunghiului aritmetic”, pe care-l prezintă în cartea sa „Tratat asupra triunghiurilor aritmetice”.

În 1656 şi **John Wallis** foloseşte acest concept în cartea sa „ Arithmetica infinitorum”, plecând de la o serie de mărimi care începeau cu zero şi se succedau în progresie aritmetică. De abia din 1686, metoda inducţiei matematice intră în uzul curent, datorită apariţiei lucrărilor lui Jacob Bernoulli I.

Concursul taberei de matematică de la Arbănaşi
17 – 24 august 2010

Clasa a VI-a

1) Să se calculeze suma : $S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2010}$.

Prof. Irina Drulea

2) Să se determine numerele prime x, y, z, astfel încât, să aibă loc egalitatea : $2x + 3y + 5z = 31$

Prof. Costică Obreja

3) a) Să se arate că dacă numerele naturale a şi b sunt prime între ele, atunci şi numerele a + b şi ab sunt prime între ele.

Prof. Constantin Apostol

b) Arătaţi că fracţia $\dfrac{2n+5}{(n+2)(n+3)}$ este ireductibilă.

Prof. Mariana Apostol

Clasa a VII-a

1) Să se arate că numărul $n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{101}$ este divizibil cu 21.

Prof. Simion Marin

2) Să se arate că orice triunghi, în care măsurile unghiurilor exterioare sunt proporţionale cu numerele 15, 20 şi 25, este dreptunghic.

Prof. Simion Marin

3) Să se calculeze valoarea raportului $\dfrac{1+2+2^2+\ldots+2^{100}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{100}}}$.

Prof. Luca Tuţă

Clasa a VIII-a

1) Fie x, y, z, $t \in R^*_+$, astfel încât, xyzt = 1.
Să se arate că $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + xy + xz + xt + yz + yt + zt \geq 10$

Prof. Constantin Dinu

2) Să se arate că orice triunghi care are două laturi proporţionale cu $2\sqrt{6}$ şi $3\sqrt{2}$, iar unghiul dintre ele de 30^0, este dreptunghic.

Prof. Constantin Apostol

3) În interiorul triunghiului ABC, cu $A > 90^0$, se consideră punctul M. Să se arate că are loc inegalitatea: $BF + FE + EC < BE + CF$, unde $\{E\} = BM \cap AC$ şi $\{F\} = CM \cap AB$.

Prof. Grigori Marin

„ Când cineva nu îndrăzneşte să spună
ce gândeşte, va sfârşi prin a nu gândi ce spune.
Zenon

4. Probleme rezolvate

▪ *ÎNVĂŢĂMÂNT PRIMAR*

P:148. Toţi elevii dintr-o clasă participă, fiecare, la câte o olimpiadă, astfel: cei de la matematică, împreună cu cei de la limba română sunt 18; cei de la matematică împreună cu cei de la istorie sunt 17, iar 10 nu participă, nici la limba română, nici la istorie. Câţi elevi sunt în clasă ?

***Prof.* Apostol Constantin,** Rm. Sărat

Rezolvare:

Notăm cu **m, r, i**, numărul elevilor care participă, respectiv, la olimpiada de matematică, limba română şi istorie.

Astfel, avem : $m+r=18,\ m+i=17,\ m=10$ de unde obţinem că $r=18-10,\ i=17-10,\ m=10$ adică $r=8,\ i=7,\ m=10.$ Deducem că numărul elevilor din clasă este egal cu : 8 + 7+ 10 = 25 .

P:149. Află ultima cifră a produsului P=1x2x3x4x5x6x7x8x9 efectuând doar 5 operaţii:

***Prof.* Brânză Cristian Cosmin, Bădila,** Pârscov

Rezolvare:

După ce se efectuează primele cinci operaţii de înmulţire de la stânga la dreapta se obţine 120.
Dacă unul dintre factoriii unui produs are ultima cifră 0 atunci ultima cifră a produsului va fi cifra 0.

P:150. Două ascuţitori, două caiete, două creioane şi patru pixuri costă cât 5 ascuţitori, cinci caiete, cinci creioane şi un pix. Care dintre obiecte este cel mai scump?

***Înv.* Nicolae Ivăşchescu,** Dolj

Rezolvare:

Fie a, b, c, d respectiv preţul unei ascuţitori, unui caiet, unui creion şi respectiv al unui pix.
Avem, 2a+2b+2c+4d=5a+5b+5c+d, de unde 3a + 3b + 3c = 3d, adică a + b + c = d. Aşadar, preţul unui pix este cât al celorlalte trei la un loc, deci, el este cel mai scump.

P:151. Perimetrul unui dreptunghi este egal cu perimetrul unui pătrat cu latura de 12 cm. Aflaţi dimensiunile dreptunghiului ştiind că lungimea este dublul lăţimii.

***Înv.* Lupşan Ion, Pleşcoi,** Berca

Rezolvare:

Perimetrul pătratului este $P=4\times l=4\times 12=48cm$; Perimetrul dreptunghiului este P = 48 cm. Pe de altă parte , perimetrul dreptunghiului este egal cu $P=2\times(L+l)$. Atunci, $2\times(L+l)=48$ de unde se obţine că L + l = 24. Cum lungimea dreptunghiului este dublul lăţimii, adică L = 2xl se obţine că 2xl +l = 24 adică 3l = 24. Rezultă că l = 8 şi L=16.

P:152. Un pătrat are latura egală cu triplul perimetrul unui romb, iar suma dintre latura pătratului şi cea a rombului este 1950 cm . Aflaţi lungimea laturilor celor două figuri geometrice.

***Prof.* Lupşan Nicoleta Gabriela,** Berca

Rezolvare:

Notăm cu a latura rombului şi cu b latura pătratului. Perimetrul rombului este 4 x a, deci b = 3 x 4 x a, b = 12 x a , a + 12x a = 1950 de unde 13x a = 1950 adică a = 1950 : 13 . Rezultă a = 150 şi b = 12 x 150 , b = 1800. Aşadar, lungimea laturii pătratului este 1800 cm, iar lungimea laturii rombului este 150 cm .

P:153. Patru numere naturale îndeplinesc condiţiile:

a) al doilea este un sfert din primul număr;
b) al treilea este cu 10 mai mare decât al doilea ;
c) al patrulea este cu 10 mai mare decât jumătatea primului număr, adică 50. Aflaţi suma numerelor.

***Prof.* Marinescu Gabriela,** Stănceşti,Vadu Paşii

Rezolvare :
Notăm numerele cu *a,b,c,d.* Din condiţia de la punctul c) aflăm că *d*=50; *d* reprezintă jumătatea lui *a* +10.
a : 2 =50 – 10; *a* : 2 = 40. Aflăm că *a* = 40 x 2 = 80.
Din prima condiţie rezultă că *b* =*a* : 4. Deci *b* = 80 : 4 = 20. Din condiţia punctului b) aflăm că *c* = *b* + 10 ; *c* = 20 + 10 = 30. Suma *a* + *b* + *c* +*d* = 80+20+30+50 = 180.

P:154. Într-o drumeţie, cei 26 elevi ai unei clase se aflau aşezaţi în coloană câte unul. Andrei constată că numărul elevilor din faţa sa este egal cu un sfert din numărul elevilor din urma sa.
Al câtelea din şir se află Andrei?

***Prof.* Lăcrămioara Năstase,** Padina

Rezolvare:
Notăm numărul elevilor din faţa sa cu x. În spatele său vor fi 4·x elevi. În total 5·x elevi, fără Andrei. Problema se va scrie: 5x+1=26, de unde x=5, deci Andrei este al şaselea din şir.

- ***GIMNAZIU***

Clasa a V – a

G:155. Se dă suma : $a\cdot 2^{n+1}\cdot 3^{2n+1}+b\cdot 2^{2n+1}\cdot 3^{n+1}$.

a) Să se scoată factorul comun;
b) Ce număr se obţine dacă n = 2 ?
c) **Să se arate că dacă n= 1 , a = 220 şi b= 318 numărul care se obţine, este şi pătrat perfect şi cub perfect**.

***Prof.* Constantin Apostol**, Rm. Sărat

Rezolvare : **a)** $2^{n+1}\cdot 3^{n+1}(a\cdot 3^n+b\cdot 2^n)$; b) $6^3(9\cdot a+4\cdot b)$; c) Pentru n= 1 , a = 220 şi b= 318 se obţine numărul 6^6 care este şi pătrat perfect şi cub perfect.

G:156. Împărţind un număr mai mic decât 1778, pe rând la 11, 5 şi 6 se obţin resturile 1, 2 şi 0. Aflaţi numerele care satisfac această condiţie.

***Prof.* Viorel Ovidiu Ignătescu,** Buzău

Rezolvare: Conform teoremei împărţirii cu rest, numărul dat se poate scrie de forma n= 11 a +1 = 5b +2 = 6c. Cel mai mic număr de această formă este 12 şi adunând la acesta multiplii numărului [11, 5, 6]=330 se obţin numerele căutate: 12, 342, 672, 1002, 1332, 1662.

G:157. Să se rezolve ecuaţia: $\overline{0,(1x1)}+\overline{0,(2x2)}+...+\overline{0,(9x9)}=x$. ***Prof.* Corbu Violeta,** Buzău

Rezolvare: $\dfrac{\overline{1x1}+\overline{2x2}+...+\overline{9x9}}{999}=x\Leftrightarrow\dfrac{101+202+...+909+90x}{999}=x\Leftrightarrow 101\cdot\dfrac{9\cdot 10}{2}+90x=999x\Leftrightarrow$
$\dfrac{9090}{2}=909x\Leftrightarrow x=5\Rightarrow S=\{5\}$.

G:158. Determinaţi numărul $\overline{abcd}$ **ştiind că : 5+10+15+….+** $\overline{abcd}=\overline{abcd000}$.

***Prof.* Marin Simion,** Rm. Sărat

Rezolvare : Notăm $\overline{abcd}=5x\in\mathbb{N}^*$ deoarece termenii sumei sunt multipli de 5 .
Atunci , 5+10+15+….+ 5x = 5000x. $\Leftrightarrow 5(1+2+3+...+x)=5000x\Rightarrow 5\dfrac{x(x+1)}{2}=5000x$.
Se obţine în final că x=1999 adică $\overline{abcd}=5\cdot 1999=9995$.

G:159. Fie $A=\left\{x\in\mathbb{N}\middle|2^{6n-3}\langle x\le 3^{4n+2}\right\}, B=\left\{x\in\mathbb{N}\middle|3^{4n}\le x\langle 2^{6n+3}\right\}, n\in\mathbb{N}^*$. **Care dintre mulţimile A şi B are mai multe elemente ?** ***Prof.*** **Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare : Trebuie să comparăm numărul de elemente al mulţimii A care este $a=3^{4n+2}-2^{6n-3}$ cu numărul de elemente al mulţimii B care este $b=2^{6n+3}-3^{4n}$. Vom arăta că $a\rangle b$.

$3^{4n+2}-2^{6n-3}\rangle 2^{6n+3}-3^{4n}\Leftrightarrow 3^{4n+2}+3^{4n}\rangle 2^{6n-3}+2^{6n+3}\Leftrightarrow 3^{4n}\cdot 10\rangle 2^{6n-3}\cdot 65\Leftrightarrow$

$3^{4n}\cdot 80\rangle 2^{6n}\cdot 65\Rightarrow 81^n\cdot 80\rangle 64^n\cdot 65$ ceea ce este adevărat. Rezultă că A are mai multe elemente.

G:160. Găsiţi numerele prime $\overline{aa},\ \overline{ab},\ \overline{ba}$, **care verifică relaţia :** $\overline{aa}+\overline{ab}+\overline{ba}=\overline{cc}$.

Prof. **Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

Rezolvare: Pererchile de numere prime de forma $\overline{ab},\ \overline{ba}$, sunt 13, 31, 17, 71, 37, 73, 19, 97 iar ca şi $\overline{aa}$ să fie prim trebuie ca a să fie 1. Verificând toate posibilităţile se obţin soluţiile : $\overline{aa}=11, \overline{ab}=13,\ \overline{ba}=31,$ şi $\overline{aa}=11, \overline{ab}=17,\ \overline{ba}=71.$

G:161. Scrieţi numărul 13^{2010} **ca sumă de trei pătrate perfecte**. ***Prof.*** **Gheorghe Dârstaru,** Berca, Buzău

Rezolvare: $13^{2010}=(3^2+4^2+12^2)\cdot 13^{2008}=(3\cdot 13^{1004})^2+(4\cdot 13^{1004})^2+(12\cdot 13^{1004})^2$.

G:162. Să se afle x şi y numere naturale astfel încât fracţia $\dfrac{3}{(x-1)(y-2)}$ **să fie echiunitară.**

Prof. **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare : Fracţia este echiunitară dacă şi numai dacă (x-1)(y-2)= 3. Rezultă $(x,y)\in\{(2,5);(4,3)\}$.

