

REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

SEPTEMBRIE 2017

ISSN 2065-6432

www.mateinfo.ro

REVISTĂ LUNARĂ DIN FEBRUARIE 2009

revista@mateinfo.ro



COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ȘI SUSȚINĂTOR PERMANENȚI AI REVISTEI
NECULAI STANCIU, ROXANA MIHAELA STANCIU ȘI NELA CICEU

ARTICOLE REVISTĂ:

1. PROBLEMA LUNII SEPTEMBRIE 2017 ... pag.2
Marin Chirciu

2. METODE DE REZOLVARE – PROBLEMA LUNII AUGUST 2017 ... pag. 3
Kevin Soto Palacios, Huarmey, Peru

Soluții date de : Marian Cucoaneș, Nela Ciceu, Roxana Mihaela Stanciu , Marin Chirciu,
Gheorghe Alexe , George-Florin Șerban

3. SOLUTIONS FOR TWO PROBLEMS FROM THE AMERICAN JOURNALS ... pag. 8
Nela Ciceu, Roxana Mihaela Stanciu

4. APLICAȚII ALE SCHEMEI LUI HORNER GENERALIZATĂ COMBINATĂ CU METODELE
ITERATIVE NEWTON ȘI HALLEY ... pag. 11
Sălăjan Raluca

5. REZOLVAREA SUBIECTULUI DE LA TITULARIZARE MATEMATICA DIN ANUL 2014... pag. 18
Dumitrana Lavinia- Victoria

1. PROBLEMA LUNII SEPTEMBRIE 2017

Să se arate că în orice triunghi ABC este adevărată inegalitatea

$$\sum \left(\frac{1}{\sin^4 \frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{A}{2}} \right) \geq \frac{64p^2(9R^2 + 4r^2)}{3\sum a^4}.$$

Marin Chirciu. Pitești

Așteptăm soluții cât mai interesante până pe data de 1.10.2017 pe adresa de e-mail
revista@mateinfo.ro

2. METODE DE REZOLVARE PENTRU PROBLEMA LUNII AUGUST 2017

Prove that in any triangle ABC the following inequality is true

$$\frac{3}{64} \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2}\right) \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{B}{2}\right) \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{C}{2}\right) + 3 \geq \frac{\sec \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{\sin A} + \frac{\sec \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2}}{\sin B} + \frac{\sec \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2}}{\sin C}.$$

Proposed by Kevin Soto Palacios, Huarney, Peru

1. Solution by Marian Cucoaneș, Mărășești

We have

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}}, \text{ and other two similar;}$$

$$\frac{\sec \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{\sin A} = \frac{1}{2 \sin \frac{A}{2} \left(1 - \sin \frac{A}{2}\right)}, \text{ and other two analogous.}$$

Then, the inequality from the statement becomes

$$\begin{aligned} \frac{3}{64} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}} + 3 &\geq \\ &\geq \frac{1}{2 \sin \frac{A}{2} \left(1 - \sin \frac{A}{2}\right)} + \frac{1}{2 \sin \frac{B}{2} \left(1 - \sin \frac{B}{2}\right)} + \frac{1}{2 \sin \frac{C}{2} \left(1 - \sin \frac{C}{2}\right)}, (1). \end{aligned}$$

From AM-GM inequality we have

$$\frac{3}{64} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}} + 3 \geq 2 \sqrt{\frac{3 \cdot 3}{64 \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}, (2).$$

So, it suffices to prove the inequality

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \geq \frac{1}{2 \sin \frac{A}{2} \left(1 - \sin \frac{A}{2}\right)} + \frac{1}{2 \sin \frac{B}{2} \left(1 - \sin \frac{B}{2}\right)} + \frac{1}{2 \sin \frac{C}{2} \left(1 - \sin \frac{C}{2}\right)}, (3).$$

The inequality (3) is equivalent to

$$\frac{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{1 - \sin \frac{A}{2}} + \frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}}{1 - \sin \frac{B}{2}} + \frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}{1 - \sin \frac{C}{2}} \leq \frac{3}{2}, (4).$$

We shall show that

$$\frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}{1 - \sin \frac{C}{2}} \leq \frac{1}{2}, (5).$$

We have $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = \left(\frac{a+b-c}{2c} \right) \sin \frac{C}{2}$, therefore

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b-c}{2c} \right) \sin \frac{C}{2} \leq 1 - \sin \frac{C}{2} &\Leftrightarrow (5) \Leftrightarrow \frac{a+b}{c} \sqrt{\frac{(b+c-a)(a+c-b)}{4ab}} \leq 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a+b)^2 [c^2 - (a-b)^2] \leq 4abc^2 \\ &\Leftrightarrow (a+b)^2 (a-b)^2 + 4abc^2 - c^2 (a+b)^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a+b)^2 (a-b)^2 - c^2 (a-b)^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a-b)^2 [(a+b)^2 - c^2] \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a-b)^2 (a+b-c)(a+b+c) \geq 0, \text{ which is true.} \end{aligned}$$

Similarly we can show that $\frac{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{1 - \sin \frac{A}{2}} \leq \frac{1}{2}$, (6) and $\frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}}{1 - \sin \frac{B}{2}} \leq \frac{1}{2}$, (7).

By adding (5), (6) and (7) we obtain (4).

Hence, we obtained the following refinement of the problem proposed by our friend **Kevin Soto Palacios**

$$\frac{3}{64} \prod_{\text{cyc}} \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2} \right) \geq \frac{3}{4} \prod_{\text{cyc}} \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{\sec \frac{A}{2} + \tan \frac{A}{2}}{\sin A}.$$

2. Solution by Nela Ciceu, Roşiori, Bacău şi Roxana Mihaela Stanciu, Buzău.

We have

$$\begin{aligned} \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2} \right) \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{B}{2} \right) \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{C}{2} \right) &= \left(1 + \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{\sin^2 \frac{A}{2}} \right) \left(1 + \frac{\cos^2 \frac{B}{2}}{\sin^2 \frac{B}{2}} \right) \left(1 + \frac{\cos^2 \frac{C}{2}}{\sin^2 \frac{C}{2}} \right) = \\ &= \left(\frac{\sin^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2}}{\sin^2 \frac{A}{2}} \right) \left(\frac{\sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2}}{\sin^2 \frac{B}{2}} \right) \left(\frac{\sin^2 \frac{C}{2} + \cos^2 \frac{C}{2}}{\sin^2 \frac{C}{2}} \right) = \frac{1}{\left(\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right)^2}. \end{aligned}$$

Since, $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$, we deduce that

$$\begin{aligned}
LHS &= \frac{3}{64} \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2} \right) \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{B}{2} \right) \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{C}{2} \right) + 3 = \\
&= \frac{3}{64} \cdot \frac{1}{\left(\frac{r}{4R} \right)} + 3 = \frac{3}{64} \cdot \frac{1}{\frac{1}{16} \left(\frac{r}{R} \right)^2} + 3 = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{R}{r} \right)^2 + 3. \\
LHS &= \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{R}{r} \right)^2 + 3 \geq 3 \left(\frac{R}{r} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^2 + 1 \geq \frac{R}{r} \Leftrightarrow \left(\frac{R}{r} - 2 \right)^2 \geq 0, \text{ true.}
\end{aligned}$$

So,

$$LHS \geq 3 \left(\frac{R}{r} \right), (1).$$

Other way to proof (1):

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{R}{2r} \right)^2 + 1 \stackrel{AM-GM}{\geq} 2 \cdot \frac{R}{2r} = \frac{R}{r}, \text{ so} \\
LHS &= 3 \cdot \left(\frac{R}{2r} \right)^2 + 3 = 3 \left(\left(\frac{R}{2r} \right)^2 + 1 \right) \geq 3 \left(\frac{R}{r} \right). \\
RHS &= \frac{\sec \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{\sin A} + \frac{\sec \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2}}{\sin B} + \frac{\sec \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2}}{\sin C} = \\
&= \frac{\frac{1}{\cos \frac{A}{2}} + \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}}}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} + \frac{\frac{1}{\cos \frac{B}{2}} + \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}}}{2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}} + \frac{\frac{1}{\cos \frac{C}{2}} + \frac{\sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{C}{2}}}{2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}} = \\
&= \frac{1 + \sin \frac{A}{2}}{2 \sin \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A}{2}} + \frac{1 + \sin \frac{B}{2}}{2 \sin \frac{B}{2} \cos^2 \frac{B}{2}} + \frac{1 + \sin \frac{C}{2}}{2 \sin \frac{C}{2} \cos^2 \frac{C}{2}} = \\
&= \frac{1 + \sin \frac{A}{2}}{2 \sin \frac{A}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{A}{2} \right)} + \frac{1 + \sin \frac{B}{2}}{2 \sin \frac{B}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{B}{2} \right)} + \frac{1 + \sin \frac{C}{2}}{2 \sin \frac{C}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{C}{2} \right)} = \\
&= \frac{1}{2 \sin \frac{A}{2} \left(1 - \sin \frac{A}{2} \right)} + \frac{1}{2 \sin \frac{B}{2} \left(1 - \sin \frac{B}{2} \right)} + \frac{1}{2 \sin \frac{C}{2} \left(1 - \sin \frac{C}{2} \right)}.
\end{aligned}$$

Since,

$$\frac{R}{r} = \frac{1}{4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{1}{2 \sin \frac{A}{2} \left(\cos \frac{B-C}{2} - \cos \frac{B+C}{2} \right)} \geq \frac{1}{2 \sin \frac{A}{2} \left(1 - \sin \frac{A}{2} \right)},$$

we deduce

$$RHS \leq 3 \cdot \left(\frac{R}{r} \right), (2).$$

Hence, by (1) and (2) we obtain the desired inequality.

