REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

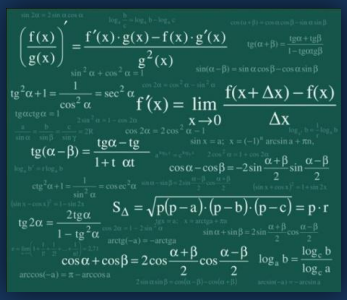
ISSN 2065-6432 - iunie 2016

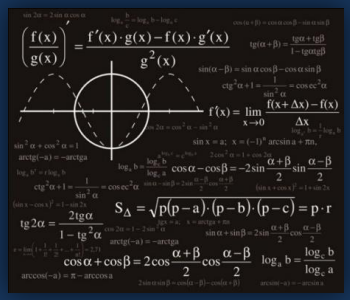
www.mateinfo.ro

REVISTĂ LUNARĂ

DIN FEBRUARIE 2009

revista@mateinfo.ro





COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ŞI SUSŢINĂTOR PERMANENŢI AI REVISTEI

NECULAI STANCIU, ROXANA MIHAELA STANCIU ŞI NELA CICEU

1. PRINCIPIUL CUTIEI ÎN CONCURSURILE ȘCOLARE...pag. 2
Ștefănuț Ciochină

2. DEMONSTRATIE GRAFICĂ APLICATĂ LA EXTRAGEREA RADĂCINII PĂTRATE DINTR-UN NUMĂR RAȚIONAL ...pag. 10
Laurian Colcer

3. ASUPRA UNEI INEGALITĂȚI DE LA OLIMPIADA DE MATEMATICĂ,RUSSIA, 2003...pag. 13
Marin Chirciu și Octavian Stroe

4. SOLUȚII PROBLEMA LUNII MAI 2016... pag.15
Autor: Constantin Telteu

5. CONCURS PENTRU ELEVI ȘI PROFESORI PROBLEMA LUNII IUNIE 2016 ... pag.22
Autor: Gheorghe Rotariu

6. MODEL EVALUARE NAȚIONALĂ MATEMATICĂ – MAI 2016 ... PAG. 23
7. MODEL BAC MATEMATICĂ –MATE-INFO - MAI 2016 ... PAG. 28

1. PRINCIPIUL CUTIEI ÎN CONCURSURILE ŞCOLARE

Ştefănuţ Ciochină

Şcoala Gimnazială ”I. L. Caragiale”, Brăila

Rezumat: În acest articol este prezentat principiul cutiei şi sunt rezolvate o serie de probleme întâlnite în concursurile şcolare cu ajutorul acestui principiu. Cu toate că la o simplă inspecţie vizuală acesta pare simplu de aplicat, sunt întâlnite un număr mare de dificultăţi şi obstacole, în rândul elevilor, în rezolvarea unor aplicaţii din diverse competiţii matematice.

1. Introducere

Principiul lui Dirichlet este cunoscut sub denumirea de ”The pigeonhole principle” (principiul cuştii de porumbei) [1,2]. Acest principiu de combinatorică (enunţat de Peter Gustav Dirichlet în anul 1834) are un număr foarte mare de aplicaţii, însă nu totdeauna rezolvarea problemelor practice folosind acest principiu este facilă.

Cea mai uzuală formulare a principilui cutiei este [3]:

Dacă (n + 1) bile sunt introduse în n cutii, atunci cel puţin o cutie are mai mult de o bilă.

De asemenea, sunt întâlnite şi enunţuri echivalente:

a) Forma funcţională:

Dacă A şi B sunt mulţimi cu $|A|>|B|$, atunci pentru fiecare funcţie $f:A\to B$ găsim un element b în B astfel încât $\left|f^{-1}(b)\right|>1$.

b) Forma partiţională [4]:

Fie A o mulțime nevidă și $A_1, A_2, A_3, ...A_n$ o partiție a lui A (adică $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$ și $A_i \cap A_j = \varnothing$, pentru $i \neq j$, $A_i \neq \varnothing$, $1 \leq i \leq n$). Dacă considerăm $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, n + 1 elemente din A, atunci există cel puțin o submulțime A_i care să conțină cel puțin două elemente dintre cele n + 1.

2. Aplicații practice ale principiului cutiei

În acest paragraf vom prezenta câteva probleme, cu caracter aplicativ, care se rezolvă utilizând principiul cutiei (Principiul lui Dirichlet).

1. Să se demonstreze că printre oricare șapte numere întregi există două numere a căror diferență este un număr par și divizibilă prin 3 [5].

Olimpiada de matematică – etapa locală, Botoșani, 2010

Soluție:

Un număr este par și divizibil prin 3 dacă și numai dacă este divizibil prin 6. Prin împărțirea la 6 a oricărui număr întreg obținem un rest din mulțimea $\{0,1,2,3,4,5\}$.

Conform principiului cutiei rezultă că există cel puțin două numere care vor avea același rest r. În concluzie

$$\left.\begin{array}{l} x = 6p + r \\ y = 6q + r \end{array}\right\} \Rightarrow x - y = 6 \cdot (p - q).$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

2. Să se arate că oricare ar fi numărul $a \in N$, există numerele $m, n \in N^*$, $m \neq n$ astfel încât $2014 / (a^m - a^n)$ [6].

Concursul Centrelor de Excelență ”Cătălin Țigăeru”, Suceava, 2014

Soluție:

Se pot distinge două cazuri:

i) dacă $a \in \{0,1\} \Rightarrow a^m - a^n = 0$, pentru orice $m, n \in N^*$, ceea ce conduce la faptul că divizibilitatea este evidentă.

ii) dacă $a \in N, a \geq 2$, vom considera numerele natural distincte $a^1, a^2, a^3, ..., a^{2015}$. Conform principiului cutiei există printre acestea două numere $a^m \neq a^n$ care să dea același rest la împărțirea cu 2014. În concluzie, există două numere *m* și *n*, $m \neq n$ pentru care $2014 / (a^m - a^n)$.

3. Spunem că numărul natural *a* este ”aliat” cu numărul natural *b* dacă $a \neq b$, iar *a* și *b* au cel puțin o cifră comună în scrierea lor în baza zece. De exemplu, 2011 este aliat cu 1, cu 22, cu 200, etc.

Să se demonstreze că în orice submulțime *M* a mulțimii numerelor naturale, *M* având zece elemente, există cel puțin două elemente din mulțimea *M* care au același număr de aliați în *M* (eventual zero aliați) [6].

Olimpiada de matematică – etapa locală, Galați, 2011

Soluție:

Fiecare din cele 10 numere poate avea 0, 1, 2, 3, …, 8 sau 9 aliați în mulțimea *M*. Se disting trei cazuri distincte:

i) Dacă există cel puțin două numere fără aliați, problema este rezolvată.

ii) Dacă un singur număr nu are aliați, atunci rămân 9 numere care pot avea fiecare 1, 2, 3, …, 8 aliați. Conform principiului cutiei, cel puțin două numere vor avea același număr de aliați.

iii) Dacă nu sunt numere fără aliați, atunci fiecare din cele 10 numere are 1 sau 2 sau 3 sau … sau 9 aliați. Rezultă conform principiului cutiei că există două numere care vor avea același număr de aliați.

4. Demonstrați că, din 81 de numere de tipul $7^a \cdot 11^b \cdot 13^c$, putem alege patru astfel încât produsul lor este puterea a patra unui număr natural [6].

Concursul Interjudețean ”Alexandru Myller”, Iași, 2014

Soluție:

Împărțim cele 81 de numere în nouă grupe de câte nouă termeni. Folosind principiul cutiei, există în fiecare grupă câte două elemente având produsul pătrat perfect, obținem astfel nouă perechi de numere dintre cele date care au produsele pătrate perfecte.

Exponenții factorilor 7, 11 și 13 din aceste produse sunt pari, deci având una dintre formele $4k$ sau $4k+2$, există opt posibile distribuții modulo 4 ale exponenților produselor. Vom găsi două produse care au aceeași formă a exponenților pentru fiecare dintre factorii 7, 11 și 13, iar produsul lor va fi putere a patra a unui număr natural.

5. Într-un pătrat de latură 60 se află 121 de puncte distincte. Arătați că printre acestea există trei puncte cu proprietatea că aria triunghiului determinat de ele este cel mult egală cu 30 [7].

Olimpiada de matematică – etapa județeană, 2011

Soluție:

Cum $60 = 5 \cdot 12$, vom împărți pătratul în 60 de dreptunghiuri cu laturile de 5 respectiv 12 (toate laturile mari ale dreptunghiurilor paralele între ele).

Aria fiecărui dreptunghi este de 60. Conform principiului cutiei, trei dintre puncte se vor găsi în același dreptunghi. Rezultă că aria triunghiului determinat de aceste trei puncte nu poate depăși jumătate din aria dreptunghiului. Ceea ce trebuia să demonstrăm.

6. Demonstrați că oricum am alege 5 numere naturale, dacă le ridicăm la puterea a patra, printre numerele obținute găsim cel puțin două a căror diferență se divide cu 10 [6].