G:163. Se consideră şirul de numere naturale 11,19,27,…. în care termenii sunt daţi după următoarea regulă 19 = 11+8, 27 = 19+8.

a) Aflaţi numărul de pe locul 2010.

b) Arătaţi că suma primilor 2010 termeni este divizibilă cu 8047. ***Prof.*** **Ion Stănescu,** Smeeni

Rezolvare: a) Numărul de pe locul 2010 este $11+2009\cdot 8=16083$.

b) $S=11\cdot 2010+8\cdot\dfrac{2009\cdot 2010}{2}=2010\cdot 8047\,\vdots\,8047$.

Clasa a VI – a

G:164. Rezolvaţi în $\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^*$ **ecuaţia:** $\dfrac{1}{3x}+\dfrac{1}{5y}=\dfrac{1}{6}$. ***Prof.*** **Adrian Stan,** Buzău

Rezolvare: $\dfrac{1}{3x}=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{5y}\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{5y}\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}=\dfrac{5y-6}{10y}\Rightarrow x=\dfrac{10y}{5y-6}=\dfrac{2(5y-6)+12}{5y-6}=2+\dfrac{12}{5y-6}\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 5y-6\,|\,12\Rightarrow 5y-6\in D_{12}=\{\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;\pm6;\pm12\}$. Cum y este număr întreg rezultă că singura soluţie bună pentru y este 1. Atunci x = -10; $S=\{(-10;1)\}$.

G:165. Arătaţi că numărul A = $7^{2011}+8^{2011}+9^{2011}$ **este divizibil cu 12.**

Prof. **Gheorghe Dârstaru,** Berca, Buzău

Rezolvare:

$A=(4+3)^{2011}+(12-4)^{2011}+(12-3)^{2011}=4^{2011}+3^{2011}+M_{12}+M_{12}+(-4)^{2011}+M_{12}+(-3)^{2011}=M_{12}$

G:166. Se dau mulţimile: $A=\left\{x\in\mathbb{N}\middle|\dfrac{3x+2}{x-2}\in\mathbb{Z}\right\}$ **şi** $B=\left\{x\in\mathbb{N}\middle|\dfrac{5x+7}{x-1}\in\mathbb{N}\right\}$. **Să se determine** $A\cup B; A\cap B;$ **A \ B; B\ A.** ***Prof.*** **Viorel Ovidiu Ignătescu,** Buzău

Rezolvare: $\dfrac{3x+2}{x-2}=3+\dfrac{8}{x-2}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x-2\,|\,8\Rightarrow x-2\in\{-8;-4;-2;-1;1;2;4;8\}\Rightarrow A=\{0;1;3;4;6;10\}$.

$\dfrac{5x+7}{x-1}=5+\dfrac{12}{x-1}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow x-1\,|\,12\Rightarrow x-1\in\{1;2;3;4;6;12\}\Rightarrow B=\{2;3;4;5;7;13\}$.

$\Rightarrow A\cup B=\{0;1;2;3;4;5;6;7;10;13\}$; $A\cap B=\{3;4\}$; A \ B = $\{0;1;6;10\}$; B\ A= $\{2;5;7;13\}$.

G:168. Fie $N=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2007}{2008}$**. Arătaţi că** $44<\frac{1}{N}<2009$. ***Prof.* Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare:Din $\frac{1}{2}\rangle\frac{1}{3},\frac{3}{4}\rangle\frac{3}{5},\ldots,\frac{2007}{2008}\rangle\frac{2007}{2009}\Rightarrow N\rangle\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2007}{2009}\Rightarrow N\rangle\frac{1}{2009}$.Din

$\frac{1}{2}\langle\frac{2}{3},\frac{3}{4}\langle\frac{4}{5},\ldots,\frac{2007}{2008}\langle\frac{2008}{2009}\Rightarrow N\langle\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2008}{2007}\cdot\frac{1}{2009}=\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{2009}\Rightarrow N^2\langle\frac{1}{2009}\langle\frac{1}{1936}=\frac{1}{44^2}\Rightarrow N\langle\frac{1}{44}$.

G:169. Să se arate că în şirul $x_n=\underbrace{55\ldots51}_{n}$, $n\in\mathbb{N}$ **există o infinitate de numere compuse.**

***Prof.* Ovidiu Ţâţan,** Rm. Sărat

Rezolvare : Pentru n=3k+1, $k\in\mathbb{N}$ suma cifrelor lui x_{3k+1} este egală cu 5(3k+1)+1= 3(5k+2) care este divizibilă cu 3 , aşadar şirul conţine o infinitate de numere compuse.

G:170. Găsiţi perechile de numere întregi (x,y) care verifică ecuaţia 1+6x+8y=xy.

***Prof.* Andrei Octavian Dobre,** Ploieşti

Rezolvare :

Ecuaţia dată este echivalentă cu (x-8)(y-6)=49. Se obţine : $S=\{(9,55);(7,-43);(15,13);(1,-1);(57,7)\}$.

G:171. Să se compare numerele:

$A=\frac{4^{1006}}{(5\cdot5^2\cdot5^3\cdot\ldots\cdot5^{63}):125}$, $B=\frac{8^{670}}{(5+5^2+5^3+\ldots+5^{2010})\cdot25}$ ***Prof.* Ana Panaitescu,** Rm. Sărat

Rezolvare : Cum $5\cdot5^2\cdot5^3\cdot\ldots\cdot5^{63}=5^{1+2+3+\ldots+63}=5^{2016}$ şi $5+5^2+5^3+\ldots+5^{2010}=\frac{5^{2011}-5}{4}\Rightarrow$

$A=\frac{2^{2012}}{5^{2013}}\langle\frac{2^{2012}}{5^{2013}-5^3}=B$.

G:172. Fie a, b, c, d, e, f , g şapte numere întregi distincte între ele care verifică relaţia: (7-a)·(7-b)·(7-c)·(7-d)·(7-e) ·(7-f) ·(7-g)=180. Arătaţi că a+b+c+d+e+f+g=44.

***Prof.* Naidin Delia,** Olt

Rezolvare: Deoarece a, b, c, d, e, f , g sunt numere întregi distincte, atunci şi 7-a, 7-b, 7-c, 7-d, 7-e, 7-f, 7-g vor fi numere întregi distincte. Singura posibilitate este să-l scriem pe 180 ca produs de 7 numere întregi distincte: 180=(-1) ·1·(-2) ·2·(-3) ·3·5 şi atunci (7-a)·(7-b)·(7-c)·(7-d)·(7-e) ·(7-f) ·(7-g)=(-1) +1+(-2) +2+(-3) +3+ 5=5, de unde 7·7-(a+b+c+d+e+f+g)=5, adică a+b+c+d+e+f+g =44.

G:173. Să se determine numărul natural $\overline{xyzt}$ **ştiind că** $\frac{\overline{abcd}+\overline{bcda}+\overline{cdab}+\overline{dabc}}{a+b+c+d}\cdot\overline{xyzt}$ **este un pătrat perfect.** ***Prof.* Corbu Violeta**, Buzău

Rezolvare:

$\frac{\overline{abcd}+\overline{bcda}+\overline{cdab}+\overline{dabc}}{a+b+c+d}=\frac{1111\cdot(a+b+c+d)}{a+b+c+d}=1111=11\cdot101.$ $\overline{xyzt}\in\{1111,4444,9999\}$.

G:174. Pe mediana (AM) a triunghiului ABC cu AB = AC se consideră punctele A_1,A_2 ,..., A_{12} astfel încât $A_1BA\equiv A_1BC,\ A_2BA_1\equiv A_2BC,\ldots\ldots,A_{12}BA_{11}\equiv A_{12}BC$**. Ştiind că** $m(A_{12}BC)=1'4''$**, calculaţi** $m(BAC)$**.**

***Prof.* Simion Marin**, Rm. Sărat

Rezolvare: Deoarece $m(A_{12}BC)=1'4''$ şi $A_{12}BA_{11}\equiv A_{12}BC\Rightarrow m(A_{11}BC)=2m(A_{12}BC)=2'8''$.

Analog, se obţine $m(A_{10}BC)=2m(A_{11}BC)=4'16"$ şi din aproape în aproape $m(ABC)=2m(A_1BC)=72^\circ 49'4"$ de unde $m(BAC)=180^\circ-2\cdot 72^\circ 49'4"=34^\circ 21'52"$.

G:175. Pe o dreaptă d se iau punctele A,B,C,D astfel incât $AB=a, AC=b$, $BC=a+b, CD=a+b-c$ si $AD=c-a$, iar a,b,c îndeplinesc condiţiile: $c>a$ si $a+b>c$. Să se stabilească în ce ordine sunt asezate aceste puncte. ***Prof.* Constantin Eugen Păduraru,** Bacău

Rezolvare : Deoarece AB=a, AC=b şi BC=a+b rezultă ordinea C- A – B. Cum CD = a+b-c rezultă ordinea C-D-B. Dar AD=c-a cu $c\rangle a$ prin urmare există următoarea ordine : C- D- A- B.

G:176. Punctul P este situat în interiorul unghiului AOB şi se află la distanţe egale de laturile (OA, (OB. El are aceleaşi proprietăţi faţă de unghiul COD. (OA este situată în interiorul unghiului BOC. Dacă $m(POA)=3m(AOC)$, $m(COD)=120^0$, aflaţi $m(BOD)$. ***Prof.* Ion Stănescu,** Smeeni

Rezolvare: Din datele problemei rezultă că P aparţine bisectoarei unghiurilor $\sphericalangle AOB, \sphericalangle COD.$ Rezultă, $m(\sphericalangle POC)=60^0, m(\sphericalangle AOC)=m(\sphericalangle BOD)=15^0$.

Clasa a VII – a

G:177. Arătaţi că $\sqrt{10n^2+10n+3}$ este număr iraţional, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

***Prof.* Marin Simion**, Rm Sărat

Rezolvare: Deoarece ultima cifră a numărului de sub radical este 3 rezultă că acesta nu este pătrat perfect.

G:178. Aflaţi $x, y\in\mathbb{R}$ ştiind că $\sqrt{4032089+4016x-x^2}-5=\sqrt{y^2-4020y+4040100}$.

Prof. Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Rezolvare: Egalitatea data este echivalentă cu $\sqrt{25-(x-2008)^2}=5+\sqrt{(y-2010)^2}$ şi are sens dacă $25-(x-2008)^2\ge 0\Leftrightarrow |x-2008|\le 5\Leftrightarrow x\in[2003;2013]$. Egalitatea are loc dacă $(x-2008)^2=0$ şi $|y-2010|=0$, adică x=2008, y=2010.

G:179. Să se rezolve în $\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^*$ ecuaţia: $7^{x^2+y-1}-7^{x^2+1}=2352$.

***Prof.* Viorel Ovidiu Ignătescu**, Buzău

Rezolvare: $7^{x^2+1+y-2}-7^{x^2+1}=7^2\cdot 2^4\cdot 3\Leftrightarrow 7^{x^2+1}(7^{y-2}-1)=7^2\cdot 2^4\cdot 3$. Rezultă, $7^{x^2+1}=7^2\Rightarrow x=1\in\mathbb{Z}_+$, şi $7^{y-2}-1=2^4\cdot 3\Leftrightarrow 7^{y-2}=7^2\Rightarrow y=4\in\mathbb{Z}_+$. Aşadar, $S=\{(1;4)\}$.

G:180. Pentru $x, y\in\mathbb{Q}\setminus\{0;1\}$ avem $\frac{1}{x}-y=\frac{1}{y}$. Arătaţi că $\sqrt{\frac{2x+1}{1-2x}}\in\mathbb{Q}$.

***Prof.* Gheorghe Dârstaru,** Berca, Buzău

Rezolvare: Din relaţia dată se obţine $x=\frac{y}{y^2+1}$ de unde $\sqrt{\frac{2x+1}{1-2x}}=\left|\frac{y+1}{y-1}\right|\in\mathbb{Q}$.

G:181. Se dau numerele întregi nenule a,b,c,d astfel încât $\frac{a+b+c-3d}{d}=\frac{b+c+d-3a}{a}=\frac{c+d+a-3b}{b}=\frac{d+a+b-3c}{c}$. Să se determine valoarea produsului $\frac{a+b+c}{d}\cdot\frac{b+c+d}{a}\cdot\frac{c+d+a}{b}\cdot\frac{d+a+b}{c}$.