3. Soluție dată de Marin Chirciu, Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești

In ABC

$$\frac{3}{64} \prod \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2} \right) + 3 \geq \sum \frac{\sec \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{\sin A}.$$

Proposed by Kevin Palacios, Huarmey, Peru

Soluție.

Notez membrul stâng=MS și membrul drept=MD.

$$MS = \frac{3}{64} \prod \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2} \right) + 3 = \frac{3}{64} \prod \frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}} + 3 = \frac{3}{64} \cdot \frac{1}{\left(\frac{r}{4R} \right)^2} + 3 = \frac{3(R^2 + 4r^2)}{4r^2}.$$

$$\begin{aligned} MD &= \sum \frac{\sec \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{\sin A} = \sum \frac{\frac{1}{\cos \frac{A}{2}} + \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}}}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = \sum \frac{1 + \sin \frac{A}{2}}{2 \sin \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A}{2}} = \sum \frac{1 + \sin \frac{A}{2}}{2 \sin \frac{A}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{A}{2} \right)} = \\ &= \sum \frac{1 + \sin \frac{A}{2}}{2 \sin \frac{A}{2} \left(1 - \sin \frac{A}{2} \right) \left(1 + \sin \frac{A}{2} \right)} = \sum \frac{1}{2 \sin \frac{A}{2} \left(1 - \sin \frac{A}{2} \right)} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{\sin \frac{A}{2} \left(1 - \sin \frac{A}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Ideea de rezolvare este spargerea inegalității: $MS \geq \frac{3R}{r} \geq MD$.

$$\text{Demonstrăm că } \frac{1}{\sin \frac{A}{2} \left(1 - \sin \frac{A}{2} \right)} \leq \frac{2R}{r}.$$

Din identitatea $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$, obținem:

$$\frac{2R}{r} = \frac{1}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{A}{2} \left(\cos \frac{B-C}{2} - \cos \frac{B+C}{2} \right)} \geq \frac{1}{\sin \frac{A}{2} \left(1 - \cos \frac{B+C}{2} \right)} = \frac{1}{\sin \frac{A}{2} \left(1 - \sin \frac{A}{2} \right)}$$

Rezultă că $MD = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{\sin \frac{A}{2} \left(1 - \sin \frac{A}{2} \right)} \leq \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2R}{r} = \frac{3R}{r}$.

Rămâne să arătăm că: $\frac{3(R^2 + 4r^2)}{4r^2} \geq \frac{3R}{r} \Leftrightarrow R^2 + 4r^2 \geq 4Rr \Leftrightarrow (R - 2r)^2 \geq 0$, evident.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

4. Soluție dată de Gheorghe Alexe și George-Florin Șerban, Liceul Pedagogic "D.P.Perpessicius", Braila

Vom folosi următoarele formule cunoscute:

1) $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$, 2) $\sin \frac{A}{2} \leq \frac{a}{b+c}$, 3) $\frac{R}{r} \geq 2$, (Euler), 4) $\sum \frac{a}{p-a} = \frac{2(2R-r)}{r}$,

5) $ab + bc + ac = p^2 + r^2 + 4Rr$, 6) $16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$, (Gerretsen).

$\prod (1 + \cot^2 \frac{A}{2}) = \frac{1}{\prod \sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{16R^2}{r^2}$, am aplicat 1).

$$\sum \frac{\sec \frac{A}{2} + \tan \frac{A}{2}}{\sin A} = \sum \frac{\sin \frac{A}{2} + 1}{2 \sin \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A}{2}} = \sum \frac{\sin \frac{A}{2} + 1}{2 \sin \frac{A}{2} (1 - \sin^2 \frac{A}{2})} = \sum \frac{1}{2 \sin \frac{A}{2} (1 - \sin \frac{A}{2})} = \frac{1}{2} \left(\sum \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \sum \frac{1}{1 - \sin \frac{A}{2}} \right)$$

$\sum \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \sum \frac{1}{1 - \sin \frac{A}{2}} \leq \frac{3R^2}{2r^2} + 6$, folosesc 2), $-\sin \frac{A}{2} \geq -\frac{a}{b+c}$, $1 - \sin \frac{A}{2} \geq 1 - \frac{a}{b+c} = \frac{2p-2a}{2p-a}$,

$\frac{1}{1 - \sin \frac{A}{2}} \leq \frac{2p-a}{2p-2a} = 1 + \frac{a}{2(p-a)}$, $\sum \frac{1}{1 - \sin \frac{A}{2}} \leq 3 + \frac{1}{2} \sum \frac{a}{p-a}$, folosesc formula 4),

$\sum \frac{1}{1 - \sin \frac{A}{2}} \leq 3 + \frac{2R-r}{r} = 2(1 + \frac{R}{r})$, (i). In continuare vom demonstra ca $\sum \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} \leq 2(1 + \frac{R}{r})$, (ii)

$\sum \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} = \sum \frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{(p-b)(p-c)}} = \frac{\sqrt{p}}{S} \sum \sqrt{bc(p-a)}$, aplic inegalitatea (C.B.S) si formula 5),

$(\sum \sqrt{bc} \cdot \sqrt{p-a})^2 \leq (bc + ac + ab)(p-a + p-b + p-c) = (p^2 + r^2 + 4Rr) \cdot p$. Aratam ca

$(p^2 + r^2 + 4Rr) \cdot p \leq 4p(R+r)^2$, deci $p^2 + r^2 + 4Rr \leq 4R^2 + 8Rr + 4r^2$, $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$, (6) Gerretsen,

Rezulta $\sum \sqrt{bc} \cdot \sqrt{p-a} \leq 2\sqrt{p}(R+r)$. Deci $\sum \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{\sqrt{p}}{S} \sum \sqrt{bc(p-a)} \leq \frac{\sqrt{p}}{S} \cdot 2\sqrt{p}(R+r)$,

$\sum \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} \leq \frac{2p}{S} \cdot (R+r) = \frac{2}{r} \cdot (R+r) = 2(1 + \frac{R}{r})$. Adun inegalitatile (i) si (ii),

$\sum \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \sum \frac{1}{1 - \sin \frac{A}{2}} \leq 2(1 + \frac{R}{r}) + 2(1 + \frac{R}{r}) = 4(1 + \frac{R}{r})$. In final mai ramane de aratat ca

$4(1 + \frac{R}{r}) \leq \frac{3R^2}{2r^2} + 6$, notez $\frac{R}{r} = t \geq 2$, (Euler (3)), $\frac{3}{2}t^2 - 4t + 2 \geq 0$, $3t^2 - 8t + 4 \geq 0$, $(3t-2)(t-2) \geq 0$,

(A), deoarece $t-2 \geq 0$ si $3t-2 \geq 6-2=4 > 0$. Egalitate are loc daca $t=2$, $R=2r$, dar

$OI^2 = R(R-2r) = 0$, deci $O=I$, $\Rightarrow \triangle ABC$ echilateral.

Observatie: Am demonstrat ca $\sum \frac{\sec \frac{A}{2} + \tan \frac{A}{2}}{\sin A} \leq 2(R+r) \leq \frac{3}{64} \prod (1 + \cot^2 \frac{A}{2}) + 3$, obtinand astfel o rafinare a acestei inegalitati.