Olimpiada de matematică – etapa județeană, Dolj, 2006

Soluție:

Fie $n \in N$, determinăm ultima cifră a lui n^4.

$$U(n) = \{0,1,2,...,9\} \Rightarrow U(n^2) = \{0,1,4,5,6,9\} \Rightarrow U(n^4) = \{0,1,5,6\}$$

Deoarece avem cinci numere, conform principiului cutiei, găsim printre ele două (de exemplu, notate cu x și y) astfel încât x^4 și y^4 au aceeași ultimă cifră. Rezultă că $10 / (x^4 - y^4)$.

7. Să se arate că în scrierea în baza 10 a numărului 2^{2007} există o cifră care se repetă de cel puțin 61 de ori [8].

Concursul Centrelor de Excelență din Moldova, 2007

Soluție:

Din faptul că $1000 < 1024 \Rightarrow 10^3 < 2^{10}$ și

$$\left.\begin{array}{l} (10^3)^{200} < 2^{200} \\ 10^2 < 2^7 \end{array}\right\} \Rightarrow 10^{602} < 2^{207}$$

Rezultă că 2^{2007} are cel puțin 602 cifre. Dacă nicio cifră a numărului 2^{2007} nu se repetă de cel puțin 61 de ori, atunci numărul maxim de cifre ar fi egal cu $60 \cdot 10 = 600$. Conform principiului cutiei, rezultă că 2^{2007} are cel puțin o cifră care se repetă de cel puțin 61 de ori.

8. Pe o sferă de rază 1 se iau la întâmplare 9 puncte. Demonstrați că există două puncte a căror distanță în linie dreaptă nu depășește $\sqrt{2}$ [9].

Baraj, 1978

Soluție:

Vom împărți sfera în opt regiuni egale, prin trei plane perpendicular două câte două trecând prin centrul sferei.

Conform principiului cutiei, există cel puțin două puncte în aceeași regiune. Rezultă că distanța dintre aceste două puncte nu poate depăși valoarea de $\sqrt{2}$.

9. Se dă o mulțime de 10 numere naturale distincte de două cifre. Demonstrați că putem alege două submulțimi disjuncte a căror sumă să fie aceeași [3].

OIM,1972

Soluție:

O mulțime S de 10 numere de două cifre are $2^{10} = 1024$ submulțimi. Suma elementelor unei submulțimi este de cel mult $10 \cdot 99 = 990$. Astfel sunt mai puține sume decât submulțimi. Există deci două submulțimi S_1 și S_2 având aceeași sumă. În continuare, se disting două posibile cazuri:

i) Dacă $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, problema este rezolvată.

ii) Dacă $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$, atunci eliminăm elementele commune celor două mulțimi și după acest procedeu cele două submulțimi devin disjuncte.

10. 51 de insecte minuscule sunt așezate în interiorul unui pătrat de latură 1. Demonstrați că în oricare moment există cel puțin trei insecte care pot fi acoperite de un disc de rază $\frac{1}{7}$ [3].

Soluție:

Vom împărți pătratul în 25 de pătrățele de latură $\frac{1}{5}$. Într-unul din aceste pătrățele de latură $\frac{1}{5}$ și diagonală $\frac{\sqrt{2}}{5}$ se vor găsi cel puțin trei insecte, conform principiului cutiei. Rezultă că cercul circumscris acestui pătrățel are raza mai mică decât $\frac{1}{7}$, ceea ce trebuia să demonstrăm.

11. Un maestru de șah are încă 77 de zile pentru a se pregăti în vederea unui concurs. De aceea își propune să joace în fiecare zi cel puțin o partidă, dar în total cel mult 132 partide. Să se arate că există un șir de zile consecutive în care va juca în total 21 partide [10].

Soluție:

Notăm cu a_i numărul de partide jucate până în cea de a i – a zi inclusive. În conformitate cu aceste condiții impuse rezultă următoarele inegalități:

$$1 \le a_1 < a_2 < ... < a_{77} \le 132$$

Adunând 21 la aceste inegalități, șirul de inegalități devine:

$$22 \le a_1 + 21 < a_2 + 21 < ... < a_{77} + 21 \le 153$$

Șirul $a_1, a_2, a_3, ..., a_{77}, a_1 + 21, a_2 + 21, ..., a_{77} + 21$ conține 154 de numere naturale cuprinse între 1 și 153. În consecință, cel puțin două dintre ele trebuie să fie egale. Acestea trebuie să se afle, primul în prima jumătate, cel de al doilea, în cea de a doua jumătate a șirului complet, din cauză că fiecare semișir este monoton crescător, deci nu ar putea conține două elemente egale. Există deci doi indici i și j astfel încât $a_i = a_j + 21$, numerele a_i și a_j fiind din primul semișir. În consecință, din ziua $j + 1$ și până în ziua i inclusive se vor juca în total 21 de partide de șah.

12. Considerăm un număr natural n. Să se arate că dacă se aleg mai mult de jumătate din întregii din intervalul $[1, 2 \cdot n]$, atunci vor exista doi întregi care se divid unul pe celălalt [11].

Soluție:

Construim mulțimile $A_i = \{2^p \cdot (2 \cdot i - 1) \ / p = 0, 1, 2, ...\}$, care conțin numerele impare împreună cu multiplii lor mai mici sau egali cu $2n$. Mulțimea A_i conține al i-lea număr impar din intervalul $[1, 2n]$. În intervalul $[1, 2n]$ există n întregi impare, deci vom avea n mulțimi.

Reuniunea acestor mulțimi este mulțimea $\{1,2,3,...,2n\}$. Alegând n + 1 întregi, doi vor aparține aceleași mulțimi. În aceste mulțimi există cel puțin două numere: un număr impar și dublul său care satisfac condiția împusă în enunțul problemei.

3. Concluzii

Se poate observa cu ușurință că dacă într-o problemă se poate aplica principiul cutiei, atunci fiecare problema de existență referitoare la mulțimi finite (în unele cazuri și infinite) se poate rezolva de obicei folosind principiul cutiei. În concluzie, principiul este o simplă confirmare a existenței. Principiul cutiei nu oferă indicii și nu ajută cu nimic în găsirea cutiei cu mai multe obiecte în ea. Pentru cei mai mulți dintre elevi dificultatea aplicării cu succes a acestui principiu constă în identificarea cutiilor și bilelor.

Bibliografie

1. www.math.ust.hk.

2. www.cims.nyv.edu.

3. Arthur Engel, *Probleme de matematică – strategii de rezolvare*, Editura Gil, 2006.

4. Christina Theresia Dan, Sabina Tatiana Chiosa, *Didactica matematicii*, Editrura Universitaria craiova, 2008.

5. Ion Damian Bîrchi, ș.a., *Olimpiadele și concursurile de matematică, V – VIII, 2010*, Editura Bîrchi, 2010.

6. www.mategl.com.

7. www.olimpiade.ro.

8. Artur Bălăucă, *Olimpiade, Concursuri și Centre de Excelență*, Editura Taida, 2011.

9. Dumitru Bușneag, Ioan Maftei, *Teme pentru cercurile și concursurile de matematică ale elevilor*, Editura Scrisul Românesc, 1983.

10. Nicolae Teodorescu, ș.a., *Probleme din gazeta matematică*, Editura Tehnică, 1984.

11. Mihaela Oltean, *Principiul cutiei lui Dirichlet*, Ginfo nr. 13/8, decembrie 2003.

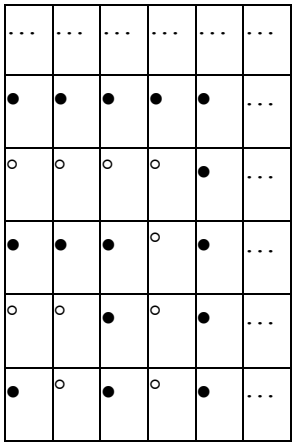
2.DEMONSTRATIE GRAFICĂ APLICATĂ LA EXTRAGEREA RADĂCINII PĂTRATE DINTR-UN NUMĂR RAȚIONAL

Prof. Laurian Colcer, Liceul Teoretic "Ion Creanga", Tulcea

Exista idei creative care puse in manual ar putea spori gradul de accesibilitate si atractivitate al matematicii. Dau aici un exemplu de aplicare a unei formule bine cunoscute in matematica:

Avem: $1+3=2^2$, $1+3+5=3^2$, $1+3+5+7=4^2$,...

Demonstram, atat grafic (unde patratul are n laturi): (de aceea metoda poate fi catalogata chiar "distractiva"), cat si prin metodele clasice de adunare a termenilor unei progresii aritmetice in ordine crescatoare si dedesubt in ordine descrescatoare sau prin inductie matematica completa:



ca *suma primelor n numere impare este patratul numarului m* (pentru orice numar natural *m*):

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2 \qquad (1)$$

O formula simplu de inteles si de demonstrat, instructiv fiind chiar si echivalenta metodei "fara cuvinte" cu cea a inductiei matematice complete.