***Prof.* Violeta Corbu**, Buzău

Rezolvare:

1. Dacă a+b+c+d≠0 atunci

$\frac{a+b+c-3d}{d}=\frac{b+c+d-3a}{a}=\frac{c+d+a-3b}{b}=\frac{d+a+b-3c}{c}=0$ şi a+b+c=3d, b+c+d=3a, c+d+a=3b, d+a+b=3c. Obţinem $\frac{a+b+c}{d}\cdot\frac{b+c+d}{a}\cdot\frac{c+d+a}{b}\cdot\frac{d+a+b}{c}=81.$

2. Dacă a+b+c+d=0, atunci a+b+c=-d, b+c+d=-a, c+d+a=-b, d+a+b=-c, iar $\frac{a+b+c}{d}\cdot\frac{b+c+d}{a}\cdot\frac{c+d+a}{b}\cdot\frac{d+a+b}{c}=1.$

G:182. În triunghiul ABC se construieşte înălţimea [AD], $D\in(BC)$. Aflaţi lungimea segmentelor [AD], [AB], [BC], [AC] ştiind că sunt exprimate prin numere naturale consecutive în această ordine .

***Prof.* Andrei Octavian Dobre**, Ploieşti

Rezolvare : Fie AD=a, AB=a+1, BC =a+2, AC=a+3, $a\in\mathbb{N}$. Conform teoremei lui Pitagora aplicată în triunghiurile ADB, ADC rezultă $BD^2=(a+1)^2-a^2=2a+1$, $DC^2=(a+3)^2-a^2=6a+9$ şi cum $BC^2=(a+2)^2$ atunci din relaţia $BC^2=(BD+DC)^2$ rezultă a= 12. Se obţin, AD=12, AB=13, BC=14, AC=15.

G:183. Se dă triunghiul ABC, cu $m(B)=90^0$ şi $m(C)=70^0$. Din punctul O, interior triunghiului ABC, pleacă o rază de lumină, care atinge latura (AB) în P, sub un unghi de incidenţă de 60^0, se reflectă şi atinge latura (BC) în Q, se reflectă şi atinge latura(AC) în R, se reflectă şi atinge, din nou, latura (AB) în S, iarăşi se reflectă şi atinge latura (AC) în T. Să se arate că Δ ATS ~ Δ ABC .

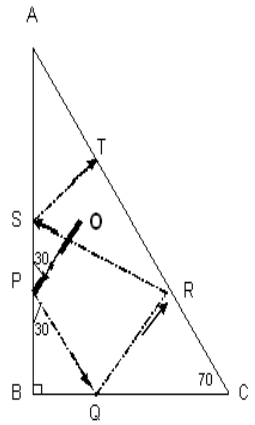
***Prof.* Adrian Stan** , Buzău

Rezolvare :

Notă :

Prin unghi de incidenţă se înţelege unghiul format de raza incidentă şi normala în punctul de incidenţă .
Prin unghi de reflexie se înţelege unghiul format de raza reflectată şi normala în punctul de incidenţă.
Raza incidentă, normala şi raza reflectată se afla în acelaşi plan.
Unghiul de incidenţă este congruent cu unghiul de reflexie.

Fie PN normala în punctul de incidenţă P. Atunci, $m(O\hat{P}N)=60^0\Rightarrow m(O\hat{P}A)=m(Q\hat{P}B)=30^0$. Apoi, $m(P\hat{Q}B)=m(R\hat{Q}C)=60^0$, $m(Q\hat{R}C)=m(S\hat{R}A)=50^0$, de unde rezultă că $m(R\hat{S}B)=m(A\hat{S}T)=70^0$ ceea ce înseamnă că triunghiurile ABC şi ATS sunt asememea conform cazului Unghi- Unghi. (A unghi comun şi $A\hat{S}T\equiv\hat{C}$).



G:184. Se consideră un patrulater convex ABCD şi punctele $M,N\in Ext(ABCD)$ astfel încât

$m(BAN)=m(DCA)$, $m(ABN)=m(CAD)$, $m(MAD)=m(BCA)$,

$m(ADM)=m(BAC)$. **Să se arate că $AB\cdot CD=BC\cdot DA$ dacă şi numai dacă triunghiul ANM este isoscel.**

***Prof.* Neculai Stanciu**, Buzău

Rezolvare:

Din $m(BAN)=m(DCA)$, $m(ABN)=m(CAD)\Rightarrow\Delta ABN\sim\Delta CAD\Rightarrow\frac{AB}{CA}=\frac{NA}{DC}\Rightarrow AN=\frac{AB\cdot CD}{AC}$. (1)

Din $m(MAD)=m(BCA)$, $m(ADM)=m(BAC)\Rightarrow\Delta ADM\sim\Delta CAB\Rightarrow\frac{AD}{CA}=\frac{MA}{BC}\Rightarrow AM=\frac{AD\cdot BC}{CA}$. (2)

Din (1) şi (2) rezultă că dacă $AB\cdot CD=BC\cdot DA$ atunci AN = AM adică triunghiul ANM este isoscel.
Reciproc, Dacă AN = AM atunci folosin relaţiile (1) şi (2) rezultă $AB\cdot CD=BC\cdot DA$.

Clasa a VIII – a

G:185. Să se arate că ecuaţia $x^2+y^5=z^3$ are o infinitate de soluţii în $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$.

***Prof.* Ovidiu Ţâţan,** Rm. Sărat

Rezolvare: Observăm că $10^2+3^5=7^3$ şi cum cel mai mic multiplu comun al exponenţilor este [2;5;3]=30, putem alege $x=10n^{15},\ y=3n^6,\ z=7n^{10},\ n\in\mathbb{N}^*$. Aşadar, $S=\left\{(x;y;z)\middle|x=10n^{15},y=3n^6,z=7n^{10}\right\}$.

G:186. Să se arate că dacă numerele naturale a şi b dau resturi diferite nenule prin împărţirea la 3, atunci numărul a^3+b^3 este divizibil cu 9.

***Prof.* Constantin Apostol**, Rm. Sărat

Rezolvare: Conform teoremei împărţirii cu rest , putem scrie $a=3\cdot c_1+r_1,\ r_1\langle 3,\ r_1\neq 0$ şi $b=3\cdot c_2+r_2,\ r_2\langle 3,\ r_2\neq 0,\ r_1\neq r_2$. Aşadar, fără a restrânge generalitatea se poate lua $r_1=1$ şi $r_2=2$. Atunci, $a^3+b^3=(3c_1+1)^3+(3c_2+2)^3=3^3(c_1^3+c_2^3)+3^3(c_1^2+2c_2^2)+3^2(c_1+4c_2)+9$ care este evident divizibilă cu 9.

G:187. Fie a, b, c > 0 cu a + b + c =1. Arătaţi că $\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\le\frac{1}{2}$.

***Prof.* Gheorghe Dârstaru**, Berca, Buzău

Rezolvare: Utilizând inegalitatea mediilor $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\le\sqrt{ab}$ rezultă $\frac{ab}{a+b}\le\frac{a+b}{4}$. Se procedează analog pentru perechile de numere (b ;c), (a ;c) şi se însumează rezultând relaţia cerută.

G:188. Să se demonstreze inegalitatea: $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+...-\frac{1}{2005}+\frac{1}{2006}\langle 0,2$.

***Prof.* Neculai Stanciu**, Buzău

Rezolvare: Se aplică identitatea Botez-Catalan: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{2n}$.

Astfel, $\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}+...-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{1004}+\frac{1}{1005}+\frac{1}{1006}+...+\frac{1}{2006}\rangle$

$\rangle\frac{1003^2}{1004+1005+...+2006}=\frac{1003}{1505}\Rightarrow\ \frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+...-\frac{1}{2005}+\frac{1}{2006}\langle\frac{1507}{6\cdot 1505}\langle\frac{1}{5}=0,2.$

G:189. Descompuneţi în factori numărătorul şi numitorul expresiei de mai jos, iar apoi simplificaţi expresia şi găsiţi valoarea finală.

$$E=\frac{\left(10^4+10^2+1\right)\cdot\left(12^4+12^2+1\right)\cdot\left(14^4+14^2+1\right)}{\left(11^4+11^2+1\right)\cdot\left(13^4+13^2+1\right)\cdot\left(15^4+15^2+1\right)}.$$

***Prof.* Iuliana Traşcă**, Olt

Rezolvare:

$x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ (1) şi cum $(x+1)^2-(x+1)+1=x^2+x+1$ rezultă $(x+1)^4+(x+1)^2+1=[(x+1)^2+(x+1)+1](x^2+x+1)$ (2)

Folosind relaţia (2) avem:

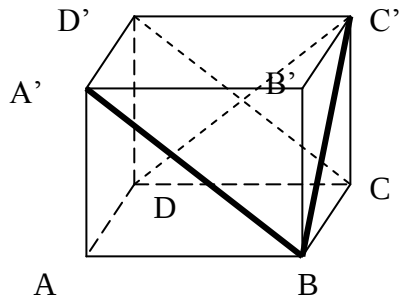
$$E=\frac{\left(9^2+9+1\right)\cdot\left(10^2+10+1\right)\cdot\left(11^2+11+1\right)\cdot\left(12^2+12+1\right)\cdot\left(13^2+13+1\right)\cdot\left(14^2+14+1\right)}{\left(10^2+10+1\right)\cdot\left(11^2+11+1\right)\cdot\left(12^2+12+1\right)\cdot\left(13^2+13+1\right)\cdot\left(14^2+14+1\right)\cdot\left(15^2+15+1\right)}$$

După simplificare avem: $E=\frac{9^2+9+1}{15^2+15+1}$, deci $E=\frac{91}{241}$.

G:190. Determinaţi măsura unghiului format de două diagonale nesituate pe aceeaşi faţă a unui cub . (diagonale pentru feţe).

***Prof.* Marin Simion,** Rm. Sărat

Rezolvare :



Pentru două feţe alăturate unghiul format de două diagonale este de 60^0 deoarece ele pot fi două laturi ale unui triunghi echilateral.

m($A'B, BC'$) = 60^0, deoarece triunghiul

Analog m($D'C, C'B$) = m ($A'B, BC'$) = 60^0, deoarece D'C || A'B .

Pentru două feţe opuse unghiul format de două diagonale este de 0^0 sau 90^0.

m($A'B, D'C$) = 0^0, deoarece A'B || D'C, iar m($A'B, DC'$) = m($D'C, DC'$) = 90^0, deoarece A'B|| D'C şi D'C $\perp$ C'D. În concluzie două diagonale ale unui cub, nesituate pe aceeaşi faţă formează unghiuri de 0^0, 60^0 sau 90^0.

G:191. În vârful A, al trapezului isoscel ABCD cu $AC \perp BC$, se ridică perpendiculara pe planul său, pe care se ia un punct P astfel încât PA= 8. Se ştie că AB = 8, CD = 4 şi că diagonalele determină pe linia mijlocie a trapezului trei segmente congruente, $[ME] \equiv [EF] \equiv [FN]$.

a) Să se arate că $PE \perp BC$;

b) Să se calculeze aria triunghiurilor PFB şi PEF. ***Prof.* Adrian Stan,** Buzău

Rezolvare: a) Din teorema celor trei perpendiculare se arată că $PC \perp BC$ şi cum $BC \perp AC \Rightarrow BC \perp (PAC), PE \subset (PAC) \Rightarrow \quad BC \perp PE$.

b) Conform Teoremei celor trei perpendiculare, $PD \perp DB \Rightarrow A_{PFB} = \dfrac{FB \cdot PD}{2}$. Fie $CT \parallel AD,\ T \in (AB)$.

CD = 4, rezultă AT=TB=4. FN linie mijlocie în triunghiul CTB. FN=2, ME=EF=FN=2. În $\Delta ACB\ dr.(m(\hat{C}) = 90^\circ) \Rightarrow CT$ mediană şi CT=4. Se calculează înălţimea FB din triunghiul echilateral CTB şi rezultă $FB = 2\sqrt{3}$ iar din triunghiul dreptunghic PAD, se obţine PD= $4\sqrt{5}$. $A_{PFB} = 4\sqrt{15}$.

Din A se duce perpendiculara AS pe prelungirea lui MN iar d(P ; EF)=PS, $PS \perp MN$.

Lungimea lui AS = d(A ;MN)= d(D ;MN)= $\dfrac{d(D;AB)}{2} = \sqrt{3}$. $\quad AC = DB = 4\sqrt{3}, PS = \sqrt{67} \Rightarrow$

$$A_{PEF} = \frac{EF \cdot d(P, EF)}{2} = \frac{2\sqrt{67}}{2} = \sqrt{67}.$$

▪ LICEU

Clasa a IX– a

L:98. Fie $A = \dfrac{\sqrt{\sqrt{2010}-1} - \sqrt{\sqrt{2010}+1}}{\left(\sqrt{2010}-1\right)^2 - \left(\sqrt{2010}+1\right)^2}$ **. Se cere să se arate că : a)** $\sqrt{2010} - \sqrt{2009} \langle 1$;

b) $A^2 \langle \dfrac{1}{2^{13}}$; ***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare: a) Se arată prin ridicare la pătrat a inegalităţii date;

b) Notăm $\sqrt{2010}-1=x, \sqrt{2010}+1=y$; Rezultă,

$$A=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x^2-y^2}=\frac{x-y}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-y)(x+y)}=\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+y)}$$, atunci,

$$A^2=\frac{1}{2\sqrt{2010}+2\sqrt{2009}}\cdot\frac{1}{4\cdot 2010}=\frac{\sqrt{2010}-\sqrt{2009}}{8\cdot 2010}\langle\frac{1}{2^{13}}\ .$$

L :99. Demonstraţi că $\forall a,b,c\rangle 0\Rightarrow \quad \frac{abc}{a^3+b^3+abc}+\frac{abc}{b^3+c^3+abc}+\frac{abc}{c^3+a^3+abc}\le 1$.