3. SOLUTIONS FOR TWO PROBLEMS FROM THE AMERICAN JOURNALS

By Nela Ciceu, Bacău, Romania
and
Roxana Mihaela Stanciu, Buzău, Romania

I. Solution to Problem 11927

from

The American Mathematical Monthly August-September 2016

11927. Proposed by Finbarr Holland, University College Cork, Cork, Ireland.

Let O, G, I and K be, respectively, the circumcenter, centroid, incenter, and symmedian point (also called Lemoine point or Grebe point) of triangle ABC . Prove $|OG| \leq |OI| \leq |OK|$, with equality if and only if ABC is equilateral.

Solution. We have

$$OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}, \quad OI^2 = R^2 - 2Rr,$$

$$OK^2 = \frac{a^2 b^2 c^2 (a^4 + b^4 + c^4 - a^2 b^2 - b^2 c^2 - a^2 c^2)}{4F^2 (a^2 + b^2 + c^2)^2}.$$

Therefore,

$$OG^2 \leq OI^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 18Rr, \quad (1).$$

By item 5.14 from the book "Geometric inequalities" by O. Bottema [and others] (Groningen, 1969) we have

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 24Rr - 12r^2, \text{ so to prove (1) it suffices to show that}$$

$$24Rr - 12r^2 \geq 18Rr \Leftrightarrow R \geq 2r, \text{ which is true (Euler's inequality).}$$

We have equality if and only if ABC is equilateral, i.e. $a = b = c$.

The inequality $OI^2 \leq OK^2$ it is written

$$\frac{a^2 b^2 c^2 (a^4 + b^4 + c^4 - a^2 b^2 - b^2 c^2 - a^2 c^2)}{4F^2 (a^2 + b^2 + c^2)^2} \geq R^2 - 2Rr,$$

and if we taking account by Heron's formula in form $16F^2 = 2\sum a^2 b^2 - \sum a^4$ and also by the

fact $R = \frac{abc}{4F}$ the last inequality becomes successively

$$2Rr \geq R^2 \frac{\sum a^4 + 2\sum a^2 b^2 - 4\sum a^4 + 4\sum a^2 b^2}{(\sum a^2)^2} \Leftrightarrow 2r(\sum a^2)^2 \geq R \cdot 48F^2$$

$$\Leftrightarrow 2r(\sum a^2)^2 \geq R \cdot 24F \cdot 2sr \Leftrightarrow (\sum a^2)^2 \geq 24FRs \Leftrightarrow (\sum a^2)^2 \geq 3abc(a+b+c), \text{ which is true.}$$

The last inequality yields from

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) \geq$$

$$\geq 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 3abc(a+b+c),$$

where we used twice the well-known inequality $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.

We have equality if and only if $a = b = c$.

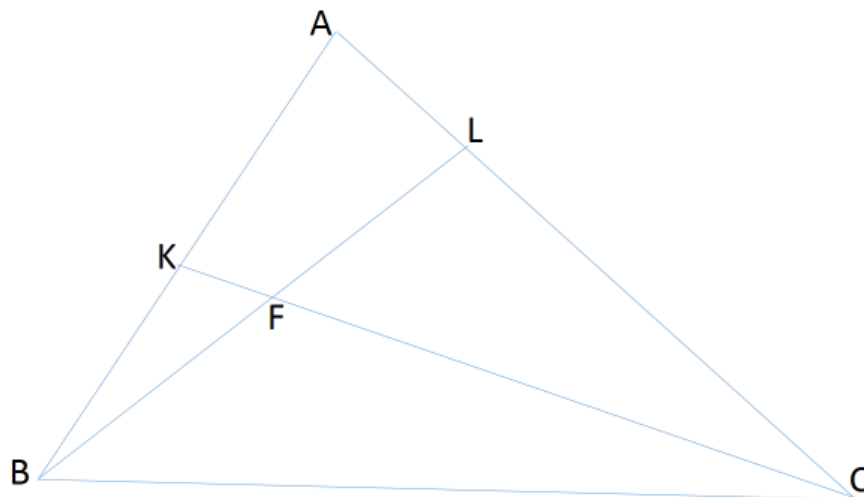
II. Solution to Problem 1084 from

The College Mathematics Journal September 2016

1084. *Proposed by George Apostolopoulos, Messolonghi, Greece.*

Let ABC be a triangle with area equal to 1, and K, L interior points of the sides AB, AC , respectively. Let F be the intersecting point of lines BL and CK . Find the maximum value of the area of triangle KLF .

Solution.



We denote $x = \frac{AK}{KB}, y = \frac{AL}{LC}$. By the theorem of Menelaus in triangle AKC and transversal $B-F-L$, we have

$$\frac{BK}{BA} \cdot \frac{LA}{LC} \cdot \frac{FC}{FK} = 1 \Leftrightarrow \frac{FC}{FK} = \frac{x+1}{y} \Leftrightarrow \frac{FK}{CK} = \frac{y}{x+y+1}.$$

We have that

$$\begin{aligned} \frac{[ABL]}{[BLC]} = y &\Rightarrow \frac{[ABL]}{[ABL] + [BLC]} = \frac{y}{y+1} \Rightarrow \frac{[ABL]}{[ABC]} = \frac{y}{y+1} \Rightarrow [ABL] = \frac{y}{y+1}; \\ \frac{[AKL]}{[BLK]} = x &\Rightarrow \frac{[AKL]}{[AKL] + [BLK]} = \frac{x}{x+1} \Rightarrow \frac{[AKL]}{[ABL]} = \frac{x}{x+1} \Rightarrow [AKL] = \frac{xy}{(x+1)(y+1)}; \\ \frac{[BFK]}{[BCK]} = \frac{y}{x+y+1}; \frac{[BCK]}{[ACK]} = \frac{1}{x} &\Rightarrow \frac{[BCK]}{[ACK] + [BCK]} = \frac{1}{x+1} \Rightarrow [BCK] = \frac{1}{x+1} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [BFK] = \frac{y}{(x+1)(x+y+1)}.$$

So, we obtain

$$\begin{aligned} [KLF] &= [ABL] - [AKL] - [BFK] = \frac{y}{y+1} - \frac{xy}{(x+1)(y+1)} - \frac{[BCK]y}{x+y+1} = \\ &= \frac{y}{(x+1)(y+1)} - \frac{y}{(x+1)(x+y+1)} = \frac{xy}{(x+1)(y+1)(x+y+1)}. \end{aligned}$$

Let ϕ the positive root of equation $t^2 - t - 1$, i.e ϕ is golden section. We shall prove that

$$\frac{xy}{(x+1)(y+1)(x+y+1)} \leq \frac{1}{5\phi+3}, (1).$$

Since $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, we have

$$\begin{aligned} (x+1)(y+1)(x+y+1) - (5\phi+3)xy &= x^2y + xy^2 + x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 - 5\phi xy = \\ &= x(y-\phi)^2 + y(x-\phi)^2 + \frac{\phi}{2} \cdot (x-y)^2 + \left(1 - \frac{\phi}{2}\right)(x-\phi)^2 + \left(1 - \frac{\phi}{2}\right)(y-\phi)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

so the inequality (1) is true.

Hence, the maximum value of the area of triangle KLF is $\frac{1}{5\phi+3}$ which occurs for $x = y = \phi$ and we are done!

4. APLICAȚII ALE SCHEMEI LUI HORNER GENERALIZATĂ COMBINATĂ CU METODELE ITERATIVE NEWTON ȘI HALLEY

Prof. Sălăjan Raluca
Școala Gimnazială Vasile Alecsandri Baia Mare

Este bine cunoscut faptul că funcția de interpolare în cele mai des întâlnite cazuri, se alege din mulțimea polinoamelor de un anumit grad, deoarece acestea oferă cel mai simplu algoritm de calcul.

În continuare vom prezenta câteva metode de calcul ale valorilor unui polinom și ale derivatelor sale.

Schema Horner, numită după [matematicianul englez William George Horner](#), este un [algoritm](#) pentru calculul eficient al valorii [polinoamelor](#) și un procedeu de aproximare a rădăcinilor unui polinom.

Așa cum vom vedea, metodele de calcul ale valorilor derivatelor unui polinom se bazează în principiu tot pe această schemă de calcul și pe formula lui Taylor.

Vom expune în continuare principiul schemei lui Horner și principiul schemei lui Horner generalizată.

Schema lui Horner pentru calculul valorilor unui polinom

Considerăm un polinom P cu coeficienți reali, definit prin egalitatea:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

(1.1)

unde $a_i, i = 0, 1, \dots, n$ sunt numere reale și reprezintă coeficienții polinomului P .