O cale de a calcula radicalul simplu de explicat, care nu comporta impartiri este urmatoarea, expicitata pe exemple:

Radacina patrata (radicalul) dintr-un numar natural oarecare:

Observam ca daca *n* nu e patrat perfect atunci va exista m natural a.i.

$m^2 < n < (m+1)^2$, de unde $n = m^2 + r$ cu $0 \leq r < (2m+1)-1$, cu r restul obtinut la extragerea radacinii patrate.

Aceasta ne sugereaza un procedeu (algoritm) de gasire a radacinii patrate (sau a aproximatiei ei prin lipsa si prin adaos) a numarului natural n, numarand pur si simplu suma a cate numere impare incepand cu 1 constituie numarul n:

Pasii algoritmului	Exemplul 1	Exemplul 2
Cautam un patrat perfect mai mic sau egal decat n cat mai mare	$\sqrt{1879}=?$ $1600 < 1879 < 50^2 \Rightarrow 40^2 < 1879 < 50^2$	$\sqrt{1985}=?$ $1600 < 1985 < 50^2 \Rightarrow 40^2 < 1985 < 50^2$
Scriem patratul gasit ca suma de numere impare	$40^2=1+3+5+\ldots+(2\cdot 40-1) = 1+3+5+\ldots+79$	$40^2=1+3+5+\ldots+(2\cdot 40-1) = 1+3+5+\ldots+79$
Scadem numerele impare consecutive pana nu se mai poate scadea	$1879-40^2=279$, $279-81-83-85=30 < 87$	$1985-40^2=385$, $385-81-83-85-87=49 < 89$
Numarul de numere impare care se strang este radacina patrata (aproximata cu o unitate prin lipsa).	$1985=43^2+30 = 44^2$ $\sqrt{1879}=43$ rest 30 $43^2 < \sqrt{1879} < 44^2$	$1985=44^2+49 = 45^2$ $\sqrt{1985}= 44$ rest 49 $44^2 < \sqrt{1985} < 45^2$

Facem observatia ca daca gasim un patrat perfect mai mare sau egal decat n (si cat mai mic) putem folosi aceeasi formula (1) pentru a calcula radacina patrata pornind de la majorantul patrat perfect dupa cum se poate observa in exemplul urmator:

$\sqrt{2328} = ?$

$2500 = 50^2 = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2\bullet 50-1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + 99$

$2500 – 99 = 2401$, $2401-97 = 2304$; $2328 – 2304 = 24$ ->

$2328 = (1 + 3 + 5 + \ldots +95) + 24 = [1 + 3 + 5 + \ldots + (2\bullet 48-1)] + 24$ -> $2328 = 48^2 + 24 = 48^2$ rest 24 -> $48^2 < 2328 < 49^2$.

Radacina patrata (radicalul) dintr-un numar rational:

Extinderea se poate face usor, ca in exemplele:

$\sqrt{0,19}$ =?; $\frac{\sqrt{100 \bullet 0,19}}{10} = \frac{\sqrt{19}}{10}$ si cum 4 < $\sqrt{19}$ < 5 => 0,4< $\sqrt{0,19}$ < 0,5. Restul poate fi luat r=0,19-0,4^2=0,03.

$\sqrt{0,1985}$ =?; $\sqrt{0,1985} = \frac{\sqrt{10^4 \bullet 0,1985}}{10^2} = \frac{\sqrt{1985}}{100}$ si ca mai sus in exemplul 2 -> 44 < $\sqrt{1985}$ < 45 deci 0,44 < $\sqrt{0,1985}$ < 0,45. Analog se poate obtine restul r = 0,1985 – 0,44^2 = 0,0049.

La fel se procedeaza si cand vrem sa calculam radicalul cu mai multe zecimale decat numarul de sub radical.

Metoda ofera control asupra radacinii patrate. Am testat algoritmul la clasa si elevii l-au primit cu entuziasm, toti intelegand metoda de baza.

Bibliografie:

[1] K. D. Fryer, Ontario Math. Sec. Sch. Lath Bull., vol 19, nr. 3/1983, in Ghioca Adrian si Teodorescu Nicolae, “Culegere de Probleme – Matematica in gimnaziu si liceu”, Societatea de Stiinte Matematice Romana, Bucuresti, 1987

3.ASUPRA UNEI INEGALITĂȚI DE LA OLIMPIADA DE MATEMATICĂ, RUSSIA, 2003

Marin Chirciu și Octavian Stroe, Pitești

Pornind de la o problemă dată la Olimpiada de Matematică,Russia, 2003, articolul prezintă o modalitate unitară de rezolvare a unor inegalități de un anumit tip.

1.Fie a,b,c numere reale pozitive cu suma 1 .Demonstrați inegalitatea:

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\geq\frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}\ .$$

2003 All-Russian Olympiad

2.Arătați că dacă a,b,c,d sunt numere reale strict pozitive cu suma1, atunci:

$$\frac{3}{1-a}+\frac{3}{1-b}+\frac{3}{1-c}+\frac{3}{1-d}\geq\frac{5}{1+a}+\frac{5}{1+b}+\frac{5}{1+c}+\frac{5}{1+d}.$$

GM 11/2015,Supliment de exerciții, Daniel Sitaru, Turnu-Severin

3. Fie $a_1,a_2,...a_n$ numere reale nenegative cu suma 1, unde $n\geq 2$ .Arătați că:

$$(n-1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1-a_1}\geq(n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_1}\ .$$

Marin Chirciu și Octavian Stroe, Pitești

<u>Soluție</u>

Avem $\frac{n-1}{1-x}-\frac{n+1}{1+x}=\frac{2nx-2}{1-x^2}\geq\frac{2n^2}{n^2-1}(nx-1)$,unde $\frac{2nx-2}{1-x^2}\geq\frac{2n^2}{n^2-1}(nx-1)\Leftrightarrow$

$$\frac{nx-1}{1-x^2}\geq\frac{n^2}{n^2-1}(nx-1)\Leftrightarrow(nx-1)\left(\frac{1}{1-x^2}-\frac{n^2}{n^2-1}\right)\geq 0\ \Leftrightarrow(nx-1)\frac{n^2x^2-1}{(1-x^2)(n^2-1)}\geq 0$$

$\Leftrightarrow\ \frac{(nx-1)^2(nx+1)}{(1-x^2)(n^2-1)}\geq 0$, evident, cu egalitate pentru $x=\frac{1}{n}$.

Obținem

$$(n-1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1-a_1}-(n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2na_k-2}{1-a_k^2}\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{2n^2}{n^2-1}(na_k-1)=\frac{2n^2}{n^2-1}\sum_{k=1}^{n}(na_k-1)=0.$$

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = ...a_n = \frac{1}{n}$.

Pentru $n = 2$ se obține problema 1, iar pentru $n = 3$ se obține problema 2.

Bibliografie.

1.AOPS,National Olympiads, 2003 All-Russia Olympiad

2.Gazeta Matematică, nr.11/2015, Supliment de exerciții S:L.15300.

3.300 RomanianMathematical Challenges, Radu Gologan, Daniel Sitaru,Leonard Giugiuc, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.

4.Inegalități algebrice, de la inițiere la performanță, Marin Chirciu, Editura Paralela 45, Pitești,2014.