***Prof.* Andrei Octavian Dobre,** Ploieşti

Rezolvare : Din faptul că $(a-b)(a^2-b^2)\ge 0\Rightarrow a^3+b^3\ge ab(a+b)$. Mai departe, scriind fiecare termen care apare în sumă din inegalitatea dată, sub forma

$\frac{1}{a^3+b^3+abc}\le\frac{1}{ab(a+b)+abc}=\frac{c}{abc(a+b+c)}\Big|\cdot abc$ şi însumând cele trei relaţii se obţine inegalitatea din enunţ.

L :100. Arătaţi că $x^4+10x^3-3x^2-140x+2009>0, \forall x\in\mathbb{R}$. ***Prof.* Ligia Struţu,** Buzău

Rezolvare:

$x^4+10x^3-3x^2-140x+2009=x^2(x^2-4x+4)+14x(x^2-4x+4)+49(x^2-4x+4)+1813=$

$=(x-2)^2(x+7)^2+1813>0, \forall x\in\mathbb{R}.$

L :101. Să se determine minimul sumei $x+y+z$**, ştiind că :**

$\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{30}+\sqrt{35}+\sqrt{42}=20,\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}_+$. ***Prof.* Gheorghe Struţu**, Buzău

Rezolvare: $20=\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{30}+\sqrt{35}+\sqrt{42}\le x+y+z+18\Rightarrow x+y+z\ge 20-18$

$\Rightarrow x+y+z\ge 2\Rightarrow \min(x+y+z)=2$.

L :102. Fie $A_n=a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n,\ n\in\mathbb{N}^*$, **unde** $a_1=1+2+3+\ldots+7$, $a_2=2+3+4+\ldots+8$, $a_3=3+4+5+\ldots+9;\ldots\ldots\ldots$ **. Se cere: a) Determinaţi** a_n; **b) Arătaţi că A_{10} nu este pătrat perfect.**

***Prof.* Constantin Dinu**, Buzău

Rezolvare: a) Se observă că $a_n = n + (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+6) = 7n + 21$. b) A_{10} nu este pătrat perfect deoarece îl conţine o singură dată pe 13.

L :103. Să se arate că oricare ar fi ecuaţia $ax^2+bx+c=0$**, cu** $a>0$**, are rădăcini reale, dacă** $a+b+c\le 0$**. Propoziţia reciprocă este adevărată ?**

***Prof.* Constantin Apostol**, Rm. Sărat

Rezolvare: Dacă $a+b+c\le 0$, atunci, prin înmulţire cu (-4a) şi adunarea lui b^2 rezultă că $\Delta=b^2-4ac\ge(2a+b)^2\ge 0$ceea ce confirmă faptul că ecuaţia are rădăcini reale. Reciproc, nu este adevărat.

Exemplu: Ecuaţia $x^2-5x+6=0$ are rădăcinile reale dar $a+b+c=1-5+6=2\rangle 0$.

L :104. Să se arate că ecuaţia $2x^3+2y^3+z^3+t^3+w^5=20$ **are o infinitate de soluţii în** $(\mathbb{Z}^*)^5$**.**

***Prof.* Ovidiu Ţâţan,** Rm. Sărat

Rezolvare: Vom căuta să găsim soluţii de forma x= 1-a, y= 1+a, z=2-b, t= 2+b. Prin înlocuirea lor în ecuaţia dată se obţine $12a^2+12b^2+w^5=0$ şi luând a=b obţinem $24a^2=-w^5$ sau $2^3\cdot 3\cdot a^2=-w^5$. Se poate alege atunci, $a=b=18n^5$ rezultând

$S=\left\{(x;y;z;t;w)\middle| x=1-18n^5, y=1+18n^5, z=2-18n^5, t=2+18n^5, w=-6n^2\right\}$.

L :105. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ **ecuaţia : {x}(1-2[x]-2{x}) = ([x] + {x}$**^{2} **–[x], unde {x}este partea fracţionară a lui x şi [x] este partea întreagă a lui x.**

***Prof.* Gheorghe Dârstaru,** Berca, Buzău

Rezolvare: Ecuaţia data este echivalentă cu $[x]^2+4[x]\{x\}+3\{x\}^2-[x]-\{x\}=0$ de unde se obţine că

([x]+ {x})([x]+3{x}-1)=0. Se obţin soluţiile: $S=\left\{-1;-\frac{1}{3};0;\frac{1}{3};1\right\}$.

L :106. Să se demonstreze că următoarea inegalitate $\sqrt{x+4}+\sqrt{2x-12}+\sqrt{264-3x}\le 16\sqrt{3}$ are loc pentru toate valorile lui x pentru care membrul stâng are sens şi să se precizeze aceste valori.

***Prof.* Iuliana Traşcă,** Olt

***Rezolvare*:** Din condiţiile de existenţă ale radicalilor se obţine $x\in[6;88]$. Folosind inegalitatea

$a+b+c\le\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}$, $\forall$a, b, c ≥ 0 rezultă

$\sqrt{x+4}+\sqrt{2x-12}+\sqrt{264-3x}\le\sqrt{3\left(x+4+2x-12+264-3x\right)}=16\sqrt{3}$.

L :107. Dacă avem un triunghi, cu lungimile laturilor numere naturale, perimetrul P şi aria A, atunci au loc relaţiile: $a)A<\frac{P^2}{4}$; $b)A\le\frac{\sqrt{3}}{36}P^2$.

***Prof.* Neculai Stanciu**, Buzău

***Rezolvare*:** a) $A=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}$

$(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)<\frac{(a+b+c)^4}{16}=\frac{P^4}{16}$.

b) $\frac{A^2}{P^4}=\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{16p^4}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{16p^3}$

$(p-a)(p-b)(p-c)\le\left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3=\frac{p^3}{27}$ rezultă $\frac{A^2}{P^4}\le\frac{1}{16\cdot 27}$.

L :108. Să se arate că $\forall a\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right]\Rightarrow\ \sin^2 2a\cdot\cos^3(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{6})\cos^3(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{6})>\frac{27}{64}\sin a\cdot\sin 3a$.

***Prof.* Constantin Rusu,** Rm. Sărat

***Rezolvare* :**

Pornind de la identitatea: $\sin a+\sin 2a+\sin 3a=4\sin 2a\cdot\cos(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{6})\cdot\cos(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{6})$, şi aplicând inegalitatea mediilor pentru numerele pozitive $\sin a,\sin 2a,\sin 3a$ obţinem

$\sin a+\sin 2a+\sin 3a>3\sqrt[3]{\sin a\sin 2a\sin 3a}\Leftrightarrow 4\sin 2a\cdot\cos(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{6})\cdot\cos(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{6})>3\sqrt[3]{\sin a\sin 2a\sin 3a}$.

Prin ridicare la puterea a treia rezultă $\sin^2 2a\cdot\cos^3(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{6})\cos^3(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{6})>\frac{27}{64}\sin a\cdot\sin 3a$.

Observaţie. Inegalitatea este strictă deoarece egalitate am avea dacă $\sin a=\sin 2a=\sin 3a\Rightarrow a=0$ fapt exclus deoarece s-a simplificat cu $\sin 2a$.

Clasa a X – a

L :109. Fie f : $\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ astfel încât f(x) + 3 f($\frac{1}{x}$) = $x^2+\frac{3}{x^2}+8$. Calculati : S = $\sum_{k=3}^{2010}\frac{4}{f(k)-6}$.

***Prof.* Ligia Strutu**, Buzău

Rezolvare: În relaţia dată vom înlocui pe x cu $\frac{1}{x}$ rezultând relaţia $3f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=3x^2+\frac{1}{x^2}+8$.

Din cele două relaţii se obţine f(x) = x^2+2. Atunci,

S = $\sum_{k=3}^{2010}\frac{4}{f(k)-6}=\sum_{k=3}^{2010}\frac{4}{k^2-4}=\sum_{k=3}^{2010}\frac{4}{(k-2)(k+2)}=\sum_{k=3}^{2010}(\frac{1}{k-2}-\frac{1}{k+2})=$

$$= \sum_{k=3}^{2010}\frac{1}{k-2}-\sum_{k=3}^{2010}\frac{1}{k+2}=\frac{25}{12}-\left(\frac{1}{2009}+....+\frac{1}{2012}\right).$$

L :110. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia : $9^{\log_3(3^x-2^x)}=4^x$ pentru x > 1. ***Prof.*** **Gheorghe Dârstaru,** Buzău

Rezolvare: Ecuaţia dată este echivalentă cu

$3^{2\log_3(3^x-2^x)}=2^{2x} \Leftrightarrow (3^x-2^x)^2=\left(2^x\right)^2 \Leftrightarrow (3^x-2^x-2^x)(3^x-2^x+2^x)=0$. Rezultă $x=\log_{\frac{3}{2}}2$.

L :111. Să se arate că numărul $A=\overline{11}_x\cdot\overline{12}_x\cdot\overline{13}_x\cdot\overline{14}_x\cdot\overline{15}_x\cdot\overline{16}_x\cdot\overline{17}_x\cdot\overline{18}_x\cdot\overline{19}_x$ nu poate fi cub perfect oricare ar fi baza de numeraţie x.

Prof. **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Numărul A se scrie de forma (x+1)(x+2)(x+3).....(x+9) prin urmare A poate fi scris fără a restrânge generalitatea, de forma A= (n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) sau A= $(n^3-10n)^3 - n(27n^4-180n^2-576)$.

Se obţine $A\langle(n^3-10n)^3$ respectiv, din A- $(n^3-10n-1)^3 = 3n^6 - 27n^5 -60n^4 +177n^3 +300n^2 +606n+1\rangle 0, \forall n\rangle 10$ se obţine $(n^3-10n-1)^3\langle A$. Aşadar, A nu este cub perfect deoarece este cuprins între două cuburi consecutive.

L :112. Să se arate că :

$$\left|\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1}+(x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}+(x+\sqrt{x^2-1})^{n-1}+(x-\sqrt{x^2-1})^{n-1}}{(x+\sqrt{x^2-1})^{n}+(x-\sqrt{x^2-1})^{n}}\right|\le 2,\ (\forall)x\in[-1;1].$$

Prof. **Neculai Stanciu**, Buzău

Rezolvare : Făcând notaţia $T_n(x)=\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n$ în care se va lua $x=\cos\alpha$ va rezulta că expresia din enunţ devine $\left|\frac{T_{n+1}(x)+T_{n-1}(x)}{T_n(x)}\right|=|2x|\le 2,$ deoarece $|x|\le 1.$

L :113. Fie $f:[1;+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$. Să se rezolve ecuaţia $f(\lg x)=1$

Prof. **Constantin Dinu,** Buzău

Rezolvare : Cum $f(x)=\sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2}=\left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|$ rezultă că

$$f(x)=\begin{cases}5-2\sqrt{x-1}, x\in[1;5)\\ 1 \qquad\qquad ,x\in[5;10]\\ 2\sqrt{x-1}-5, x\in(10;\infty)\end{cases}.\ \text{Din } f(\lg x)=1\Rightarrow x\in[10^5;10^{10}].$$

L :114. Să se rezolve ecuaţia : $(2^{2x}-2^x+1)(2^{2x}-2^x+2)=12$.

Prof. **Andrei Octavian Dobre**, Ploieşti, Prahova

Rezolvare : Făcând notaţia $2^{2x}-2^x+1=t$ se obţine ecuaţia t(t+1)=12 de unde rezultă t_1 = - 4 şi t_2 = 3. Pentru rezolvarea ecuaţiilor $2^{2x}-2^x+1=-4$ şi $2^{2x}-2^x+1=3$ se face notaţia $2^x=y\rangle 0$ de unde se obţine : $S=\{(1,1);(1,-1);(-1,1);(-1,-1)\}$.

Clasa a XI – a

L :115. Se consideră matricea: $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ **Să se calculeze** $A^n, n\in N$ **şi limita fiecărui element a lui** A^n **pentru** $n\to\infty$**.**

***Prof.* Lenuta Pirlog**, Buzău

Rezolvare :

Se scrie $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4}\\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}$ şi se demonstrează prin inducţie matematică că

$A^n=\frac{1}{3^n}\begin{pmatrix}\cos\frac{n\pi}{4} & \sin\frac{n\pi}{4}\\ -\sin\frac{n\pi}{4} & \cos\frac{n\pi}{4}\end{pmatrix}$; Atunci, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}\cos\frac{n\pi}{4}=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}\sin\frac{n\pi}{4}=0,$ deoarece sunt produsul a două şiruri, unul mărginit şi altul care tinde la zero.