Fie $\xi \in \mathbb{R}$ un număr real dat. Pentru calculul valorii polinomului P pentru $x = \xi$ se poate aplica schema lui Horner, care constă într-o aranjare convenabilă a termenilor polinomului P , astfel încât calculele să poată fi executate cât mai simplu și cu un număr cât mai mic de operații. Se observă fără dificultate că valoarea polinomului P pentru $x = \xi$ se poate pune sub următoarea formă:

$$P(\xi) = (((((a_0\xi + a_1)\xi + a_2)\xi + a_3)\xi + \dots + a_{n-2})\xi + a_{n-1})\xi + a_n,$$

(1.2)

care ne conduce în final la calculul succesiv al numerelor reale $b_i, i = 0, \dots, n$ date de egalitățile:

$$\begin{aligned}
 b_0 &= a_0; \\
 b_1 &= b_0\xi + a_1; \\
 b_2 &= b_1\xi + a_2; \\
 &\dots\dots\dots \\
 b_{n-1} &= b_{n-2}\xi + a_{n-1}; \\
 b_n &= b_{n-1}\xi + a_n.
 \end{aligned}$$

(1.3)

Din (1.2) și (1.3) deducem egalitatea:

$$P(\xi) = b_n$$

(1.4)

Este ușor de observat că numerele reale b_i , $i = 1, \dots, n-1$ reprezintă coeficienții cântului Q , obținut prin împărțirea polinomului P prin polinomul $x - \xi$. Pentru simplificare, calculele se pot aranja în următorul tabel:

a_0	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_{n-1}	a_n	$x = \xi$
+	b_0	b_1	b_2	$\dots$	b_{n-2}	b_{n-1}	
b_0	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_{n-1}	b_n	

Semnificația calculelor din schema de mai sus rezultă din formulele (1.3).

Schema lui Horner generalizată

Schema expusă la punctul precedent, poate fi aplicată repetat, obținând astfel algoritmi de calcul care pot fi folosiți pentru calculul valorilor derivatelor unui polinom.

Fie $y \in \mathbb{R}$. Notăm cu A_i , $i = 0, \dots, n$ coeficienții polinomului $P(x)$ din (1.1), ordonat după puterile lui $x-y$, adică

$$P(x) = A_0(x-y)^n + A_1(x-y)^{n-1} + \dots + A_{n-1}(x-y) + A_n.$$

(1.5)

Dacă în egalitatea de mai sus facem $x = y$, atunci obținem

$$A_n = P(y).$$

(1.6)

Împărțind polinomul $P(x)$ cu $x-y$ obținem

$$P(x) = P_1(x)(x-y) + P(y),$$

(1.7)

iar pe de altă parte din (1.5) deducem

$$P(x) = [A_0(x-y)^{n-1} + A_1(x-y)^{n-2} + \dots + A_{n-1}](x-y) + A_n,$$

(1.8)

adică pentru P_1 avem următoarea reprezentare

$$P_1(x) = A_0(x-y)^{n-1} + A_1(x-y)^{n-2} + \dots + A_{n-1},$$

(1.9)

de unde pentru $x = y$ avem

$$A_{n-1} = P_1(y).$$

(1.10)

Acum împărțind polinomul $P_1(x)$ cu $x-y$ obținem

$$P_1(x) = (x-y)P_2(x) + P_1(y).$$

(1.11)

Procedând ca mai sus, deducem ușor următoarea egalitate

$$A_{n-2} = P_2(y),$$

(1.12)

$$P_2(x) = A_0(x-y)^{n-2} + A_1(x-y)^{n-3} + \dots + A_{n-3}(x-y) + A_{n-2}$$

(1.13)

Presupunem acum prin inducție că am reușit să determinăm coeficienții A_{n-i} , $i = 1, \dots, k$, $k < n$ și anume

$$A_{n-i} = P_i(y), i = \overline{1, k},$$

(1.14)

unde

$$P_i(x) = A_0(x-y)^{n-i} + A_1(x-y)^{n-i-1} + \dots + A_{n-i}, i = \overline{1, k}.$$

(1.15)

Pentru $i = k + 1$ avem

$$P_k(x) = (x-y)P_{k+1}(x) + P_k(y),$$

(1.16)

de unde, ținând cont de (1.15), obținem

$$P_{k+1}(x) = A_0(x-y)^{n-k-1} + A_1(x-y)^{n-k-2} + \dots + A_{n-k-1},$$

(1.17)

din care, dacă punem $x = y$, obținem

$$A_{n-k-1} = P_{k+1}(y).$$

(1.18)

Am dovedit mai sus că, prin împărțiri succesive ale polinomului P prin $x-y$, avem posibilitatea să calculăm coeficienții A_{n-i} , $i = 1, 2, \dots, n$ din dezvoltarea (1.5), adică

$$P(y) = A_n, P_i(y) = A_{n-i}, i = \overline{1, n}.$$

(1.19)

După cum rezultă din formula de recurență (1.16) $P_k(x) = (x-y)P_{k+1}(x) + P_k(y)$, coeficienții polinoamelor P_i , $i = 1, \dots, n$ și valorile acestor polinoame pentru $x = y$ se pot obține cu schema Horner aplicată repetat. Mai precis, pentru a obține coeficienții unui polinom oarecare P_{k+1} și valoarea sa pentru $x = y$, se aplică schema lui Horner polinomului P_k .

Comparând egalitatea (1.5) cu următoarea dezvoltare după formula lui Taylor a polinomului P (în punctul y), avem

$$P(x) = \frac{P^{(n)}(y)}{n!}(x-y)^n + \dots + \frac{P'(y)}{1!}(x-y) + P(y),$$

de unde vom obține, pentru calculul valorilor derivatelor succesive ale lui P , următoarele formule

$$P(y) = A_n, P^{(k)}(y) = k! A_{n-k}, k = \overline{1, n}. \quad (1.20)$$

Vom prezenta în continuare câteva aplicații ale schemei lui Horner generalizată combinată cu metodele iterative Newton și Halley.

- **Metoda lui Newton**

Metoda lui Newton pentru rezolvarea ecuației

$$f(x)=0, \quad f: I \rightarrow \mathbb{R},$$

unde I este un interval al axei reale și f este un polinom de forma (1.1), constă în construcția șirului

$\{x_n\}_{n \geq 0}$ de aproximații ale rădăcinilor ecuației respective, cu ajutorul următorului procedeu:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, x_0 \in I, i \geq 0, i \in \mathbb{N},$$

(1.21)

unde f este așa cum am precizat, un polinom.

Notăm cu $A_n^{(i)}$ și $A_{n-1}^{(i)}, i \geq 0, i \in \mathbb{N}$ valorile polinomului f , respectiv valorile derivatei sale pe punctul x_i .

În acest caz (1.21) se scrie

$$x_{i+1} = x_i - \frac{A_n^{(i)}}{A_{n-1}^{(i)}}, x_0 \in I, i \geq 0, i \in \mathbb{N}.$$

(1.22)

Observăm fără dificultate că în cazul când funcția f este polinom, atunci metoda lui Newton se poate aplica ușor, fără a mai calcula direct derivata funcției f , valorile sale calculându-se simplu, prin aplicarea repetată a schemei lui Horner. Dacă calculăm direct derivata lui f și apoi valorile sale, este nevoie să facem în principiu $n-1$ înmulțiri în plus, care pe lângă faptul că necesită timp în plus pentru cel care execută calculele, poate introduce și anumite erori.

Dacă calculele se execută cu un calculator electronic, atunci metoda (1.22) ne scutește de păstrarea în memoria calculatorului a coeficienților derivatei lui f sau de formarea lor pe parcursul calculelor în calculator, valorile derivatei lui f calculându-se în cazul nostru cu aceeași schemă cu care se calculează și valoarea lui f .

Exemplul 1.1. Să se calculeze rădăcinile reale ale ecuației:

$$f(x) = 0, \text{ pe intervalul } (-1,0), \text{ unde } f(x) = 6x^3 - x^2 + 1.$$

Se observă că ecuația dată are o singură rădăcină reală deoarece $f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Se constată ușor că această rădăcină este cuprinsă în intervalul $(-1,0)$ deoarece $f(-1) = -6$ și

$f(0) = 1$. Luăm $x_0 = -1$ și aplicăm schema lui Horner generalizată combinată cu metoda (1.22).