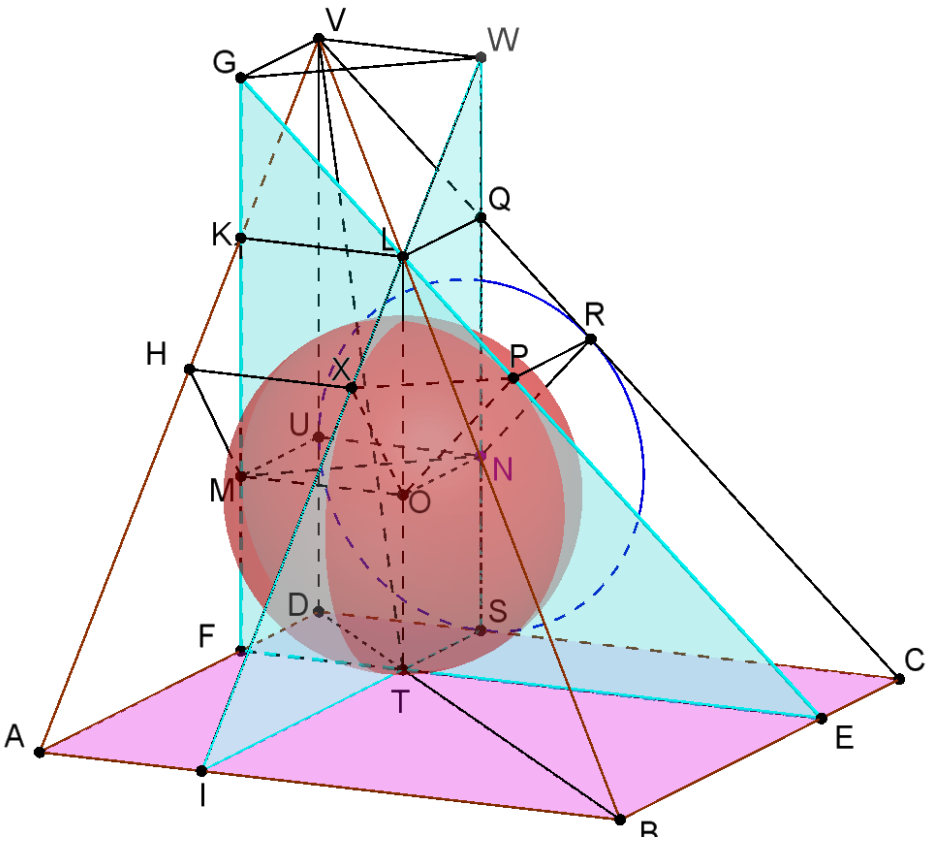
4. SOLUȚII PROBLEMA LUNII MAI 2016

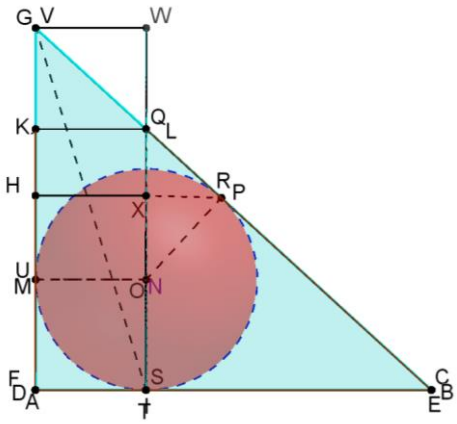
Problemă (clasa a VIII-a) mai 2016

Piramida *VABCD* are baza pătratul *ABCD* și înălțimea *VD*. Știind că $AB = VD = 2+\sqrt{2}$, să se calculeze distanța de la punctul de tangență al sferei înscrisă în piramidă cu baza piramidei, la planul determinat de punctele de tangență ale acestei sfere cu fețele laterale ale prismei.

Prof. Constantin Telteu

1. REZOLVARE PROF. CONSTANTIN TELTEU, C.N.A. „REGINA MARIA”,CONSTANȚA





Vedere dinspre fața *VDA*

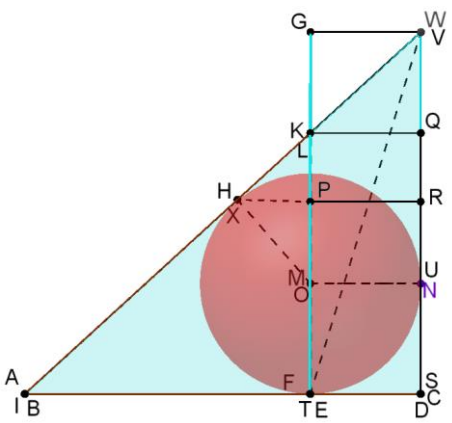
Așa cum se vede în figură, centrul sferei înscrisă în piramidă este centrul cercurilor înscrise în triunghiurile dreptunghice isoscele GFE, VDC, WSI și VDA. Raza sferei coincide cu raza cercurilor înscrise în aceste triunghiuri.

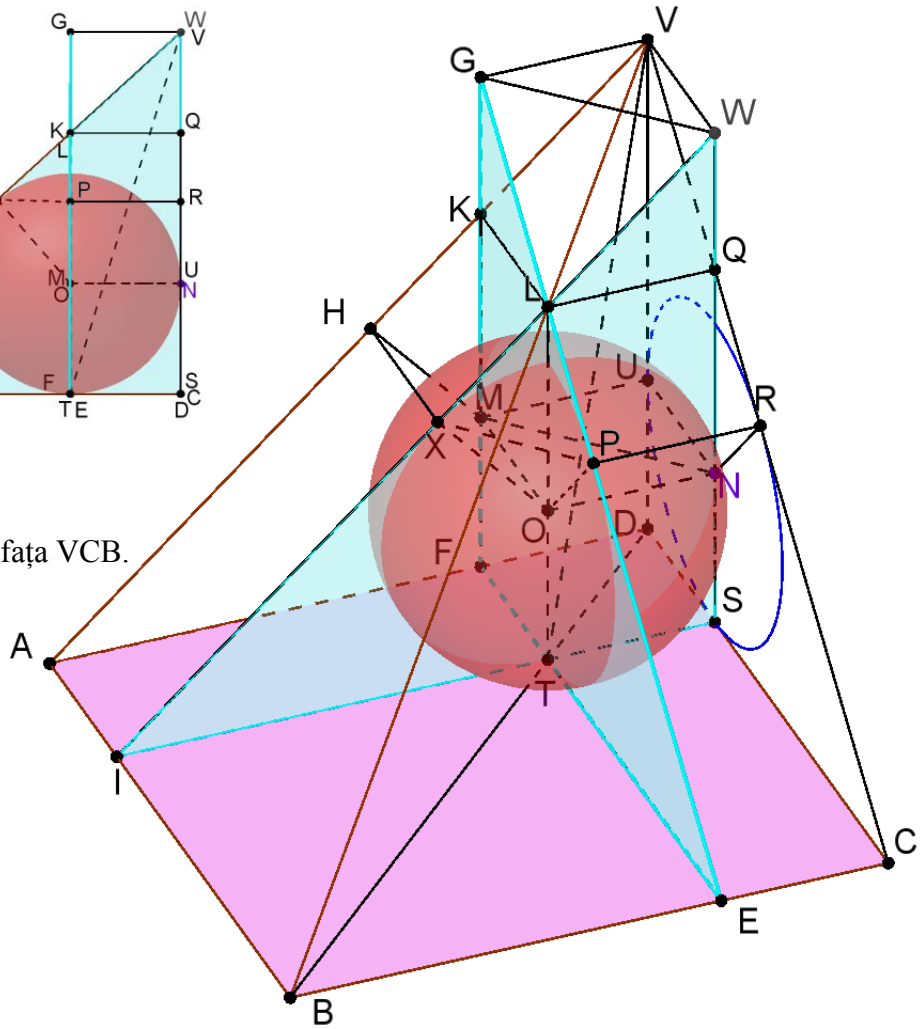
Determinăm raza aceasta din triunghiul GFE.

Cu formula razei cercului înscris $R=\frac{S}{p}$, observând că $S=\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{2}=\left(\sqrt{2}+1\right)^2$;

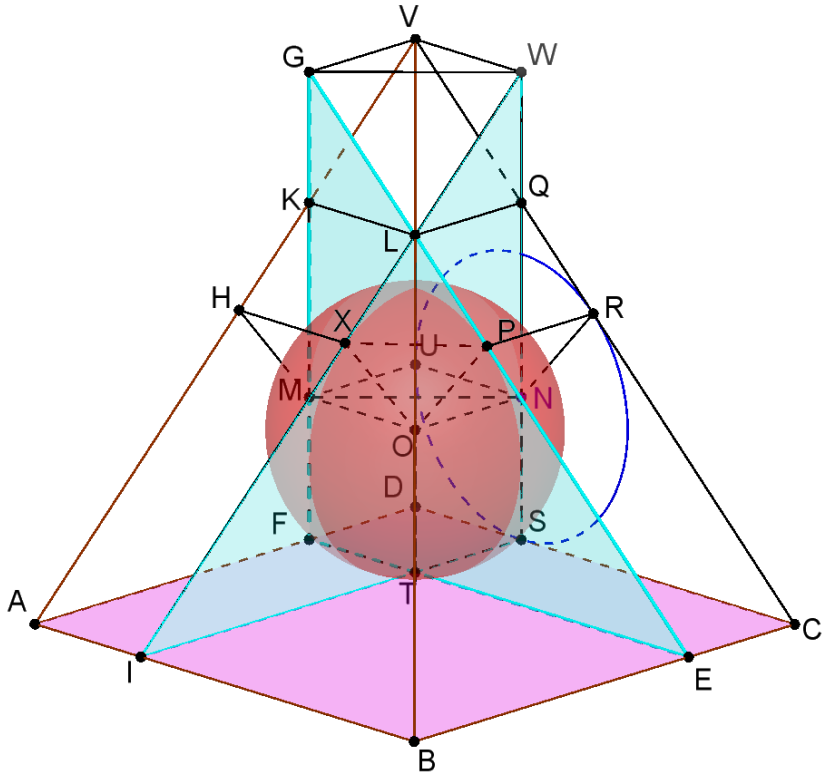
$p=\frac{2\left(2+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}=\left(\sqrt{2}+1\right)^2$ obținem: $R=1$. Deci cubul DFTSUMON are latura egală cu 1. Acum avem:

$TE=TI=LT=\sqrt{2}+1$; $IE=TI\cdot\sqrt{2}=2+\sqrt{2}$; $LI=LE=\sqrt{2}\cdot TE=2+\sqrt{2}\Rightarrow \Delta LIE$ este echilateral, de unde triunghiurile LXP și XOP sunt triunghiuri echilaterale și congruente, cu latura egală cu 1.