L :116. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}a & 1 & a\\ a-1 & a & a+1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$**. Să se arate că ecuaţia** $x^{2010}+x^{2008}=A^{2009}$**, nu are soluţii în** $M_3(\mathbb{R})$**.**

***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare : Observăm că $\det(A)=-2a^2-2a-2\langle 0$ deoarece discriminantul ecuaţiei de gradul al doilea $-2a^2-2a-2$ =0 este negativ. Atunci, $\det(A^{2009})=\det(A)^{2009}\langle 0$

Pe de altă parte, este evident că $\det[X^{2008}(X^2+I_2)]\rangle 0$ ceea ce înseamnă că ecuaţia dată nu poate avea soluţii în $M_3(\mathbb{R})$.

L :117. a) Să se calculeze determinantul $\Delta=\begin{vmatrix}x & y & z & v\\ y & x & v & z\\ z & v & x & y\\ v & z & y & x\end{vmatrix}$ **;**

b) Să se demonstreze că dacă numerele $\overline{abcd},\ \overline{badc},\ \overline{cdab},\ \overline{dcba}$ **se divid cu numărul prim p, atunci cel puţin unul din numerele a+b+c+d, a+d-c-d, a-b+c-d, a-b-c+d, se divid cu p.**

***Prof.* Gheorghe Bodea,** Buzău

Rezolvare: a) Se adună toate coloanele determinantului la prima rezultând că determinantul este divizibil cu x+y+z+v. Dacă se adună coloanele întâi şi a doua şi se scad coloanele a treia şi a patra rezultă că este divizibil cu x+y-z-v. Printr-un raţionament analog se obţine că determinantul este divizibil şi cu x-y+z-v şi cu x-y-z+v.

Atunci,determinantul poate fi egal cu $\lambda\cdot(x+y+z+v)(x+y-z-v)(x-y+z-v)(x-y-z+v)$ şi cum coeficientul lui x este 1 rezultă că $\lambda=1$.

b) Conform a) avem $\Delta=(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$. Înmulţind prima coloană a lui Δ cu 1000, a doua cu 100, a treia cu 10 şi adunându-l la ultima obţinem pe ultima coloană numerele $\overline{abcd},\ \overline{badc},\ \overline{cdab},\ \overline{dcba}$. Cum acestea se divid cu numărul prim p, rezultă că Δ se divide cu p, adică cel puţin unul din numerele $(a+b+c+d),(a+b-c-d),(a-b+c-d),(a-b-c+d)$ este divizibil cu p.

L :118. Să se rezolve sistemul format din ecuaţiile: $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{y^2}+\frac{9}{z^2}=4$**,** $x^2+y^2+z^2=9$**,** $xyz=\frac{9}{2}$**.**

Prof.* Neculai Stanciu, *Buzău

***Rezolvare*:** Soluţiile sunt

$$S=\left\{\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{3},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{-\sqrt{6}}{2},-\sqrt{3},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{6}}{2},-\sqrt{3},-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{3},-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\right\}.$$

L :119. Să se studieze continuitatea funcţiei $f:[-1;1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x+[x]}{|x|+x-[x]+2}$**.**

***Prof.* Florentina Popescu,** Buzău

Rezolvare: Întrucât $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{3}, x\in[-1;0)\\ \dfrac{x}{2x+2}, x\in[0;1)\\ \dfrac{x+1}{2x+1}, x=1\end{cases}$, se observă că f nu este continuă în 1.

L :120. Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\min(5x+1,2x-3)$**.**

***Prof.* Natalia Pleşu,**Buzău

Rezolvare: $f(x)=\begin{cases}5x+1, & x\in(-\infty;-\frac{4}{3})\\ 2x-3, & x\in[-\frac{4}{3};\infty)\end{cases}$. Cum restricţiile funcţiei sunt funcţii elementare rezultă că f este continuă pe $(-\infty;-\frac{4}{3})\cup(-\frac{4}{3};\infty)$. Se studiază continuitatea şi apoi derivabilitatea lui f în punctul $-\frac{4}{3}$. Rezultă că f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi nu e derivabilă în $-\frac{4}{3}$.

L :121. Determinaţi numerele naturale a,b,c **astfel încât triunghiul determinat de punctele** $A(a;b),\ B(b;c),\ C(c;a)$ **să aibă aria egală cu** $\frac{3}{2}$**, iar centrul de greutate al triunghiului ABC să fie punctul** $G(3;3)$**.**

***Prof.* Constantin Dinu,** Buzău

Rezolvare: $A_{ABC}=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$ şi cum $A_{ABC}=\frac{3}{2}\Rightarrow a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=3$. (1)

Pe de altă parte, $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)=G(3;3)\Rightarrow a+b+c=9$. (2). Din (1) şi (2) rezultă că $(a;b;c)\in\{(2;3;4);(2;4;3);(3;2;4);(3;4;2);(4;2;3);(4;3;2)\}$.

Clasa a XII – a

L :122. Să se calculeze: $\int\frac{x}{2009(1+x)+2010e^x}$ **dx ; x**$\in(0,\infty)$

***Prof.* Struţu Gheorghe,** Buzău

Rezolvare : Fie f(x) = 2009 + 2009x + 2010 e^x. Atunci, f '(x) = 2009 + 2010e^x şi f(x) – f '(x) =2009x.

$\Rightarrow x=\frac{f(x)-f'(x)}{2009}$. Integrala dată devine:

$$\frac{1}{2009}\left(\int dx-\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx\right)=\frac{1}{2009}\{x-\ln[2009(1+x)+2010e^x]\}+C.$$

L :123. Să se calculeze: $I=\int_1^e\frac{x^2\ln x+2x-1}{x(x\ln x+1)}dx$**.**

***Prof.* Constantin Rusu,** Rm. Sărat

Rezolvare: Considerăm funcţia $f(x)=e^x\ln x,\ f:[1,e]\to\mathbb{R}$.

Avem $f'(x)=e^x\ln x+\dfrac{e^x}{x}=\dfrac{e^x(x\ln x+1)}{x}$ şi $f''(x)=\dfrac{e^x(x^2\ln x++2x-1)}{x^2}$.

Prin urmare, $I=\int_1^e\dfrac{f''(x)}{f'(x)}dx=\left[\ln\dfrac{e^x(x\ln x+1)}{x}\right]\Bigg|_1^e=e-2+\ln(e+1)$.

L :124. Ştiind că pentru orice funcţie de gradul al doilea are loc relaţia:

$\int_{-2}^{2}f(x)dx=m\cdot f(-2)+n\cdot f(0)+p\cdot f(2)$, **să se determine** m^3+n^2+p. ***Prof.*** **Naidin Delia** , Olt

Rezolvare: Pentru funcţia de gradul al doilea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f(x)=ax$^2+bx+c$, avem: f(0)=c, f(-2)= 4a-2b+c, f(2)= 4a+2b+c. Rezultă $a=\frac{1}{8}\left(f(2)+f(-2)-2f(0)\right)$, $b=\frac{1}{4}\left(f(2)-f(-2)\right)$, c = f$(0)$.

$\int_{-2}^{2}f(x)dx=\dfrac{16a}{3}+4c$ sau $\int_{-2}^{2}f(x)dx=\dfrac{2}{3}f(-2)+\dfrac{8}{3}f(0)+\dfrac{2}{3}f(2)$, deci $m=\dfrac{2}{3}$, n=$\dfrac{8}{3}$, p=$\dfrac{2}{3}$.

$m^3+n^2+p=\dfrac{218}{27}$.

L :125. Să se arate că $\dfrac{579}{650}<\int_2^5\dfrac{3x-4}{4x+5}dx<\dfrac{33}{25}$**, fără a calcula integrala.** ***Prof.*** **Iuliana Traşcă,** Olt

Rezolvare:

Fie funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{4}{5}\right\}\to\mathbb{R}$, f(x)=$\dfrac{3x-4}{4x+5}$ cu $f'(x)=\dfrac{31}{(4x+5)^2}>0$, şi $f''(x)=-\dfrac{248}{(4x+5)^3}<0$.

Aşadar, funcţia f este strict crescătoare , respectiv concavă pe intervalul [2, 5] .

Folosind următoarea proprietate pentru funcţia f, " **Dacă** $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **este continuă, strict crescătoare şi concavă, atunci** $(b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2}<\int_a^b f(x)dx<(b-a)f(b)$**",** rezultă

$(5-2)\dfrac{f(2)+f(5)}{2}<\int_2^5\dfrac{3x-4}{4x+5}dx<(5-2)f(5)$, $f(a)=f(2)=\dfrac{2}{13}$, $f(b)$=$f(5)=\dfrac{11}{25}$, adică relaţia din enunţ.

L :126. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}x_1&x_3&x_2\\x_2&x_1&x_3\\x_3&x_2&x_1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{C})$ **unde** x_1,x_2,x_3 **sunt rădăcinile ecuaţiei** $x^3-3x^2+3x+7=0$**. Să se arate că A nu este inversabilă .**

Prof. **Adrian Stan,** Buzău

Rezolvare : Pentru a arăta că A nu este inversabilă este suficient să arătăm că det(A)=0.

$\det(A)=x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3$. Înlocuind x_1,x_2,x_3 în ecuaţia dată, după ce însumăm relaţiile rezultă :

$\sum_{i=1}^{3}x_i^3=3\sum_{i=1}^{3}x_i^2-3\sum_{i=1}^{3}x_i-21=3(3^2-2\cdot3)-3\cdot3-21=-21$. Atunci,

$\det(A)=x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3=-21-3\cdot(-7)=0$ adică A nu este inversabilă.

Altfel, se putea folosi formula : $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$.

„ Analfabetul viitorului nu va fi cel care
nu ştie să citească, ci cel care nu ştie să înţeleagă”
Alvin Toffler

5. Probleme propuse

▪ *ÎNVĂŢĂMÂNT PRIMAR*

P:155. Micşoraţi triplul numărului 256 cu dublul numărului 289, apoi măriţi rezultatul de 4 ori. Cu cât trebuie mărit rezultatul pentru a obţine cel mai mic număr natural scris cu patru cifre?

***Prof.* Mirela Axente,** Buzău

P:156. Suma a patru numere este 360. Al doilea număr este dublul primului număr, al treilea este cât primele două la un loc, iar al patrulea de două ori mai mare decât al treilea. Diferenţa dintre al treilea şi al patrulea este 90. Care sunt numerele?

***Prof.* Mirela Axente,** Buzău

P:157. Suma a trei numere este 400. Primul număr este de două ori mai mare decât triplul celui de al treilea şi de două ori mai mare decât al doilea. Aflaţi cele trei numere.

***Prof.* Brânză Cristian Cosmin, Bădila,** Pârscov

P:158. Aflaţi valoarea lui **a** din egalitatea:

$$\{11+3\times[2+3\times(2\times3-a)]\}\times\{3+[2+(0:20+2)]:4\}\times19+34=2010.$$

***Înv.* Nicolae Ivăşchescu,** Dolj

P:159. Doi fraţi au împreună 32 de lei. Primul are cu 2 lei mai mult decât un sfert din cât are al doilea. Câţi lei are fiecare copil?

***Înv.* Lupşan Ion, Pleşcoi,** Berca

P:160. Maria şi Mihaela au împreună 2100 de lei. Diferenţa dintre suma pe care o are Maria şi triplul sumei pe care o are Mihaela este cu 100 mai mare decât suma Mihaelei. Să se afle câţi lei are fiecare fată.

***Prof.* Lupşan Nicoleta Gabriela,** Berca

P:161. Dacă a = 1x2 + 2x3 + 3x4 + 4x5 + 5x6 + 6x7 + 7x8 + 8x9 + 9x10, iar b = (a – 130) : 8 , aflaţi valoarea expresiei $a - 2 \times b$.

Prof. Marinescu Gabriela, Stănceşti,Vadu Paşii

P:162. Micşorează cel mai mare număr de cinci cifre care are trei cifre identice şi două cifre distincte cu numărul 99887, apoi triplează diferenţa.

***Prof.* Marinescu Gabriela,** Stănceşti,Vadu Paşii

P:163. Să se afle cinci numere pare consecutive, ştiind că dacă le adunăm cu dublul sumei lor obţinem 240.

***Prof.* Lăcrămioara Năstase,** Padina

P:164. Suma a cinci numere naturale este 272. Aflaţi numerele ştiind că primele patru sunt pare consecutive, iar al cincilea este o treime din suma celorlalte.