Aranjăm calculele în următorul tabel:

6	-1	0	1	$x_0 = -1$
6	-7	7	-6	$A_3^{(0)}$
6	-13	20	-	$A_2^{(0)}$
6	-1	0	1	$x_1 = -0.7$
6	-5.2	3.64	-1.548	$A_3^{(1)}$
6	-9.4	10.22	-	$A_2^{(1)}$
6	-1	0	1	$x_2 = -0.548532$
6	-4.291	2.354	-0.2912	$A_3^{(2)}$
6	-7.582	6.513	-	$A_2^{(2)}$
6	-1	0	1	$x_3 = -0.503827$
6	-4.023	2.027	-0.0212	$A_3^{(3)}$
6	-7.046	5.577	-	$A_2^{(3)}$
6	-1	0	1	$x_4 = -0.500026$
6	-4	2	-0.0001	$A_3^{(4)}$
6	-7	5.5	-	$A_2^{(4)}$
-	-	-	-	$x_5 = -0.500008$

Observând că ecuația considerată admite rădăcină exactă $x^* = -0.5$, constatăm că ultima aproximație obținută $x_5 = -0.500008$ diferă cu puțin de rădăcina exactă.

• Metoda lui Halley

Metoda lui Halley de ordinul 3 constă în construcția șirului de aproximații $\{x_n\}_{n \geq 0}$ cu ajutorul următorului procedeu:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{f''(x_i) f(x_i)}{[f'(x_i)]^2} \right)}, x_0 \in I, i \geq 0, i \in \mathbb{N}.$$

(1.23)

Notăm cu $A_n^{(i)}, A_{n-1}^{(i)}, A_{n-2}^{(i)}, i \geq 0, i \in \mathbb{N}$ aproximațiile obținute cu schema lui Horner generalizată pentru $f(x_i), f'(x_i), \frac{1}{2} f''(x_i), i \geq 0, i \in \mathbb{N}$.

În acest caz (1.23) se scrie

$$x_{i+1} = x_i - \frac{A_n^{(i)}}{A_{n-1}^{(i)} \left(1 - \frac{A_{n-2}^{(i)} A_n^{(i)}}{[A_{n-1}^{(i)}]^2} \right)}, x_0 \in I, i \geq 0, i \in \mathbb{N}.$$

(1.24)

Exemplul 1.2 Vom trata în continuare exemplul numeric 1.1, dar cu metoda lui Halley de ordinul 3. În acest caz calculele sunt date în tabelul de mai jos:

6	-1	0	1	$x_0 = -1$
6	-7	7	-6	$A_3^{(0)}$
6	-13	20	-	$A_2^{(0)}$
6	-19	-	-	$A_1^{(0)}$
6	-1	0	1	$x_1 = -0.580419$
6	-4.483	2.602	-0.5101	$A_3^{(1)}$
6	-7.966	7.225	-	$A_2^{(1)}$
6	-11.4485	-	-	$A_1^{(1)}$
-	-	-	-	$x_2 = -0.500922$

Se poate observa că prima zecimală a primei iterații coincide cu prima zecimală a rădăcinii $x^* = -0.5$. Pentru a obține o aproximație cu o eroare de 10^{-3} , a fost suficient să se aplice de două ori metoda (1.24).

Bibliografie:

- I. Păvăloiu, N. Pop, „*Interpolare și aplicații*”, Editura Risoprint, Cluj-Napoca, 2005
- Raluca Anamaria Sălăjan, “*Studiul convergenței metodelor de tip interpolator*”, Editura Ceconi, Baia Mare, 2014.

5. REZOLVARE SUBIECTE TITULARIZARE 2014 MATEMATICĂ

Prof. Dumitrana Lavinia- Victoria,
Școala Gimnazială Bircii, Județul Olt

Subiectul I- Prezentarea unei activități didactice desfășurată în cadrul capitolului Mulțimi, clasa a V-a.

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a V-a.

Competențe generale

1. Identificarea unor date și relații matematice și corelarea lor în funcție de contextul în care au fost definite
2. Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural, contextual cuprinse în enunțuri matematice
3. Utilizarea algoritmilor și a conceptelor matematice pentru caracterizarea locală sau globală a unei situații concrete
4. Exprimarea caracteristicilor matematice cantitative sau calitative ale unei situații concrete și a algoritmilor de prelucrare a acestora
5. Analiza și interpretarea caracteristicilor matematice ale unei situații-problemă
6. Modelarea matematică a unor contexte problematice variate, prin integrarea cunoștințelor din diferite domenii.

Competențe specifice	Conținuturi
1. <i>Identificarea în limbajul cotidian sau în enunțuri matematice a unor noțiuni specifice teoriei mulțimilor</i> 2. <i>Evidențierea, prin exemple, a relațiilor de apartenență sau de incluziune</i> 3. <i>Selectarea și utilizarea unor modalități adecvate de reprezentare a mulțimilor și a operațiilor cu mulțimi</i> 4. <i>Exprimarea în limbaj matematic a unor situații concrete ce se pot descrie utilizând mulțimile</i> 5. <i>Interpretarea unor contexte uzuale și/sau matematice utilizând limbajul mulțimilor</i> 6. <i>Transpunerea unei situații-problemă în limbaj matematic utilizând mulțimi, relații și operații cu mulțimi</i>	Mulțimi • <i>Mulțimi: descriere și notații; element, relația dintre element și mulțime (relația de apartenență)</i> • <i>Relația între două mulțimi (relația de incluziune); submulțime</i> • <i>Mulțimile $\mathbb{N}$ și $\mathbb{N}^*$</i> • <i>Operații cu mulțimi: intersecție, reuniune, diferență</i> • <i>Exemple de mulțimi finite; exemple de mulțimi infinite</i>

(Programa școlară de matematică, OMECI nr. 5097/09.09.2009)

Pentru o activitate didactică desfășurată în vederea formării/dezvoltării unor competențe specifice precizate în secvența de programă de mai sus:

- explicați relația dintre competențele generale ale disciplinei și competențele specifice din secvența dată;
- menționați două metode de învățare care susțin centrarea pe elev a demersului didactic și argumentați alegerea acestora din perspectiva adecvării fiecărei metode la elemente componente ale secvenței date;
- exemplificați modul în care fiecare dintre metodele de învățare menționate favorizează formarea/dezvoltarea unor competențe specifice din secvența dată;
- precizați două mijloace de învățământ pe care le puteți utiliza pe parcursul desfășurării activității didactice și argumentați alegerea acestora;

- menționați un instrument interactiv – soft sau platformă educațională – pe care îl puteți utiliza pe parcursul desfășurării activității didactice și argumentați alegerea lui.

Notă. Se punctează și corectitudinea științifică a informației de specialitate utilizate în cadrul rezolvării cerinței.

Rezolvare

În contextul învățământului modern, conceptul central al proiectării didactice îl reprezintă demersul didactic personalizat, iar instrumentul acestuia este unitatea de învățare.

Documentul central al proiectării didactice este programa școlară. Programa școlară descrie oferta educațională a unei anumite discipline pe un parcurs școlar determinat. Actualele programe școlare oferă o mare libertate de acțiune profesorilor.

Ele contin:

- nota de prezentare
- competențe generale
- valori și atitudini
- competențe specifice și conținuturi
- sugestii metodologice

Competențele generale reprezintă ansambluri de cunoștințe și deprinderi pe care și-l propune să-l creeze și să-l dezvolte fiecare disciplină de studiu în parte pe parcursul întregii școlarizări.

Competențele specifice sunt formate pe parcursul unui an de studiu, sunt deduse din competențele generale și sunt etape în formarea acestora.

Competențele acoperă dimensiunea cognitivă a personalității. Ele au aceeași importanță ca și valorile și atitudinile - care acoperă dimensiunea afectiv-atitudinală a personalității - dar se supun altor criterii didactico-metodice și de evaluare.

Apariția noilor programe a impus schimbări la nivelul didacticii fiecărei discipline.

Diversificarea metodelor de învățare, a modurilor și formelor de organizare a lecțiilor, a situațiilor de învățare constituie cheia schimbărilor pe care le-a preconizat noul curriculum. Asigurarea unor situații de învățare multiple creează premise pentru valorificarea abilităților de învățare proprii ale elevilor.

Metodele de învățare sunt scheme de acțiune identificate de teoriile instruirii; ele sunt aplicate conținuturilor disciplinei studiate și reprezintă acțiuni interiorizate de elev.