Vedere dinspre fața VCB.



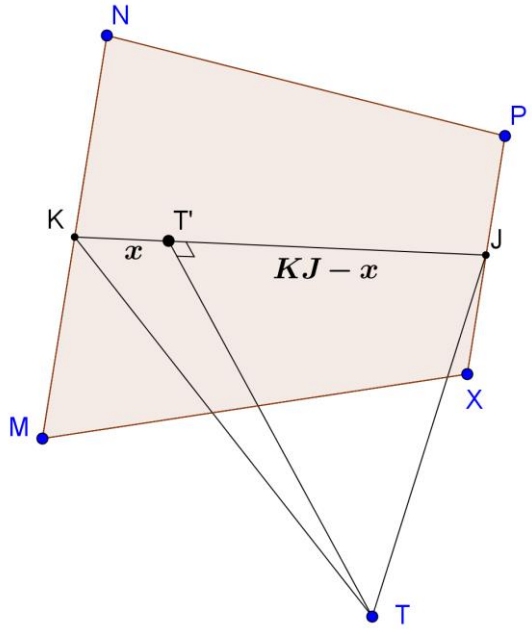
Planul (VDB) este plan de simetrie al figurii.

Tangentele de la un punct la o sferă sunt congruente, deci:

$TE = PE \Rightarrow LP = LE - PE = 1 \Rightarrow MOXH, OPRN, HXLK, LPRQ -$ sunt pătrate cu latura egală cu 1.

$MN \parallel AC \parallel IE \parallel XP \Rightarrow MNXP$ este trapez isoscel, deci punctele *M,N,X,P* sunt coplanare și deoarece *M,N,X,P* sunt punctele de tangență ale sferei cu fețele laterale, trebuie să calculăm distanța de la *T* la planul *(MNP)*.

Deoarece $\left.\begin{array}{l} MN \perp (VDB) \\ MN \subset (MNP) \end{array}\right\} \Rightarrow (MNP) \perp (VDB) \Rightarrow T' = pr_{(MNP)}T \in (MNP) \cap (VDB) = KJ$, unde *K* și *J* sunt mijloacele segmentelor *(MN)*, respectiv *(PX)*.



Din ΔTOK, $TK = \frac{\sqrt{6}}{2}$ (O este centrul sferei, iar K este centrul feței MONU a cubului).

Din ΔTEP , cu teorema cosinusului, obținem:

$$TP^2 = 2\cdot TE^2 - 2\cdot TE^2 \cdot \cos 45^\circ = 2\left(\sqrt{2}+1\right)^2 - 2\left(\sqrt{2}+1\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right).$$

$$TJ^2 = TP^2 - PJ^2 = 2+\sqrt{2}-\frac{1}{4} = \frac{7+4\sqrt{2}}{4} \ .$$

Deoarece trapezul MNPX este isoscel, cu t. lui Pitagora, obținem:

$$KJ^2 = NP^2 - \left(\frac{MN-PX}{2}\right)^2 = 2 - \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{4} = \frac{5+2\sqrt{2}}{4} \ .$$

Urmărind ultima figură observăm că: $T'T^2 = KT^2 - x^2 = TJ^2 - \left(KJ - x\right)^2 \Rightarrow$

$$\frac{6}{4} - x^2 = \frac{7+4\sqrt{2}}{4} - \left(\frac{\sqrt{5+2\sqrt{2}}}{2} - x\right)^2$$

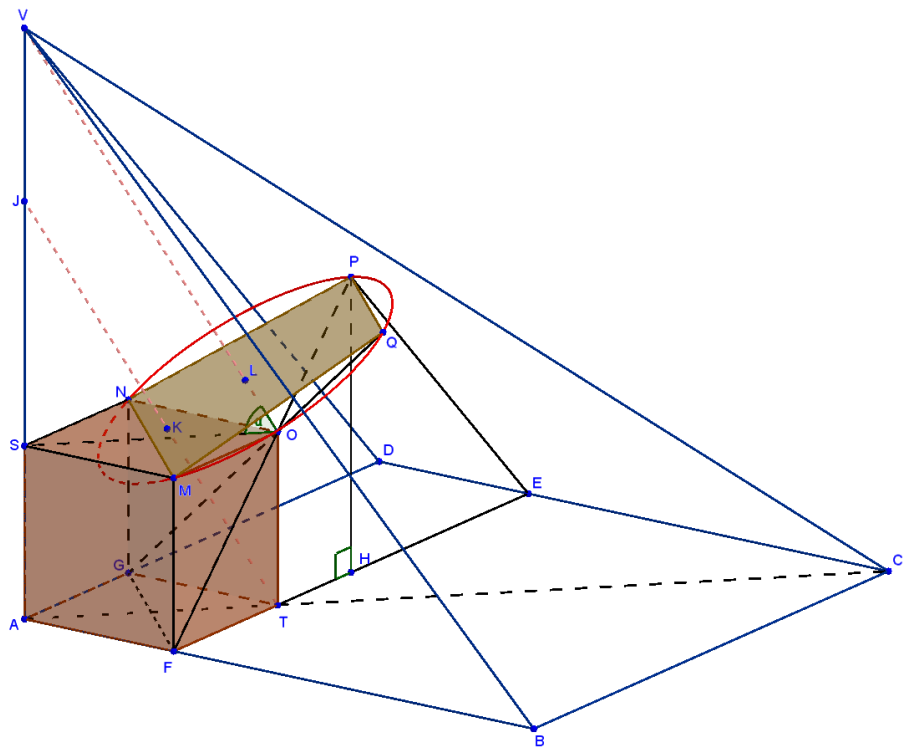
$$\frac{6}{4} - \frac{7+4\sqrt{2}}{4} + \frac{5+2\sqrt{2}}{4} = x\sqrt{5+2\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{4-2\sqrt{2}}{4\sqrt{5+2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{5\sqrt{2}+4}} \ .$$

$$T'T^2 = \frac{3}{2} - \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{5\sqrt{2}+4} = \frac{6+19\sqrt{2}}{2\left(5\sqrt{2}+4\right)} = \frac{83-23\sqrt{2}}{34} \Rightarrow T'T = \sqrt{\frac{83-23\sqrt{2}}{34}} \approx 1,2184.$$

2. REZOLVARE PROF. BIRO ISTVAN

- *Determinarea razei (**r**) şi centrul sferei înscrise în piramidă (**O**)*: Să notăm cu ***a*** lungimea laturii pătratului *ABCD* şi fie punctul *T* oarecare pe diagonala *AC* $\left(AT < \frac{AC}{2}\right)$, punctele *F* şi *G* proiecţiile lui *T* pe *AB* respectiv *AD*. Pătratul *AFTG* determină cubul *AFTGSMON* şi observăm că $OT = OM = ON$, $OT \perp (ABCD)$, $OM \perp (VAB)$, $ON \perp (VAD)$, de unde rezultă că ***O*** va fi centrul sferei iar T, M, N punctele de tangenţă a sferei cu baza piramidei şi feţele (VAB), (VAD) adică $\boldsymbol{r} = OT = OM = ON$. Totodată observăm (şi e uşor de dovedit) că măsura unghiului dintre baza piramidei şi planul (VBC), respectiv (VDC) este 45°; în consecinţă dacă $\{P\} = FO \cap (VCD)$ şi $\{E\} = FT \cap CD$ atunci triunghiul *FPE* este dreptunghic şi isoscel $\left(m(P) = 90^\circ\right)$, adică $FO \perp (VCD)$. În mod similar rezultă că $GO \perp (VBC)$, astfel punctul *P* şi $\{Q\} = GO \cap (VBC)$ sunt punctele de tangenţă a sferei cu feţele *VCD* şi *VBC*. În continuare căutăm poziţia punctului *T* astfel ca $OP = OQ = \boldsymbol{r}$, ceea ce rezultă aplicând teorema lui Thales în triunghiul dreptunghic *FPH*, unde *PH* este înălţimea triunghiului *FPE*:

$$\frac{FO}{OP} = \frac{FT}{TH} \Leftrightarrow \frac{r\sqrt{2}}{r} = \frac{r}{\frac{a}{2} - r} \Rightarrow r = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)a \quad \Rightarrow \quad AT = r\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}-1\right)a .$$



- *Determinarea distanţei de la T la planul (MNPQ)* : Deoarece $\triangle OGF$ şi $\triangle OPQ$ sunt triunghiuri echilaterale cu lungimea laturilor de $r\sqrt{2}$ respectiv *r*, rezultă că $PQ \parallel GF \parallel MN$, adică MNPQ este trapez isoscel, deci inscriptibil – ceea ce ne aduce aminte de următoarea lemă:

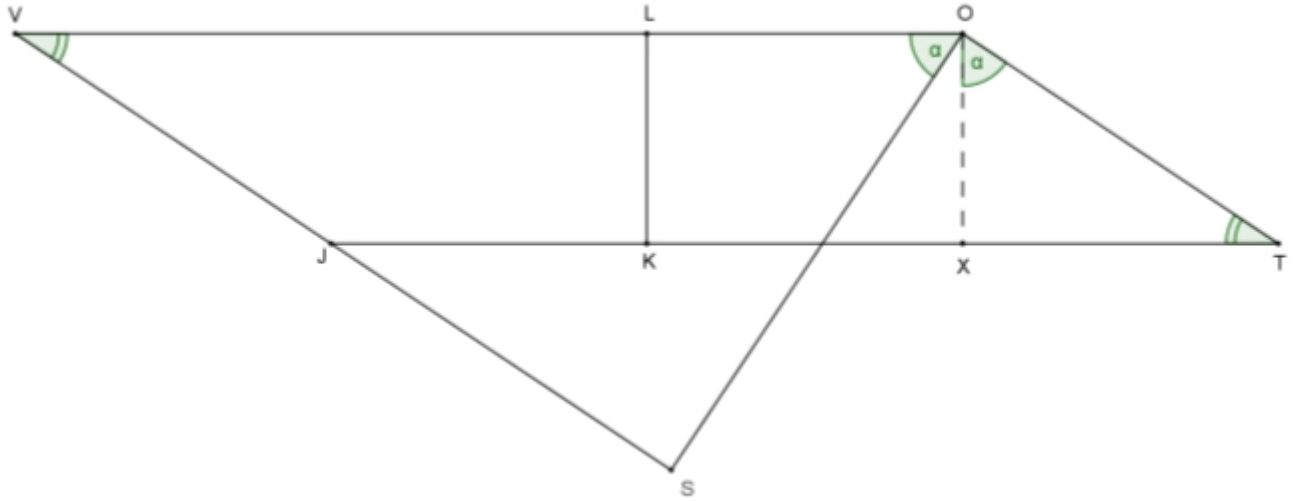
„Dacă poligonul $A_1A_2\cdots A_n$ este inscriptibil în cercul de centru O şi punctul $V \notin (A_1A_2\cdots A_n)$, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) *VO este înălţimea piramidei $VA_1A_2\cdots A_n$;*

(ii) $VA_1 = VA_2 = \cdots = VA_n$.*”*

Conform acestui rezultat şi faptului că $OM = ON = OP = OQ = r$ rezultă că $OL \perp (MNPQ)$.

În plus observăm că $VM = VN = VP = VQ = \sqrt{(a-r)^2 + r^2} = a\sqrt{2-\sqrt{2}}$, deci $VL \perp (MNPQ)$ adică *O, L* şi *V* sunt puncte coliniare şi $OV \perp (MNPQ)$. În continuare fie $TJ \parallel OV$ şi $\{K\} = TJ \cap (MNPQ)$, avem de calculat lungimea segmentului *TK* în paralelogramul *VOTJ*:

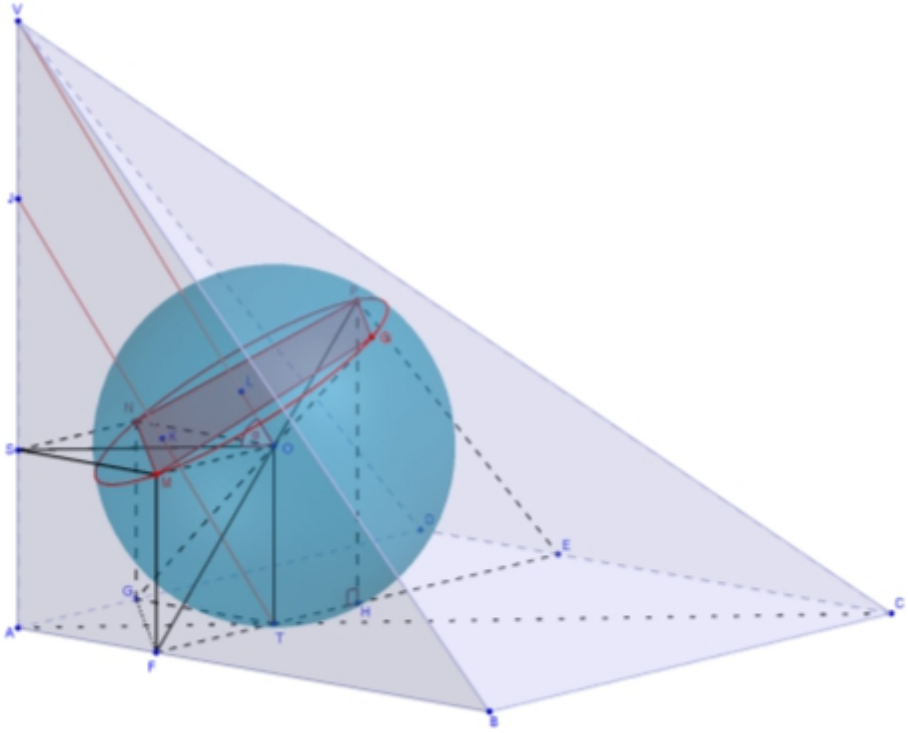


$$tg(\sphericalangle SOV) = tg(\alpha) = \frac{a-r}{r\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

$$OV = \frac{r\sqrt{2}}{\cos\alpha},\ VL^2 - OL^2 = VP^2 - r^2 = LP^2 \Rightarrow OL = \frac{r}{\sqrt{2}}\cos\alpha = XK$$

$$d\left(T,\left(MNPQ\right)\right)=TK=XT+XK=r\sin\alpha+\frac{r}{\sqrt{2}}\cos\alpha=\frac{r\left(tg\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=r\sqrt{\frac{14+8\sqrt{2}}{17}}=a\sqrt{\frac{5-2\sqrt{2}}{17}}$$

.



În cazul concret când $a=2+\sqrt{2}$ rezultă $r=1$ şi $d\left(T,\left(MNPQ\right)\right)=\sqrt{\frac{14+8\sqrt{2}}{17}}\approx 1,22$.

5.PROBLEMA LUNI IUNIE 2016

Fie triunghiul ABC, *cu* O *şi* R, *centrul, respectiv, raza cercului circumscris triunghiului, iar* S *aria sa.*

1. *Să se arate că are loc relaţia:*

$$a^2 \cdot ctg\, A \cdot \overrightarrow{OA} + b^2 \cdot ctg\, B \cdot \overrightarrow{OB} + c^2 \cdot ctg\, C \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0} \qquad (\alpha)$$

2. *Fie* $m \in \mathbb{R}$, $m \geq 4R^2 S$. *Aflaţi locul geometric al punctelor* N *din planul triunghiului* ABC, *pentru care:*

$$a^2 \cdot ctg\, A \cdot NA^2 + b^2 \cdot ctg\, B \cdot NB^2 + c^2 \cdot ctg\, C \cdot NC^2 = m \qquad (\beta)$$

3. *Arătaţi că:*

$$\sum_{k=1}^{n} A^k = x_n \cdot A, \quad (x_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}_+^*$$

şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$

unde $n \in \mathbb{N}^*$ *şi*

$$A = \begin{pmatrix} a^2 ctg\, A + b^2 ctg\, B + c^2 ctg\, C & \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \\ 2R^2 & 1 \end{pmatrix}, A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

notaţiile fiind cele uzuale.

Autor: prof. Gheorghe ROTARIU
(din arhiva www.mateinfo.ro)

Aşteptăm soluţiile problemei până pe date de 2 iulie 2016
revista@mateinfo.ro

6. MODEL EVALUARE NAȚIONALĂ MATEMATICĂ – IUNIE 2016

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru: 2 ore.

SUBIECTUL I – Pe foaia de examen se trec doar rezultatele. (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $\frac{1}{2}+0,5$ este egal cu….

(5p) **2.** Dacă $\frac{3}{4}=\frac{x}{2}$ atunci $4\cdot x+4$ este egal cu….

(5p) **3.** Cel mai mare număr întreg ce nu aparține intervalului $(2017;+\infty)$ este …

(5p) **4.** Triunghiul isoscel ABC cu $AB=AC$ are $m\ A\ =70^o$. $m\ B\ =$….. grade.

(5p) **5.** În figura 1 este reprezentată prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu latura bazei $AB=6cm$ şi muchia laterală $AA'=8cm$. Lungimea segmentului $[BC']$ este egală cu…... cm.

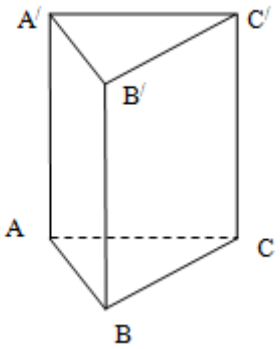


Figura 1

(5p) **6.** Vârsta elevilor care participă la concursul de matematică „Pitagora” este reprezentată în tabelul de mai jos. Numărul elevilor cu vârsta peste 11 ani este .....