***Prof.* Marin Marcela,** Rm. Sărat

- ***GIMNAZIU***

Clasa a V – a

G:192. 5 reviste de matematică şi 4 culegeri de probleme costă 93 lei. Doi colegi schimbă, după cost, 4 reviste cu 3 culegeri. Cât costă 6 reviste şi 5 culegeri ?

***Prof.* Ion Stănescu,** Smeeni, Buzău

G:193. Să se determine numerele naturale x şi y, ştiind că diferenţa lor este egală cu câtul lor. **(**Concurs Comăneşti, 2010**)** ***Prof.* Constantin Apostol,** Rm. Sărat

G:194. Arătaţi că orice putere naturală nenulă a numărului 19 se poate scrie ca sumă de trei pătrate perfecte. ***Prof.* Marin Simion,** Rm. Sărat

G:195. Aflaţi restul împărţirii numărului $A=10^{2010}-10^{2009}+3\cdot 10^{2008}$ la 33.

***Prof.* Adrian Stan,** Buzău

G:196. Considerăm numărul natural $n=\overline{abc}$, scris în baza 10. Să se arate că dacă diferenţa dintre n şi suma cifrelor sale este un număr par, atunci a şi b sunt ambele pare sau ambele impare.

***Prof.* Ana Panaitescu,** Rm. Sărat

G:197. Demonstraţi propoziţia:"dacă pentru orice număr natural $n>1$ există cel puţin un număr prim p în intervalul $(2n,3n)$ (*Conjectura lui Sierpinski* pentru k=2) atunci există cel puţin un număr prim în intervalul $(n,2n)$ (*Postulatul lui Bertrand*)." **Prof. Neculai Stanciu,** Buzău

G:198. Să se determine un pătrat perfect cuprins între 3^{81} şi $13\cdot 3^{79}$. **Prof. Adrian Stan,**Buzău

G: 199. Găsiţi patru numere ştiind că primul este $\frac{1}{6}$ din ala doilea, al doilea $\frac{1}{4}$ din al treilea, al treilea $\frac{1}{2}$ din al patrulea , iar primul cu 94 mai mic decât al patrulea. **Tuţa Luca,** Buzău

G:200. Determinaţi cinci numere de câte şapte cifre diferite, divizibile cu 250.

Prof. Lăcrămioara Năstase, Padina

G:201. Verificaţi pentru ce numere naturale n, numărul a = 1! + 2! + 3! + … + n! nu este pătrat perfect, unde prin n! înţelegem produsul 1·2·3·…·n.

Prof. Gheorghe Dârstaru, Berca,Buzău

Clasa a VI – a

G:202. Să se arate că 396 divide $12^{n+1}-22(2^{2n+1}+3^{n+1})+132n+98$.

***Prof.* Mihály Bencze**, Braşov

G:203. Să se determine numărul $\overline{xyzt}$, ştiind că $\overline{xyzt}+2\cdot\overline{yzt}+3\cdot\overline{zt}+4\cdot t=2010$.

***Prof.* Constantin Apostol**, Rm. Sărat

G:204. Există numărul natural **a**, astfel încât fracţia $\frac{3a+2}{4a-2}$ să se simplifice prin 5 ?

***Prof.* Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

G:205. Să se determine mulţimea $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{3x+502}{4x-1}\in\mathbb{Z}\right\}$. **Prof. Adrian Stan**, Buzău

G:206. Găsiţi cel mai mare număr mai mic decât 1000 care are exact 10 divizori.

***Prof.* Gheorghe Dârstaru**, Buzău

G:207. Suma a trei numere naturale este 87. Dacă se măreşte primul număr cu 150% din el, al doilea se micşorează cu 25 % din el, iar al treilea se micşorează cu 5, numerele obţinute sunt egale. Să se afle numerele. ***Prof.* Ana Panaitescu,** Rm. Sărat

G:208. Să se arate că $2{,}7 < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{25} < 7{,}49$.

Prof. Lăcrămioara Năstase, Padina, Buzău

G:209. Să se afle x din egalitatea:

$$\frac{1}{5}\left\{\frac{1}{5^2}\cdot\left[\frac{1}{5^3}\cdot\left(\frac{1}{5^4}+\frac{1}{5^5}x\right)-\frac{1}{5^6}\right]-\frac{1}{5^7}\right\}-\frac{1}{5^8}=\frac{1}{5^9},\quad x\in\mathbb{N}.$$

Prof. Cornelia Gurău, Bacău

G:210. Se dau triunghiul echilateral ABC şi pătratul BCDE cu vârful A exterior pătratului. Să se împartă un unghi al triunghiului în patru unghiuri congruente, folosind numai o riglă negradată.

***Prof.* Nicolae Ivăşchescu,** Dolj

Clasa a VII – a

G:211. Se dau numerele naturale a = 3n+5, b = 2n+3, c = n+2, $n\in\mathbb{N}^*$. Ce fel de număr este $\sqrt{[a,b]+[a,c]}$, raţional sau iraţional ?

***Prof.* Nicolae Ivăşchescu,** Dolj

G:212. Dacă a,b,c sunt laturile unui triunghi arătaţi că $\frac{a}{1+a},\frac{b}{1+b},\frac{c}{1+c}$ sunt de asemenea laturile unui triunghi.

***Prof.* Mihály Bencze,** Braşov

G:213. a) Să se determine numerele $\overline{abc}$ ştiind că: $\sqrt{\overline{abc}}=\overline{ab}-\sqrt{c}$.

b) Să se determine numerele $\overline{abcd}$ ştiind că: $\sqrt{\overline{abcd}}=\overline{ab}+\sqrt{\overline{cd}}$.

***Prof.* Ovidiu Ţâţan,** Rîmnicu Sărat

G:214. Să se rezolve în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ecuaţia: $x^3-3y=4$

***Prof.* Lăcrămioara Năstase**, Padina, Buzău

G:215. Aflaţi numărul raţional a, ştiind că $a(a+2)\sqrt{2}+\sqrt{2}$ este număr raţional.

***Prof.* Ion Stănescu,** Smeeni

G :216. În triunghiul dreptunghic isoscel ABC cu ipotenuza BC se construieşte simetricul M al centrului cercului înscris în triunghi faţă de latura (BC). Arătaţi că triunghiul ACM este isoscel.

***Prof.* Marin Simion,** Rm. Sărat

G:217. Să se determine lungimea razei cercului circumscris unui triunghi, ştiind că măsurile unghiurilor sale sunt proporţionale cu numerele 3, 4 şi 5 şi că perimetrul şi aria sa sunt numeric egale.

***Prof.* Constantin Apostol**, Rm. Sărat

G:218. Se dă trapezul ABCD cu $m(\hat{A})=m(\hat{D})=90^0$, $AB=11\sqrt{2}$, $CD=2\sqrt{2}$ şi aria sa este egală cu $39\sqrt{2}$. Să se afle $m(ACB)$.

***Prof.* Adrian Stan, Rm. Sărat**

G:219. Fie a, b, c, lungimile laturilor unui triunghi oarecare, ABC şi S_{ABC}, aria sa.

a) Să se arate că $S_{ABC}\le\frac{a^2+b^2}{4}$ b) Să se arate că $S_{ABC}<\frac{a^2+b^2+c^2}{6}$

***Prof.* Constantin Apostol**, Rm. Sărat

Clasa a VIII – a

G:220. Dacă a,b$\in\mathbb{R}$, atunci $2\left(a^2-b^2\right)^2+4ab\left(ab-3\right)+9\ge 0$.

Prof. **Delia Naidin,** Caracal, Olt

G:221. Arătaţi că aria figurii formată din punctele de coordonate (x ; y), unde $|x| \le \sqrt{2}, |y| \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ este exprimată printr-un număr natural pătrat perfect. ***Prof.*** **Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

G:222. Arătaţi că numerele A şi B, unde
A=$\sqrt{2^{2010}+2^{1006}+1}$ şi B=$\sqrt{2^{2010}-2^{1007}+2^{1006}+1}$ sunt numere naturale impare consecutive.

Prof. **Iuliana Traşcă**, Olt

G:223. Arătaţi că orice număr întreg se poate reprezenta sub forma $x^2+y^2-z^2$, unde $x, y, z \in Z$.

Prof. **Mihály Bencze**, Braşov

G:224. Determinaţi partea întreagă a numărului real x , ştiind că :

$$x = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{1225}+\sqrt{1224}}}{\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{10}}+...+\frac{1}{\sqrt{900}+\sqrt{899}}}.$$

Prof. **Marin Simion**, Rm. Sărat

G:225. Să se rezolve în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, ecuaţia : $x^2 = 4y^2+3y+3$ ***Prof.*** **Constantin Apostol**, Rm. Sărat

G:226. Se consideră un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a, b, c şi diagonala $d=\sqrt{6}$ .Calculaţi:
$\min(\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca})$. ***Prof.*** **Neculai Stanciu,** Buzău

G:227. Considerăm trei cuburi cu muchiile de lungimi a, b şi c , unde $a+b+c=k$.Dacă suma ariilor bazelor cuburilor este egală cu suma volumelor acestora şi egală cu k , arătaţi că cele trei cuburi sunt identice. ***Prof***. **Neculai Stanciu,** Buzău

G:228. Se dă prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu $AB=a$ şi $AA'=b$. Să se arate că planele (ABC') şi (BCA') sunt perpendiculare, dacă şi numai dacă, $3a^2=2b^2$.

Prof. **Constantin Apostol**,Rm. Sărat

Clasa a IX – a

L:127. Să se demonstreze că $\frac{1}{2^{2010}\cdot 2010!}\langle\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot....\cdot\frac{2009}{2010}\langle\frac{1}{\sqrt{2010}}$. ***Prof.*** **Andrei Dobre**, Ploieşti

L:128. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ determinaţi $x\in\mathbb{N}^*$ astfel încât:
$\sqrt{x-1}\langle\sqrt{n-1}+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\langle\sqrt{x}$. ***Prof.*** **Neculai Stanciu,** Buzău

L:129. Să se arate că : $\sum_{k=1}^{n}\frac{9k^2+21k+13}{(9k^2+21k+10)^3}=\frac{n(3n^2+15n+25)}{125(3n+5)^3}$.

Prof. **Mihály Bencze,** Braşov

L:130. Dacă $x, y, z>0$ arătaţi că $\sqrt{3}(x+y+z)\ge\sqrt{x^2+2yz}+\sqrt{y^2+2zx}+\sqrt{z^2+2xy}$.

Prof. **Mihály Bencze,** Braşov

L:131. Să se arate că dacă x+y+z = 6, xy+yz+xz = 9, atunci x, y, z$\in[0,4]$.

Prof. **Delia Naidin,** Caracal, Olt

L:132. Aflaţi pătratul sumei rădăcinilor ecuaţiei: $x^2\cdot\left[\left(\sqrt{2}-x\right)^2+2\sqrt{2}x-2x^2\right]+[x]=0$, unde [x] este partea întreagă a lui x. ***Prof***. **Iuliana Traşcă**, Olt

L:133. Cel mai mic dintre unghiurile unui poligon convex măsoară 78^0. Aflaţi numărul laturilor poligonului ştiind că măsurile unghiurilor sale sunt în progresie aritmetică de raţie 4.

***Prof.* Constantin Dinu,** Buzău

L :134. a) Fie n, m$\in \mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că : $\sum_{k=0}^{n-1} arctg \frac{m}{m^2+k(k+1)} = arctg \frac{n}{m}$

b) Să se arate că : $arctg \frac{1}{2} + arctg \frac{1}{3} + arctg \frac{1}{5} + arctg \frac{1}{8} = arctg 2$

Prof.* Ciprian Cheşcă, *Buzău

L:135. Să se demonstreze că în orice triunghi avem:

$$\frac{(p-b)(p-c)}{a^2} + \frac{(p-c)(p-a)}{b^2} + \frac{(p-a)(p-b)}{c^2} \le \frac{bc}{(b+c)^2} + \frac{ca}{(c+a)^2} + \frac{ab}{(a+b)^2}.$$

Să se precizeze când avem egalitate.

***Prof.* Constantin Rusu,** Rm. Sărat

Clasa a X – a

L:136. Dacă $x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ demonstraţi că

$$\sqrt{(2+\sin^2 x)(2+\cos^2 y)} + \sqrt{(2+\cos^2 x)(2+\sin^2 y)} \ge \frac{1}{2}\cdot\left(9+\sin(x+y)\right).$$

***Prof.* Mihály Bencze,** Braşov

L:137. Să se rezolve ecuaţia: $\log_4 x \cdot \log_9(19-x) = 1$.

***Prof.* Adrian Stan,** Buzău

L:138. Se dau numerele $a = \sqrt{5-2\sqrt{3}} + (\sqrt{3}-2)^{-1}$ şi $b = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[3]{-32} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$.

Să se calculeze $(b-a)^2$.