Sensul schimbărilor din didactica actuală este orientat spre formarea de competențe. Învățarea nu mai poate avea ca unic scop memorarea și reproducerea unor cunoștințe. În societatea contemporană o învățare eficientă și de durată presupune explicarea și susținerea unor puncte de vedere proprii, precum și realizarea unui schimb de idei cu ceilalți.

Pasivitatea elevilor la clasă, consecință a unui stil de învățare prin prelegere, nu oferă rezultate în prea mare măsură. De fapt, prelegerea presupune ca toți elevii unei clase să asimileze același volum de cunoștințe în același ritm, ceea ce este practic aproape imposibil. Este insuficient ca elevii, în cadrul lecțiilor, să asculte explicațiile profesorului sau să vadă o demonstrație sau un experiment. Este mult mai eficient ca aceștia să participe activ în procesul de învățare. Astfel metode ca mozaicul, brainstormingul, ciorchinele, investigația, etc., devin metode indispensabile pentru o învățare eficientă și de durată.

Astfel pentru formarea-dezvoltarea competențelor specifice **CS1, CS2, CS3 și CS6** voi alege următoarele metode de învățare care susțin centrarea pe elev a demersului didactic: **metoda mozaicului și metoda ciorchinelui.**

Voi utiliza **metoda mozaicului** într-o lecție mixtă și o voi aplica în etapele de prezentarea noului conținut și dirijarea învățării, după ce anterior am enunțat titlul noii lecții și am făcut o reactualizare a cunostintelor elevilor despre mulțimi prin întrebări de genul:

Ce este o mulțime? Dați exemple de mulțimi.

Care sunt operațiile cu mulțimi studiate? Exemplificați. etc

Cum determinăm mulțimea multiplilor unui număr natural? Dar mulțimea divizorilor aceluiași număr?

Metoda mozaicului înseamnă învățarea prin cooperare în cadrul unui grup și predarea achizițiilor dobândite de către fiecare membru al grupului, unui alt grup.

Etape ale mozaicului:

- 1) Se împarte clasa în grupe eterogene de 4 elevi, fiecare primind o fișă de lucru numerotată de la 1 la 4. Fișele cuprind părți ale unui material ce urmează a fi discutat și înțeles de către elevi.

Cele patru fișe de lucru sunt părți ale lecției “*Operații cu mulțimi: intersecție, reuniune, diferență*” și poate fi aplicată pentru învățarea *Principiilor de numărare*.

Fișele au titlurile: “Principiul sumei”

“Principiul includerii și al excluderii”

“Principiul produsului”

“Principiul lui Dirichlet”.

Am ales să predau cele 4 principii în aceeași oră pentru a putea aplica metoda mozaicului și a-i ajuta astfel pe elevii să înțeleagă mai bine principiile de numărare și problemele în care acestea sunt utilizate.

- 2) Prezentarea succintă a subiectului tratat. Explicarea sarcinilor de lucru și a modului de desfășurare a activității.
- 3) Regruparea elevilor, în grupe de „experți”, în funcție de numărul fișei primite: astfel toți cei care au primit fișa numărul 1 vor forma un grup, cei care au primit fișa nr. 2 vor forma alt grup, șamd.

Astfel, un grup de „experți” va fi format din toți cei care au primit în cadrul grupului inițial de 4 fișa cu numele “Intersecția a două mulțimi”.

- 4) Învățarea prin cooperare a secțiunii revenite în cadrul grupului. Elevii citesc, discută, încearcă să înțeleagă cât mai bine și hotărăsc modul cum vor transmite noțiunile colegilor din grupul inițial.

Elevii pot folosi desene, diagrame, exemple numerice, notații matematice, etc.

- 5) Revenirea în cadrul grupului inițial și predarea colegilor noțiunile dobândite în cadrul grupului de experți. Dacă sunt neclarități se întreabă expertul. Dacă neclaritățile persistă, atunci se solicită ajutorul celorlalți membrii ai grupului expert pentru secțiunea respectivă.

În acest mod sunt „predate” toate cele 4 secțiuni ale lecției în cadrul fiecărui grup. Fiecare elev este responsabil atât de propria învățare cât și de transmiterea corectă și completă a

informațiilor colegilor din grup. Este foarte important ca profesorul să monitorizeze această activitate pentru a urmări transmiterea corectă a noțiunilor.

6) Trecerea în revistă a materialului discutat prin prezentarea orală cu toți participanții. Câteva întrebări bine puse vor determina gradul de stăpânire al achizițiilor dobândite.

Cele patru fișe de lucru vor avea următoarea structură:

Fișa nr. 1: "Submulțime a unei mulțimi"

Fie mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 4\}$
 $B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$.

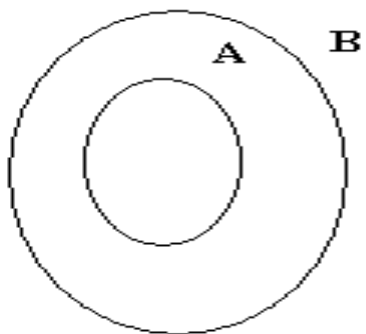
Apartține elementul 1 mulțimii A? Dar lui B? Ce puteți spune de 2 și de 3? Dar de elementul 4? Dar 7? Sunt toate elementele din A și în mulțimea B?

Reprezentați cu ajutorul diagramelor cele două mulțimi. Ce observați?

Fie A și B două mulțimi. Mulțimea A este inclusă în mulțimea B dacă orice element al mulțimii A este și element al mulțimii B. Se scrie $A \subset B$. Se mai spune că B include pe A și se scrie $B \supset A$. În acest caz, se spune despre A că este o submulțime (sau parte) a mulțimii B. Dacă mulțimea A nu este inclusă în mulțimea B, notăm $A \not\subset B$ și citim "A nu este inclus în B".

$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \text{ avem și } x \in B)$.

Ilustrând grafic mulțimile A și B cu ajutorul diagramelor, faptul că A este inclusă în B sau A submulțime a lui B este reprezentat astfel:



Fișa nr. 2: "Intersecția a două mulțimi"

Fie mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 4\}$
 $B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$.

Apartține elementul 1 mulțimii A? Dar lui B? Ce puteți spune de 2 și de 3? Dar de elementul 4?

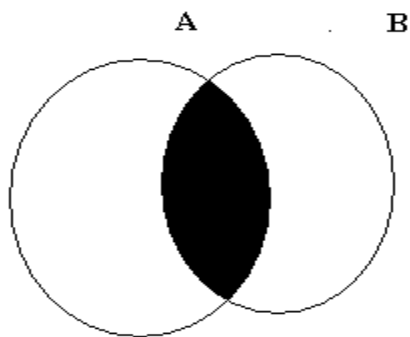
Care sunt elementele comune ale celor două mulțimi?

Reprezentați cu ajutorul diagramelor cele două mulțimi. Ce observați?

Se numește *intersecție* a două mulțimi A și B mulțimea elementelor comune ale celor două mulțimi. Se notează $A \cap B$ și se citește *intersecția mulțimilor A și B* .

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}.$$

Ilustrând grafic mulțimile A și B cu ajutorul diagramelor, *intersecția mulțimilor A și B* este reprezentată astfel:



Fișa nr. 3: "Reuniunea a două mulțimi"

Fie mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 4\}$
 $B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}.$

Apartine elementul 1 mulțimii A ? Dar lui B ? Ce puteți spune de 2 și de 3? Dar de elementul 4?

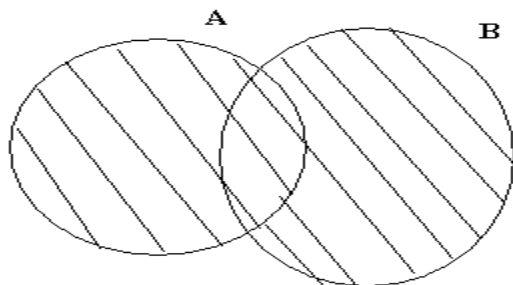
Care este mulțimea formată din toate elementele celor două mulțimi?

Reprezentați cu ajutorul diagramelor cele două mulțimi. Ce observați?

Se numește *intersecția* a două mulțimi A și B mulțimea elementelor care aparțin cel puțin uneia dintre mulțimi. Se notează $A \cup B$ și se citește *reuniunea mulțimilor A și B* .

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}.$$

Ilustrând grafic mulțimile A și B cu ajutorul diagramelor, *reuniunea mulțimilor A și B* este reprezentată astfel:



Fișa nr. 4: "Diferența a două mulțimi"

Fie mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 4\}$
 $B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$.

Aparține elementul 1 mulțimii A ? Dar lui B ? Ce puteți spune de 2 și de 3? Dar de elementul 4?