Vârsta	8	9	10	11	12	13	14
Nr. elevi	1	4	6	3	6	4	1

SUBIECTUL II – Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete. (30 de puncte)

(5p) **1.** Desenaţi, pe foaia de examen, o prismă patrulateră regulată MATEINFO .

(5p) **2.** Numerele naturale $\overline{ab}$ și $\overline{bc}$, scrise în baza zece, sunt direct proporționale cu numerele 5 și respectiv 3. Determinați toate numerele $\overline{ab}$ și $\overline{bc}$ care îndeplinesc condiția din enunț.

(5p) **3**. Un călător a parcurs un drum în trei etape: în prima etapă a parcurs 20% din întregul drum şi încă 10 km.În a doua etapă a parcurs 50% din rest şi încă 17 km, iar în a treia etapă a parcurs ultimii 30 km.Ce lungime are întregul drum?

4. Fie functia f : R → R, $f(x)$ = ax+b

(5p) **a)** Determinați funcția f(x) știind că $f(1)+f(3)=f(2)$ și $f(-1)=-6$

(5p) **b)** Pentru a=2 și b= - 4 calculați distanța de la originea axelor la graficul funcției.

(5p) **5**. Se dă expresia $E(x)=\left(\frac{2x}{x+1}+\frac{2}{x-1}+\frac{4x}{x^2-1}\right)\cdot\left(\frac{2x}{x+1}+\frac{2}{x-1}-\frac{4x}{x^2-1}\right)$ cu $x\in R-\{-1;1\}$. Arătați că $E(x)=4$.

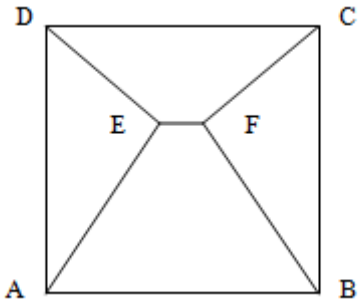
SUBIECTUL III – Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete.(30 de puncte)

1. Figura 2 reprezintă modelul unei plăci de gresie în formă de pătrat $ABCD$. Se ştie că $AE=BF=20cm,\ DE=CF=15cm$ şi $m\ AED\ =m\ BFC\ =90^o$, aflaţi:

(5p) **a)**. Perimetrul pătratului $ABCD$.

(5p) **b)**. Arătaţi că lungimea segmentului EF este $1cm$.

(5p) **c)**. Aflaţi aria trapezului isoscel $ABFE$.



(Figura 2)

2. O pastilă (figura 3) are formă de cilindru circular drept ce are alipite la capete câte o semisferă ce are aceeaşi rază cu raza cilindrului, de 5 mm. Înălţimea cilindrului este de 15 mm.

(5p) **a)** Care este lungimea acestei pastile?

(5p) **b)** Care este volumul acestei pastile, în cm^3;

(5p) **c)** Câte astfel de pastile încap într-o cutie care are formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de L = 15 cm, l = 10 cm şi h = 2,5 cm.

(Figura 3)

BAREM
MODEL EVALUARE NAȚIONALĂ MATEMATICĂ – IUNIE 2016

SUBIECTUL I		(30 de puncte)
1.	$\frac{1}{2}+0,5=\frac{1}{2}+\frac{5}{10}$ $\frac{1}{2}+\frac{5}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$	5p
2.	$\frac{3}{4}=\frac{x}{2}\Rightarrow x=\frac{3}{2}$ $4\cdot x+4=4\cdot\frac{3}{2}+4=10$	5p
3.	2017	5p
4.	$AB=AC\Rightarrow m\ B\ =m\ C$ $m\ A\ +2\cdot m\ B\ =180^o$ $m\ B\ =\frac{180^o-70^o}{2}=55^o$	5p
5.	$AB=BC=6cm$ şi $AA'=BB'=CC'=8cm$ $\Delta BCC'$ dreptunghic în C $\Rightarrow BC'^2=BC^2+CC'^2=36+64=100\Rightarrow BC'=10cm$	5p
6.	11	5p
SUBIECTUL II		(30 de puncte)
1.	Desenează prisma Notează prisma	4p 1p
2.	$3(10a+b)=5(10b+c)$ $b=5$ $6a=47+c$ $\overline{ab}\in\{85,95\}$ $\overline{bc}\in\{51,57\}$	3p, 2p
3.	Notăm cu x, lungimea drumului şi avem	

	În prima etapă: $\frac{1}{5}x+10$ Drum rămas $x-\left(\frac{1}{5}x+10\right)=\frac{4}{5}x-10$ Etapa a doua: $\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}x-10\right)+17$ $\frac{1}{5}x+10+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}x-10\right)+17+30=x$ $\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}x+52=x$ $\frac{3}{5}x+52=x$ $52=x-\frac{3}{5}x$ $52=\frac{2x}{5}\Rightarrow x=130$	1p 1p 1p 1p 1p
4.	a) 2a+b=0 ; - a+b= - 6 f(x)=2x- 4	3 2
	c) x=4$\sqrt{5}$/5 u	
5	$\frac{2x}{x+1}+\frac{2}{x-1}+\frac{4x}{x^2-1}=\frac{2x^2+4x+2}{(x-1)(x+1)}=\frac{2(x+1)^2}{(x-1)(x+1)}$ $\frac{2x}{x+1}+\frac{2}{x-1}-\frac{4x}{x^2-1}=\frac{2x^2-4x+2}{(x-1)(x+1)}=\frac{2(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}$ $E(x)=4$	3p 2p 1p
1.	a). $BC^2=BF^2+CF^2$ $BC^2=20^2+15^2=625$ $BC=25cm$	1p 2p 1p

	$P_{ABCD}=25\cdot 4=100cm$	1p
	b). Dacă $FG\perp BC\Rightarrow EF=25-2\cdot FG$ $FG=\frac{BF\cdot CF}{BC}$ $FG=12cm$ $EF=25-2\cdot 12=1cm$	2p 1p 1p 1p
	c). Dacă $FG\perp AB,\ A_{ABFE}=\frac{AB+EF\ \cdot FG}{2}$ $BG=\ 25-1\ :2=12cm$ $FG^2=BF^2-BG^2=20^2-12^2=256$ $FG=16cm$ $A_{ABFE}=\frac{25+1\ \cdot 16}{2}=26\cdot 8=208cm^2$	1p 1p 1p 1p 1p
2.	a) Lungimea pastilei = înălțimea cilindrului+de două ori raza Lungimea pastilei = 25 mm	3p 2p
	b) Volumul pastilei = volumul cilindrului plus volumul sferei (două semisfere) $V_{pastila}=\pi R^2h+\frac{4\pi R^3}{3}$ $V_{pastila}=\frac{1625\pi}{3}\ mm^3=\frac{1,625}{3}\pi\ cm^3\approx 1,7\,cm^3$	1p 2p 2p
	c) Aşezând pastilele astfel ca înălţimea lor să corespundă cu înălţimea cutiei, vor încape: - pe lungime 15:0,5=30 pastile - pe lăţime 10:0,5=20 pastile. Total $30\cdot 20\cdot 1=600$ *pastile.*	1p 1p 1p 2p

7. MODEL BAC MATEMATICĂ MATE-INFO – IUNIE 2016

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică .

- *Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.*
- *Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.*
- *La toate subiectele se cer rezolvări complete.*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Se consideră funcţia $f:R\to R$, f(x)=2-3x.Arătaţi că fof este crescătoare.

(5p) 2. Să se rezolve în R ecuaţia $2^x+2^{1-x}=3$.

(5p) 3. Care este probabilitatea ca alegând un element $k\in\{1,2,3,4,5\}$, numărul C_6^k să fie par?

(5p) 4. Determinaţi $z\in C, z=a+bi,\ a,b\in Z$ astfel încât $|z|=2$.

(5p) 5. Să se determine ecuaţia înălţimii AM a ΔABC, unde A(-1,3),B(0,6),C(5,-2).

(5p) 6. Să se calculeze sin2x, dacă $\cos x=\frac{3}{7}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} a^2x+by+cz=-1 \\ ax+b^2y+cz=-1 \\ ax+by+c^2z=-1 \end{cases}$ şi fie $A=\begin{pmatrix} a^2 & b & c \\ a & b^2 & c \\ a & b & c^2 \end{pmatrix}$ matricea sistemului.

(5p) a) Să se arate că există a,b,c nenule astfel încât detA=0.
(5p) b) Rezolvaţi sistemul pentru a=2, b=1, c=1.
(5p) c) Determinaţi a,b,c$\in R$ astfel încât sistemul să admită soluţia $x=y=z=1$.

2. Pe $(-\infty,1)$ definim legea $x*y=1-(1-x)^{\log_2(1-y)}$.

(5p) a) Arătaţi că legea este asociativă.
(5p) b) Să se determine elementul neutru al legii.
(5p) c) Să se rezolve ecuaţia $x*x*x=x$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:R\to R$, $f(x)=x^4-4x+3$.