Prof. Adrian Stan, Buzău

L:139. Aflaţi x din egalitatea: $\sum_{k=1}^{99}(k+1)\cdot 3^k = \frac{x\cdot 3^{100}-3}{4}$.

***Prof.* Iuliana Traşcă**, Olt

L:140. Rezolvaţi ecuaţia $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2^{1-y^2}$.

***Prof.* Andrei Dobre**, Ploieşti

Clasa a XI – a

L:141. Să se calculeze limita $\lim_{x\to\infty} \frac{\log_2(2+\sqrt{x}+2^x)}{\log_3(3+\sqrt[3]{x}+3^x)}$.

***Prof.* Adrian Stan,** Buzău

L:142. Arătaţi că ecuaţia: $(1+\sqrt{1+\lg^2 x})\lg x + x(1+\sqrt{1+x^2}) = 0$, are o singură soluţie în intervalul $(0,1)$.

***Prof.* Neculai Stanciu,** Buzău

L:143. Unui elev i se scrie pe tablă matricea $A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & 3 & * \\ 2 & * & 7 \end{pmatrix}$. Profesorul îi cere să înlocuiască asteriscurile cu numere întregi astfel încât după completare, suma tuturor elementelor de pe fiecare linie, fiecare coloană şi de pe cele două diagonale să fie egale. Este posibil acest lucru ?. În caz afirmativ, ce matrice obţine elevul ?

***Prof.* Constantin Dinu,** Buzău

L:144. Dacă $A, B \in M_2(R)$ arătaţi că $(AB - BA)^2 = (\det(AB + BA) - 4\det AB)I_2$.

***Prof*. Mihály Bencze,** Braşov

L :145. Să se ridice la puterea $n \in \mathbb{N}$, matricele:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **;** **b)** $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ **;** ***

Clasa a XII – a

L: 146. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie prin $x \circ y = 2xy - 2x - 2y + 3$.

a) Calculaţi $\underbrace{x \circ x \circ x \ldots\ldots \circ x}_{2010\ termeni}$. Generalizare.

b) Pe tablă sunt scrise numerele -2010, -2009, …0, 1, 2, …2009, 2010. Se şterg două numere a şi b şi în locul lor se scrie numărul 2ab -2a -2b +3. Se continuă acest procedeu până când pe tablă rămâne un singur număr. Care este acest număr ?

***Prof*. Constantin Dinu,** Buzău

L:147. Dacă $f : R \to R$ astfel încât $f(x) + f(-x) = 1, \forall x \in [-1,1]$ calculaţi $\int_{-1}^{1} \frac{(x^4+1)f(x)}{x^6+1} dx.$

***Prof*. Mihály Bencze**, Braşov

L :148. Fie $P(x) = \sum_{k=0}^{7} x^k$, cu rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_7$ şi $T = \sum_{k=0}^{7} \frac{10}{x_k - 7}$. Ce valoare are T ?

***Prof*. Naidin Delia**, Olt

L:149. Demonstraţi ingalitatea: $\int_a^b e^{2x^2} dx > \frac{3}{4} \cdot \frac{e^{b^2} - e^{a^2}}{b^3 - a^3}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ şi $a \neq b$.

***Prof*. Constantin Rusu**, Rm. Sărat

Vizitaţi www.mateinfo.ro

MATEmatică şi INFOrmaţii din învăţământul ROmânesc

Reviste, sinteze teorie, probleme rezolvate, concursuri şi olimpiade, programe şcolare, proiecte didactice, metodologii şi documente şcolare, cărţi de matematică, teste, fişe de lucru, jocuri de logică, softuri educaţionale, modele subiecte BAC.

„ Trebuie să cultivăm multă gândire,
nu multă învăţătură ”.

Democrit

6. Caleidoscop matematic

1. Virusul tupeist

Virusul tupeist este un virus mutant care se dublează la fiecare minut, fiecare din urmaşii săi fiind tot viruşi tupeişti. După câte minute numărul viruşilor tupeişti va depăşi un milliard?

2. Prinţii şi înţeleptul

Un împărat le-a cerut celor doi fii ai săi ca după moartea sa , împărăţia să fie a aceluia dintre ei al cărui cal va ajunge ultimul de la palatul prinţilor la palatul regal. După moartea împăratului, fiecare prinţ ar fi vrut să conducă împărăţia, dar nu se hotăra niciunul să pornească în cursa spre palatul regal nu cumva să ajungă cu calul său înaintea calului fratelui său. Prinţii au apelat la un înţelept. Ca să-i ajute în această problemă, înţeleptul le-a spus doar două cuvinte. Care au fost acestea?

3. Cum preferaţi să plătiţi?

Dacă vi se oferă modalitatea de a vă achiziţiona o maşină, plătind 40000 de lei cash sau să plătiţi azi 1 leu şi apoi timp de 30 de luni să plătiţi în fiecare lună dublul sumei plătită în luna precedentă, cum aţi proceda ca să vă fie mai convenabil?

TAINA PIRAMIDEI LUI KHEOPS

Tânărul arhitect egiptean **Hamal el-Molah** a găsit în apropierea piramidei lui **Kheops**, veche de 5 mii de ani, o corabie a faraonului, care are o lungime de 17 m. Datorită unei întâmplări deosebit de fericite, corabia s-a găsit în perfectă stare (nici timpul, nici hoţii nu s-au atins de ea). Corabia, ca şi marea piramidă, se pare că au fost construite pentru însuşi **Kheops**. Se presupune că aceasta este a şa zisa „ corabie a soarelui”, destinată transportului faraonului împreună cu zeul soarelui, RA. În acest caz pe corabie pot fi descoperite statui, aur şi pietre preţioase, tablouri, mobile, precum şi diverse, inscripţii, care ar putea umple pagina albă a istoriei, povestindu - ne cum era **Kheops** şi să dezvăluie misterul construcţiei piramidei sale.

Intrările secrete în mormântul faraonului

Piramida, cu ajutorul unei instalaţii ingenioase, era închisă ermetic. Pe canalele de direcţie au fost aruncate trei blocuri de granit, care au închis portalul „camerei regale”. Pe „coridorul ascendent” abrupt au fost coborâte blocuri – închizătoare de granit, care au închis accesul în „coridorul descendent”.

Constructorii piramidei, printr-o galerie secretă, pe care au închis-o şi sus şi jos, au pătruns în „coridorul descendent”. Părăsind piramida , ei au mascat cu o placă de calcar intrarea deja închisă în „coridorul ascendent”. Apoi în urma lor s-a închis uşa de piatră, prevăzută cu o contragreutate, şi în partea de nord a piramidei n-a rămas nici o urmă de intrare. Oricâte încercări, de mii de ani, care s-au făcut pentru a găsi comoara, n-au avut nici un rezultat.

Comoara de sub picioare

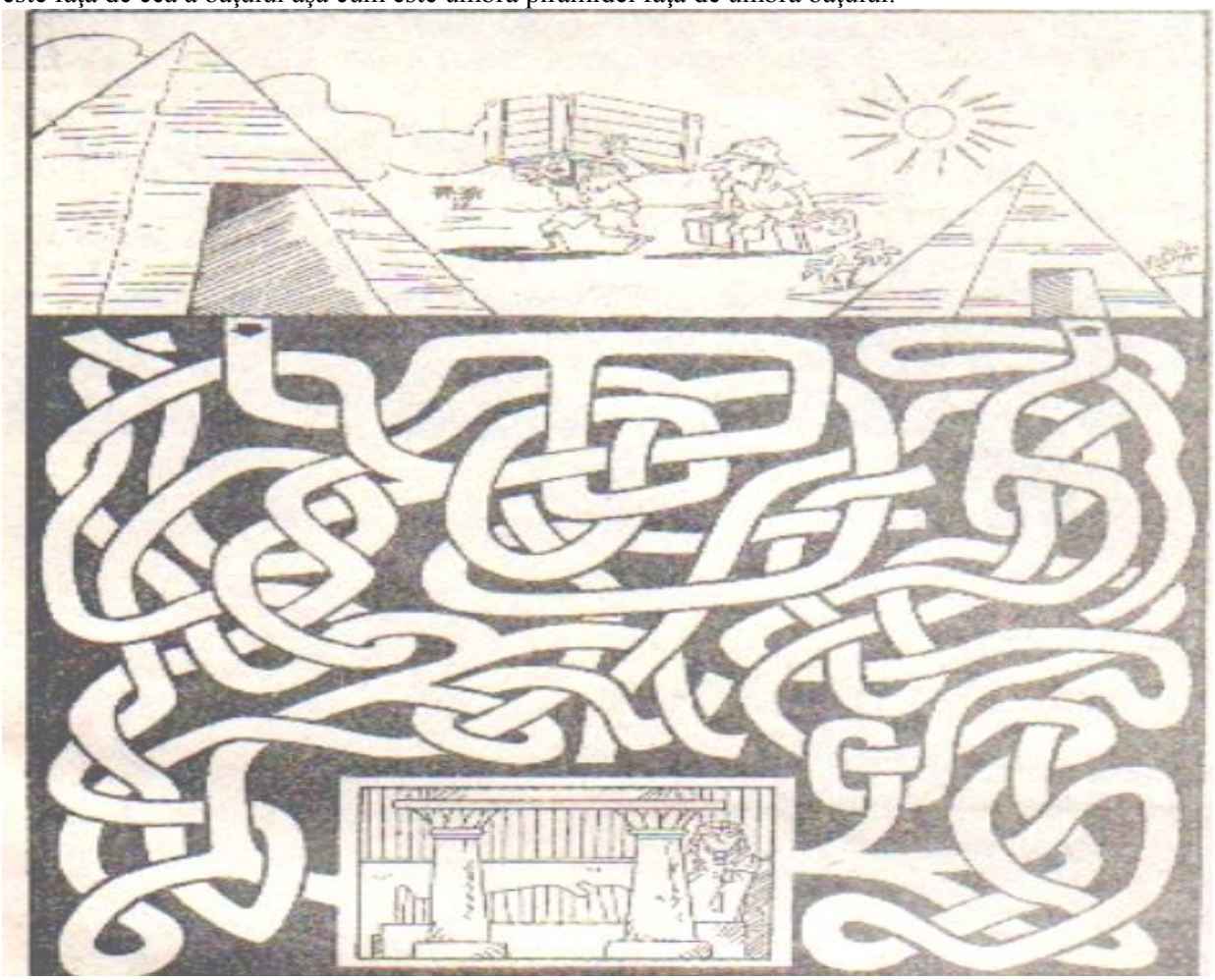
Omenii de ştiinţă, turiştii şi chiar cei care au vrut să jefuiască mormintele, nu o dată au trecut pe deasupra încăperii subterane cu barca faraonului, care se află la 25m de partea de sud a marii piramide. Nimeni nu bănuia existenţa ei. Dacă n-ar fi fost construcţia unei şosele pentru turişti şi ochiul experimentat al arhitectului egiptean, comoara ar mai sta ascunsă sub stratul de nisip gros de 15 m.

Înlăturând nisipul, constructorii şoselei au descoperit o serie de blocuri de calcar de câte 15 tone, cu lungime totală de 150m, situate sub spaţiul îngrădit de un zid.

Hamal el-Molah, care a condus lucrările, a remarcat că aceste blocuri sunt prea masive pentru o simplă fundaţie. Bănuind că ele servesc ca acoperiş pentru o încăpere subterană, el a chemat tăietorii de piatră şi a spart unul dintre blocuri. Din gaură a venit miros de tămâie şi cedru. Cu ajutorul luminii solare reflectate de o oglindă el a văzut „corabia faraonului". Oamenii de ştiinţă consideră această descoperire ca una dintre cele mai mari după descoperirea comorii regelui **Tutankamon**.

Ştiaţi că ….?

Matematicianul şi astronomul grec **Thales din Milet**(sec. 6 î.e.n.) a dat un strălucit exemplu de calcul a înălţimii marii piramide, cu ajutorul umbrei piramidei. Astfel, el a înfipt un băţ vertical în nisip exact la capătul umbrei pe care o lăsa piramida şi a măsurat lungimile celor două umbre lăsate de piramidă şi de băţ. În dialogul imaginat de istoricul **Plutarh**, Thales afirma că aşezând băţul său vertical la extremitatea umbrei piramidei, se formează cu razele Soarelui două triunghiuri asemenea, ceea ce arată că înălţimea piramidei este faţă de cea a băţului aşa cum este umbra piramidei faţă de umbra băţului.



LABIRINTUL DIN PIRAMIDĂ : Puteţi să găsiţi drumul care pleacă din piramida din stânga, trece prin mormântul faraonului şi ajunge la intrarea din piramida din dreapta?

Soluţii la problemele 1, 2, 3:

1. 2 la puterea a 10 – a este 1024 şi este mai mare ca 1000. Atunci 2 la puterea 30 este mai mare ca 1000 la puterea a treia adică decât 1 miliard. Pentru a ajunge de la un virus tupeist adică 2 la puterea 0 la virusul 2 la puterea 30, sunt necesare 31 de multiplicări deci, 31 de minute.