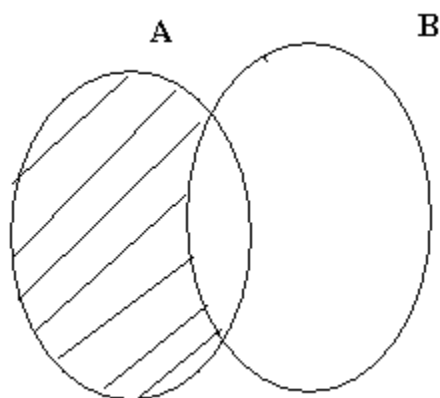
Care este mulțimea formată din care aparțin mulțimii A și nu aparțin mulțimii B ? Dar cea formată din elementele mulțimii B care nu sunt în mulțimea A ?

Reprezentați cu ajutorul diagramelor cele două mulțimi. Ce observați?

Se numește diferență a două mulțimi A și B mulțimea formată din elementele lui A care nu sunt elemente ale lui B . Se notează $A - B$ sau $A \setminus B$ și se citește diferența mulțimilor A și B .

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}.$$

Ilustrând grafic mulțimile A și B cu ajutorul diagramelor, reuniunea mulțimilor A și B este reprezentată astfel:



În urma aplicării mozaicului se va prezenta o listă de exerciții pe care le vor lucra elevii la tablă, în urma rezolvării acestora rezultând proprietățile relației de incluziune între mulțimi și proprietățile operațiilor cu mulțimi:

1) $\emptyset \subset A$

2) $A \subset A$

3) $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ și } B \subseteq A$

4) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (asociativitatea reuniunii și a intersecției).

5) $A \cup B = B \cup A$ și $A \cap B = B \cap A$ (comutativitatea reuniunii și intersecției).

6) $A \cup A = A$ și $A \cap A = A$

7) $A \cup \emptyset = A$ și $A \cap \emptyset = \emptyset$.

8) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivitatea reuniunii față de intersecție)

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivitatea intersecției față de

reuniune).

Metoda mozaicului are avantajul că implică toți elevii în cadrul acțiunii și că aceștia sunt responsabili atât de propria învățare, cât și de învățarea celorlalți. De aceea metoda este foarte utilă în motivarea elevilor cu rămânere în urmă, deoarece transformarea pentru scurt timp a elevului în “profesor”, le conferă acestora un ascendent moral asupra celorlalți. Alte avantaje ale mozaicului:

- dezvoltarea gândirii logice, critice
- stimularea încrederii în sine
- optimizarea învățării prin predarea achizițiilor altcuiva
- dezvoltarea abilităților de comunicare și de relaționare în cadrul grupului.

Cea de-a doua metodă utilizată va fi metoda **Ciorchinelui**.

Metoda Ciorchinelui este o metodă de brainstorming neliniară care stimulează găsirea conexiunilor între idei. Metoda poate fi aplicată atât la începutul unei lecții pentru reactualizarea cunoștințelor anterioare, cât și în cazul lecțiilor de recapitulare sau de sistematizare a cunoștințelor.

Eu mi-am ales să aplic metoda într-o lecție de recapitulare, după ce au fost însușite de către elevi și noțiunile de mulțimi finite și infinite.

Etape ale ciorchinelui:

- 1) se scrie un cuvânt sau o temă ce urmează a fi cercetat(ă) în mijlocul tablei sau a foi de hârtie.
- 2) se notează toate ideile care vin în minte în legătură cu tema respectivă în jurul acesteia, trăgându-se linii între acestea și tema inițială.
- 3) pe măsură ce se scriu idei noi se trag linii între toate ideile ce par a fi conectate.
- 4) activitatea se oprește atunci când se epuizează toate ideile sau când expiră timpul acordat activității.

Pentru a completa ciorchinele elevii trebuie să răspundă la întrebări de genul:

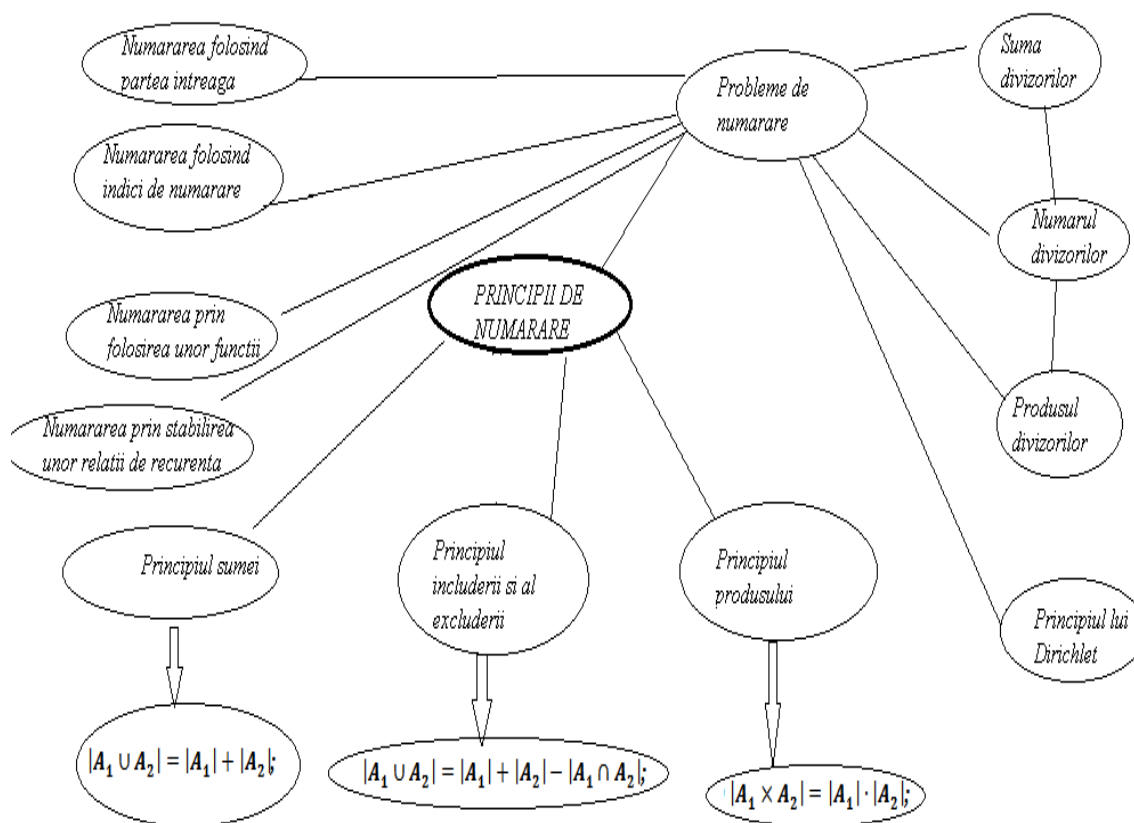
- Care sunt principiile de numărare studiate? Puteți să imi dați exemple?
- Cum numărăm *multiplii unui număr natural nenul p cuprins în mulțimea $\{1,2,...,n\}$* ?
- Cum determinăm *numărul divizorilor unui număr natural n* ?
- Cum calculez *suma divizorilor sau produsul divizorilor unui număr natural n* ?
- *Dacă repartizăm $n+1$ obiecte în n cutii, atunci câte obiecte vor fi în aceeași cutie? Ce principiu de numărare am enunțat?*
- Câte submulțimi are o mulțime cu n elemente?
- Câte funcții definite pe o mulțime cu n elemente cu valori într-o mulțime cu m elemente există?

În etapa finală a lecției ciorchinele se reorganizează, utilizându-se anumite concepte supraordonate găsite de elevi și de profesor.

Avantaje ale utilizării metodei ciorchinelui:

- stimulează elevii să gândească liber și deschis
- prin această metodă se fixează mai bine ideile și se structurează informațiile facilitându-se reținerea și înțelegerea acestora.

Utilizarea acestei metode antrenează elevii într-o continuă participare și colaborare, crește motivarea intrinsecă deoarece li se solicită să descopere fapte, să aducă argumente pro și contra. Lucrul în echipă dezvoltă atitudinea de toleranță față de ceilalți și sunt eliminate motivele de stres, iar emoțiile se atenuează.