(5p) a) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{f(x)}{(x-1)^3}$.

(5p) b) Arătaţi că f este descrescătoare pe $(-\infty,1)$.

(5p) c) Determinaţi $m,n\in R$, astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{f(x)}-(mx^2+n)=5$.

2. Fie funcţia $f:R\to R$, $f(x)=\ln\left(1+e^x\right)$.

(5p) a) Să se arate că orice primitivă a lui f este crescătoare pe R.

(5p) b) Să se calculeze $\int_0^1 \ln\left(1+e^x\right)e^x dx$.

(5p) c) Calculaţi derivata funcţiei $g:(0,\infty)\to R, g(x)=\int_0^{\ln x} f(t)dt$.

AUTOR prof. Nicolaescu Nicolae

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

MODEL BAC MATEMATICĂ MATE-INFO – IUNIE 2016

Prof: Nicolaescu Nicolae

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	fof=2-3(2-3x)= -4+9x fof este crescătoare (9>0)	3p 2p
2.	$2^x+2^{1-x}=3 \Rightarrow 2^x+\frac{2}{2^x}=3$ Notăm $2^x=y>0$ Ecuaţia devine $y^2-3y+2=0$ cu soluţiile $y_1=2,\ y_2=1$ $2^x=2 \Rightarrow x_1=1$ şi $2^x=1 \Rightarrow x_2=0$	1p 2p 2p
3.	$C_6^1=C_6^5=\frac{6!}{5!1!}=6,\ C_6^2=C_6^4=\frac{6!}{4!2!}=15,\ C_6^3=\frac{6!}{3!3!}=20$ $P=\frac{nr.cazuri\ favorabile}{nr.cazuri\ posibile}=\frac{3}{5}$	3p 2p
4.	$\lvert z\rvert=2 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}=2 \Rightarrow a^2+b^2=4$ Ecuaţia $a^2+b^2=4$ are în $Z\times Z$ soluţiile $(2,0),(-2,0),(0,2),(0,-2)$	2p 3p
	$m_{BC}=\frac{-2-6}{5-0}=\frac{-8}{5}$	1p

5.	$m_{BC}\cdot m_h=-1\Rightarrow m_h=\frac{5}{8}$ Ecuaţia înălţimii $y-3=\frac{5}{8}(x+1)\Rightarrow 5x-8y+29=0$	2p 2p
6.	$\sin x=\pm\sqrt{1-\left(\frac{3}{7}\right)^2}=\pm\frac{2\sqrt{10}}{7}$ Deoarece $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \sin x>0$ $\sin 2x=2\sin x\cos x=2\frac{2\sqrt{10}}{7}\cdot\frac{3}{7}=\frac{12\sqrt{10}}{49}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A=\begin{vmatrix} a^2 & b & c \\ a & b^2 & c \\ a & b & c^2 \end{vmatrix}=abc(abc+2-a-b-c)$ $abc+2-a-b-c=0$ admite, de exemplu, ca soluţie $a=b=c=1$	2 p 3 p
b)	Sistemul devine $\begin{cases}4x+y+z=-1\\2x+y+z=-1\\2x+y+z=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x+y+z=-1\\2x+y+z=-1\end{cases}$. Minorul principal este $\begin{vmatrix}4 & 1\\2 & 1\end{vmatrix}$ x,y necunoscute principale şi z necunoscută secundară şi notăm $z=\alpha$ Sistemul devine $\begin{cases}4x+y=-1-\alpha\\2x+y=-1-\alpha\end{cases}$ cu soluţia $x=0,\ y=-1-\alpha,\ z=\alpha,\ \alpha\in R$	2 p 1 p 2 p

c)	$x=y=z=1\Rightarrow\begin{cases}a^2+b+c=-1\\a+b^2+c=-1\\a+b+c^2=-1\end{cases}$	1 p
	Scăzând din prima ecuaţie pe cea de-a doua obţinem $(a-b)(a+b-1)=0$	1 p
	I Dacă $a-b=0\Rightarrow a=b$ .Din a doua ecuaţie $c=-1-a-a^2$ şi înlocuit în a treia ecuaţie $\Rightarrow a^4+2a^3+3a^2+4a+2=0\Rightarrow(a+1)^2(a^2+2)=0\Rightarrow a=-1\Rightarrow a=b=c=-1$	2 p
	II Dacă $a+b=1\Rightarrow c^2=-2$ din a treia ecuaţie fals!	1 p
2. a)	$(x*y)*z=\left(1-(1-x)^{\log_2(1-y)}\right)*z=\left\{1-\left[1-\left(1-(1-x)^{\log_2(1-y)}\right)\right]^{\log_2(1-z)}\right\}=1-(1-x)^{\log_2(1-y)\log_2(1-z)}$	2 p
	$x*(y*z)=x*\left(1-(1-y)^{\log_2(1-z)}\right)=\left\{1-(1-x)^{\log_2\left[1-\left(1-(1-y)^{\log_2(1-z)}\right)\right]}\right\}=1-(1-x)^{\log_2(1-y)^{\log_2(1-z)}}$ =	2 p
	$=1-(1-x)^{\log_2(1-y)\log_2(1-z)}$, deci legea este asociativă	1 p
b)	Legea este comutativă deoarece, dacă notăm $A=(1-x)^{\log_2(1-y)}, B=(1-y)^{\log_2(1-x)}$ şi logaritmăm în baza 2 obţinem $\log_2 A=\log_2 B$ şi datorită injectivităţii funcţiei logaritmice $\log_2 A=\log_2 B\Rightarrow A=B\Rightarrow x*y=y*x$	2 p
	$x*e=x\Rightarrow 1-(1-x)^{\log_2(1-e)}=x\Rightarrow 1-x=(1-x)^{\log_2(1-e)}$	2 p
	$\Rightarrow(x\neq 1)\log_2(1-e)=1\Rightarrow e=-1\in(-\infty,1)$	1 p
	$x*x*x=1-(1-x)^{\log_2^2(1-x)}$ (am aplicat asociativitatea legii)	1 p

c)	$x*x*x=1-(1-x)^{\log_2^2(1-x)}=x\Rightarrow 1-x=(1-x)^{\log_2^2(1-x)}\Rightarrow \log_2^2(1-x)=1$	2 p
	$\log_2(1-x)=\pm 1\Rightarrow x_1=-1,\ x_2=\frac{1}{2}$	2 p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.	$x^4-4x+3=x^4-x-3x+3=x(x^3-1)-3(x-1)=(x-1)(x^3+x^2+x-3)$	2p
	$=(x-1)^2(x^2+2x+3)$	
a)	Cazul $\frac{0}{0}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{f(x)}{(x-1)^3}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{(x-1)^2(x^2+2x+3)}{(x-1)^3}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{x^2+2x+3}{x-1}=\frac{6}{-0}=-\infty$	3p
b)	$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$ $f'(x)=0\Rightarrow x=1$	2p

x	$-\infty$	1	∞
f'(x)	----------	0	+++++++++++++++++++++
f(x)	↘ ↘ ↘ ↘ ↘		↗ ↗ ↗ ↗ ↗

		2p
	Deci f este descrescătoare pe $(-\infty,1)$	1p
c)	Observăm că m>0 deoarece in caz contrar limita este $+\infty$	
	$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{f(x)}-(mx^2+n)=5\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^4-4x+3}-(mx^2+n)=$	2p
	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-4x+3-m^2x^4-2mnx^2-n^2}{\sqrt{x^4-4x+3}+mx^2+n}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4(1-m^2)-2mnx^2-4x+3-n^2}{x^2\left(\sqrt{1-\frac{4}{x^3}+\frac{3}{x^4}}+m+\frac{n}{x^2}\right)}$	1p

	$1-m^2=0 \Rightarrow m=1$ $\frac{-2n}{2}=5 \Rightarrow n=-5$	2p
2. a)	Fie $F:R \to R$ o primitivă a funcţiei f. Atunci $F'(x)=f(x)=\ln(1+e^x)>0$ Atunci f este crescătoare pe R	3p 2p
b)	Notăm $\begin{matrix} u(x)=1+e^x=t \\ e^x dx=dt \end{matrix}$ Atunci u(0)=2, u(1)=1+e Integrala devine $\int_0^1 \ln(1+e^x)e^x dx=\int_2^{e+1} \ln t dt=$ $t\ln t\,\|_2^{e+1}-\int_2^{e+1} 1dt=(e+1)\ln(e+1)-2\ln 2-t\,\|_2^{e+1}$ Finalizare I= $=(e+1)\ln(e+1)-2\ln 2+1-e$	2p 2p 1p
c)	Fie F(t) o primitivă a funcţiei f. Atunci $g(x)=F(t)\,\|_0^{\ln x}=F(\ln x)-F(0)$ $g'(x)=F'(\ln x)-0=f(\ln x)\cdot(\ln x)'=\ln(1+e^{\ln x})\frac{1}{x}=\frac{\ln(1+x)}{x}$	2p 3p