2. „Schimbaţi caii" au fost cele două cuvinte spuse de înţelept.

3. Calculând suma dată pentru a doua variantă se obţine $1+2+2^2+2^3+2^4+...+2^{30}=2^{31}-1$ sumă ce depăşeste valoarea de 1 miliard de lei. Prin urmare, este convenabilă prima variantă de a plăti cu 40000 de lei cash.

„ Viaţa este un vis pentru un înţelept, un joc pentru un prost, o comedie pentru un bogat, o tragedie pentru cei săraci”.
Sholom Aleichem

7. Poşta redacţiei

Dragi cititori, elevi şi profesori, a apărut al şaselea număr al revistei de matematică „ **SCLIPIREA MINTII**”, o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noştri, şi care, sperăm noi, va aduna tot mai mulţi elevi şi profesori împreună, din judeţul Buzău şi nu numai, pentru a face din obiectul matematicii o activitate performantă.

Profesorii şi elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciţii şi probleme cu enunţ şi rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătăţii calitatea acestei reviste, o pot face trimiţând materialele membrilor colectivului de redacţie sau pe adresa de e_mail: **ady_stan2005@yahoo.com,** fie materiale tehnoredactate(**salvate în Word 2003**) , fie scrise de mână şi scanate. **Materialele primite trebuie să fie originale şi să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise şi către alte reviste**. Dreptul de autor al materialelor trimise spre publicare, aparţine redacţiei.

Elevii care doresc să trimită rezolvările problemelor, trebuie să ia legătura cu profesorii lor şi să respecte condiţiile ca fiecare problemă să fie rezolvată pe o singură foaie cu specificarea numărului problemei, şi a autorului ei, iar la sfârşitul soluţiei să-şi treacă numele şi prenumele, clasa şi profesorul său, şcoala şi localitatea.(Indicativele **P, G** şi **L** sunt pentru diferenţierea pe invăţământ primar, gimnazial respectiv liceal) Fiecare elev poate rezolva şi trimite problemele destinate clasei în care se află şi pe cele ale ultimelor două clase imediat inferioare precum şi pe cele din clasele superioare. Fiecare rezolvare corectă şi completă se va nota cu un punct iar în funcţie de posibilităţi, elevii cu cele mai mari punctaje vor fi premiaţi cu diplome şi cărţi.

Facem pe această cale o invitaţie către toţi profesorii de matematică care apar în revistă, de a sprijinii şi promova în continuare revista în rândul elevilor, iar cei cărora li se publică articole să comande un număr mai mare de exemplare, circa 10-15 de reviste.

Data finală până când profesorii şi elevii pot trimite materialele, rezolvările şi comenzile pentru numărul **7** al revistei **„ SCLIPIREA MINTII”** va fi **1 Martie 2011**. Vă urăm succes şi vă aşteptăm.

Redacţia

Rubrica rezolvitorilor de probleme

Şcoala cu clasele I-VIII “Vasile Cristoforeanu” Rm. Sărat:
Clasa a VII-a : 32p-Buterez David, Sîrbu Claudiu, 25p- Chiriac Andrei,Doni Alina, 22p- Pârlog Valentin, Baciu Diana Valentina, Tudorache Alina, Neagu Daniela, Lazăr Elena ,Vlad Oana Andreea, Taşcă Valentin, 15p- Banu Calinuţ ; **Clasa a VIII-a :** 23p- Sitaru Bogdan, Andronescu Alexandra, 20p- Tatu Horaţiu Ştefan, Ursică Bogdan, Chiriac Corina, Barbu Ionelia; **Prof. Marin Simion;**

Şcoala cu clasele I-VIII nr. 15, „George Emil Palade”, Buzău:
Clasa a VIII-a: 22p-Adam Anca Nicoleta, Aldea Teodora, Clinceanu Loredana, Enică Sebastian, Grozea Cosmin, Lişman Simona, Marin Andrei ; **Prof. Stanciu Neculai.**

Şcoala cu clasele I-VIII, Smeeni.
Clasa aVI-a: 25p. Ciurea Monica;20p. Bulgarea Alexandra;15p. Neacsu Laura, Ionascu Daniel, Dumitrascu Nicusor, Paun Dragos. **Clasa a VII- a**. 25p.Scarlat Roxana,;15p.Vasile Cristina, Marin Valentina, Popa Iulian; **Clasa a VIII-a**: 24p. Dragomir Alexandru; 15p.Cristea Maria, Birzoi Madalina. **Prof. Stanescu Ion.**

Şcoala cu clasele I-VIII, nr.1 Nehoiu:
Clasa a VII-a: 25p- Irimia Mălina, **Prof. Prefac Vasile.** 27p-Petre Andreea, **Prof. Prefac Maritanţa.**

Liceul de Artă „ Margareta Sterian", Buzău:
Clasa a VI-a: 20 p- Constantin Alexandra, Ţuclea Laura, Argăseală Gabriela, Velea Roxana, Stanciu Georgian, **Clasa a VII-a**: 25p- Cristea Irina, Stanciu Adelina; **Clasa a X-a**: 22 p- Dumitrache Emanuel, Mititelu Aurora, Enescu George, Vasile Smaranda, **Clasa a XI-a**: 20p- Ciomag Alina, Costache Raluca, **Prof. Dibu Daniela**.

Şcoala cu clasele I-VIII Potoceni:
Clasa a VI-a: 20p- Anton Cristina, Bereveanu Anca, Catinca Andreea; **Clasa a VII-a**: 24p- Câmpeanu Bianca Andreea,Luntraru Denisa, Păduraru Alexandra, Scântei Bianca, Caloian Bogdan; **Clasa a VIII-a**: 25p- Câmpeanu Iulian, Popescu Mirela, Sava Ionuţ, Soare Anelis, **Prof. Moise Violeta**

Colegiul Economic Buzău:
Clasa a X-a: 23 p- Marin Adina, Mândruţă Alina; **Prof. Dinu Constantin**.

Grupul Şcolar „ Costin Neniţescu", Buzău:
Clasa a IX-a: 10 p. Feraru Andreea, Grama Mădălin, Iordache Răzvan, Lică Ionut,Huchiu Roxana, Lăudatu Georgiana, Pavel Ciprian, Cojocaru Marian**, Prof. Adrian Stan**
Clasa a X-a: 25p- Zaharia Mădălina, Barbu Adriana, Bisoceanu Aura, Soare Manuela, Grecu Andra, **Prof. Stan Adrian**. Borcău Georgiana, **Prof. Pleşu Natalia**, Olteanu Robert, Frăţiloiu Adrian, Bucur Liviu, Feraru Viorel, **Prof. Popescu Florentina**.
Clasa a XI-a: 26p- Vlad Iulian, , Dinu Alin, Antemir George, 20p- Vlad Ana Maria, Dima Octavian, Hurloi Maria, Anghel Sorin, Cojanu Maria, Nica Elena, Berechet Ionut, **Prof. Stan Adrian**. 20p- Iordache Mariana, Ispas Alina, Semian Ionela, Iordache Ioana, Anghel Cristina, **Prof. Pleşu Natalia**;

Şcoala cu clasele I-VIII "Gh. Popescu " Mărgineni –Slobozia, Olt
Clasa a V-a: 8 p.Radu Giorgiana, Marinescu Cătălin, Catană Andreea, Ştefan Adriana,
Pîrvu Cristina; **Clasa a VI-a**: 12p. Traşcă Cătălina, Ghiţă Alin; **Clasa a VII-a**: 18 p. Marinescu Dorina, Vladu Constantin, Badea Valentin. **Prof. Iuliana Traşcă.**

Scoala cu clasele I – VIII "Ion Creangă" Bacău:
Clasa a VI-a : 12p **-** Popescu Cezara, Chiper Raluca, Herciu Mădălina, Mocanu Alexandru; **Clasa a VIII-a: 14p -** Moruz Alexandru, Militaru Elena, Popa Dragoş **Prof. Constantin Eugen Păduraru.**

Colegiul Naţional " Fraţii Buzeşti", Craiova:
Cl. a VII-a : 12 p- Vârlan Leonard, **prof. Mioara Ionescu**; Clasa a VIII-a: 13p- Ene Cristina, **Prof. Drd. Ramona Bălăşoiu**;
Şcoala cu clasele I-VIII, "Traian", Craiova:
Cl. a VII-a : 14p- Sima Oana , Ţuculină Gabriel , **prof. Basarab Constantin**; **Clasa a VIII-a** : 14p- Vuple Vlad, **Prof. Basarab Marlena;**

Şcoala cu clasele I-VIII nr. 1, Padina.
Clasa a III-a: 15p. Năstase Teodora; **Clasa a V-a**: 15p.Iasoceac Roxana; 10p. Bocioacă Andreea, Mircescu Dănuţ; 6p. Negulescu Cristina Elena, Dumitru Georgiana; **Clasa a VI-a**: 18p. Năstase Daniel; 8p. Corneci Raluca Gabriela; **Clasa a VII-a**.: 7p. Lapoviţă Adrian, Mihăilă Fănel Daniel;
Clasa a VIII-a: 15p. Drăgoi Alexandru Ştefan. **Prof. Lăcrămioara Năstase.**

Scoala cu clasele I-VIII, nr. 4, Moineşti, Bacău.
Clasa a VII-a: 12p. Martin Adrian, Armeanu Ana; **Clasa a VIII-a** : 18p. Botezatu Georgiana, Dudau Codruta, Gheorghe Bianca, Cuceac Vicentiu, Ciubotaru Alexandru. **Prof. Cornelia Gurău**

Şcoala cu clasele I-VIII, Bozioru, Buzău.
Clasa a V-a: 10p. Popa Mioara Elena, Stoian Elena; **Clasa a VI-a**: 12p. Cazacu Andrei, Cazacu Mihăiţă Constantin, Curcă Cristian Vlăduţ, Morărescu Daniela Ancuţa; **Clasa a VII-a**: 15p. Popa Dumitru Alexandru, Spătaru Alexandru Ciprian; **Clasa a VIII-a**: 19p-Beganu Elena Claudia, Custura Alexandru Iulian, Spătaru Felicia Elena. **Prof. Ion Radu**

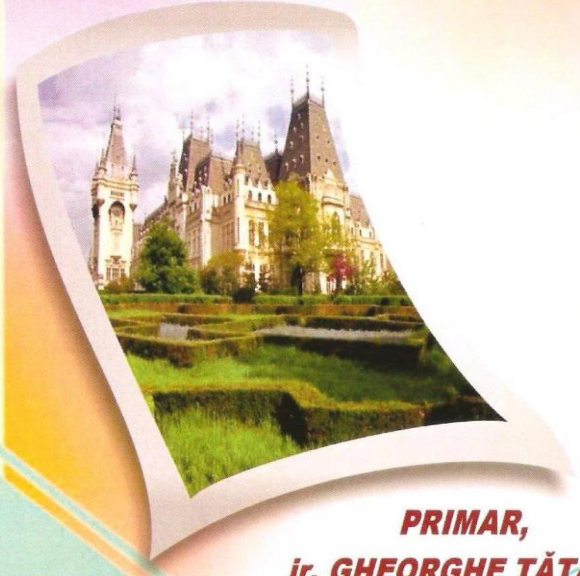
Scoala nr. 1 Rm. Sărat:
Clasa a VII-a: 10p. Ghiţă Eva Roxana, Boboc Alina, Leţoiu Ionuţ. **Prof. Daniela Ungureanu.**

ORGANIZATORI :
Primăria Târgu Frumos, jud. Iaşi
Asociaţia Cultural-Ştiinţifică
"Vasile Pogor" Iaşi

PARTENERI :
Şcoala cu clasele I-VIII
Păstrăveni, jud. Neamţ
Primăria com. Costeşti, jud. Iaşi

EXPOZIŢIA NAŢIONALĂ "ANELISSE" - CONCURS DE REVISTE ŞCOLARE, GRANTURI ŞI MATERIALE PUBLICITARE ŞCOLARE

din 24 - 29 iunie 2010 de la Iaşi - România



DIPLOMA DE PREMIERE

Premiul _I_

Se acordă revistei:
"SCLIPIREA MINŢII"
de la: GRUP ŞCOLAR « COSTIN NENIŢESCU »
BUZĂU, jud. BUZĂU,
coordonată de: prof. STAN ADRIAN
şi prof. STANCIU NECULAI,
la Secţiunea I – Reviste şcolare.

PRIMAR,
jr. GHEORGHE TĂTARU

PREŞEDINTE,
prof. TEODOR BIVOL

EDITURA RAFET
Str. Gradistei, nr. 5, Râmnicu Sărat, Tel: 0238568085
ISSN 1716-3615