Mijloacele de învățământ folosite pentru formarea-dezvoltarea competențelor specifice dorite din secvența dată, prin aplicarea metodelor de mai sus sunt: **fișele de lucru, reprezentări grafice, scheme, desene la tablă, formule matematice, desene, planșe.**

Prin mijloace de învățământ înțelegem un ansamblu structurat de resurse sau instrumente (materiale și tehnice) produse, adaptate ori selecționate în vederea îndeplinirii sarcinilor instructiv-educative ale procesului de învățământ.

Mijloacele de învățământ facilitează transmiterea unor cunoștințe, formarea și consolidarea unor priceperi și deprinderi, evaluarea unor achiziții, precum și realizarea unor aplicații practice în cadrul lecțiilor.

Mijloacele de învățământ intervin direct în procesul de instruire, sprijinind și amplificând eforturile de predare ale profesorului, cât și pe cele de învățare ale elevilor.

La matematică materialul didactic este extrem de util, nu doar pentru înțelegerea unor configurații, dar și pentru crearea unor situații-problema și justificarea unor proprietăți. Aproape fiecare lecție de matematică necesită material didactic. Manevrarea corectă a acestuia face ca învățarea să devină activă, iar conceptele despre care vorbim să fie interiorizate mai ușor și mai profund de către elevi.

Mijloacele de învățământ folosite la orele de matematică:

- desene, planșe imagini obținute cu ajutorul videoproietorului sau diapozitivelor -induc o notă de varietate în activitatea didactică, ajutând la prevenirea plictiselii și oboselii, la redresarea atenției, etc
- reprezentări grafice, scheme, desene la tablă, formule matematice - cu cât elevii stăpânesc mai bine aceste simboluri, cu atât vor putea să se ridice mai repede de la concret la nivelul superior al cunoașterii abstracțiunilor.
- fișele de lucru, caietul elevului, culegerile de probleme – aceste resurse, folosite aproape fără excepție la orele de matematică, au un mare avantaj: datorită ofertei foarte variate, pot fi alese (în cazul fișelor de lucru, pot fi concepute) în concordanță cu nevoile reale ale elevilor și cu posibilitățile lor intelectuale.
- manualele școlare – reprezintă instrumentul de lucru cel mai important, atât pentru elevi, cât și pentru profesor. Manualele școlare conduc la o diversificare a ofertei educaționale și își propun să îi ajute pe elevi să parcurgă învățarea într-un demers personalizat.

Pentru integrarea eficientă a mijloacelor de învățământ în activitatea didactică trebuie avută în vedere valoarea lor psiho-pedagogică, cât și condițiile și mijloacele lor de realizare. Alegerea mijloacelor de învățământ adecvate situațiilor educaționale favorabile învățării depinde de capacitatea profesorului de a opta pentru un mijloc de învățământ care să asigure conștientizarea celor învățate, concomitent cu motivarea învățării.

Lecțiile de matematică se pot desfășura în sala de clasă sau în laboratoarele AEL. Aceste laboratoare pot fi un cadru excelent pentru desfășurarea orelor de matematică. Programele AEL au avantajul că prezintă în mod dinamic concepte matematice, altfel mai greu de interiorizat de către elevi. Elevii primesc informația preponderent pe cale vizuală, ceea ce poate facilita retenția și pentru cei cu deficiențe de învățare.

Subiectul al II-lea – Test de evaluare și prezentarea unei metode alternative de evaluare în cadrul capitolului “Aplicații ale trigonometriei în geometrie”

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a IX-a (2 ore).

Competențe specifice	Conținuturi
1. <i>Identificarea elementelor necesare pentru calcularea unor lungimi de segmente și a unor măsuri de unghiuri</i> 2. <i>Utilizarea unor tabele și formule pentru calcule în trigonometrie și în geometrie</i> 3. <i>Aplicarea teoremelor și formulelor pentru determinarea unor măsuri (de lungimi sau de unghiuri)</i> 4. <i>Transpunerea într-un limbaj specific trigonometriei și geometriei a unor probleme practice</i> 5. <i>Utilizarea unor elemente de trigonometrie în rezolvarea triunghiului dreptunghic/oarecare</i> 6. <i>Analizarea și interpretarea rezultatelor obținute prin rezolvarea unor probleme practice</i>	Aplicații ale trigonometriei în geometrie • Rezolvarea triunghiului dreptunghic • Formulele (fără demonstrație): $\cos(180^\circ - x) = -\cos x$, $\sin(180^\circ - x) = \sin x$ • Modalități de calcul a lungimii unui segment și a măsurii unui unghi: teorema sinusurilor și teorema cosinusului

(Programa școlară de matematică, OMECI nr. 5099/09.09.2009)

1. Elaborați patru itemi: trei itemi obiectivi (un item de tip alegere duală, un item de tip alegere multiplă, un item de tip pereche) și un item subiectiv (de tip rezolvare de probleme) ca parte componentă a unui test prin care se evaluează formarea/dezvoltarea a patru competențe specifice precizate în secvența dată din programa școlară de matematică pentru clasa a IX-a.

30 de puncte

Notă. Se punctează corectitudinea proiectării itemilor, elaborarea răspunsului așteptat (barem de evaluare) și corectitudinea științifică a informației de specialitate.

2. Menționați o metodă alternativă de evaluare a formării/dezvoltării unor competențe specifice precizate în secvența dată din programa școlară de matematică pentru clasa a IX-a și prezentați un avantaj și un dezavantaj al utilizării acestei metode alternative de evaluare în comparație cu metodele tradiționale de evaluare.

15 puncte

Exercițiul 1

Itemul de evaluare este cea mai mică componentă identificabilă a unui test sau a unei probe de evaluare. Din punct de vedere științific, itemul este un element component al unui chestionar standardizat, care vizează evaluarea elevului în condiții de maximă rigurozitate. În practica școlară cotidiană, itemul reprezintă elementele componente ale chestionarului sau probei de examen, sau ale unei evaluări curente la clasă.

Item = Cerință / Sarcină de lucru + formatul acesteia + răspunsul așteptat.

Itemii obiectivi

- ✓ Trăsătura lor principală- așa cum sugerează și numele- este obiectivitatea crescută în măsurarea sau evaluarea rezultatelor învățării, chiar dacă aceasta se află, de obicei, în sfera inferioară a domeniului cognitiv.
- ✓ Nu necesită schemă detaliată de notare, punctajul corespunzător fiind acordat în funcție de marcarea sau nu a răspunsului corect.
- ✓ Pot fi utilizați la orice disciplină, cu un grad de utilitate diferit.

Din această categorie fac parte itemii:

- **itemi cu alegere duală**- solicită elevul în a asocia unul sau mai multe enunțuri cu una dintre alternativele unor cupluri duale: da/nu, corect/greșit, adevarat/fals, acord/dezacord.
- **itemii de tip pereche**- solicită din partea elevilor stabilirea unor corespondențe între diferite categorii de simboluri distribuite pe două coloane. Elementele din prima coloană,

denumite premise, constituie enunțul itemului, iar cele din cea de-a doua coloană-răspunsurile itemului. Criteriul/criteriile pe baza cărora se stabilește răspunsul corect sunt enunțate în instrucțiunile ce preced coloanele cu răspunsuri și premise.

▪ **itemii cu alegere multiplă**- solicită elevului să aleagă un răspuns dintr-o listă de premise oferite pentru aceeași premisă. Celelalte răspunsuri, în afara răspunsului corect, se numesc distractori (variante incorecte, dar plauzibile și paralele).

Itemii subiectivi

- ✓ Reprezintă forma “tradițională” de evaluare din țara noastră
- ✓ Sunt relativ ușor de construit
- ✓ Testează obiective ce scot în evidență originalitatea, creativitatea, caracterul personal al răspunsului
- ✓ Solicită răspunsuri elaborate.

Din această categorie fac parte itemii:

▪ eseu structurat sau liber (mai puțin la matematică)

▪ **rezolvare de probleme**

Rezolvarea de probleme este o activitate curentă a procesului de instruire pe care profesorul o propune elevilor la clasă cu scopul dezvoltării imaginației, a creativității, gândirii divergente, a capacității de a generaliza, de a reformula o problema, etc.

Capacitatea de a rezolva probleme nu este ceva înăscut, ci acesta se dezvoltă prin exercițiu de-a lungul unei perioade mai lungi de timp. De aceea, când utilizăm rezolvarea de probleme ca metodă de apreciere a performanțelor elevilor trebuie să începem cu activități simple.

Prin următorul test de evaluare voi dori evaluarea formării/dezvoltării competențelor specifice **CS1, CS3, CS4 și CS5** precizate în secvența dată. Primul item este de tip rezolvare de probleme, al doilea cu alegere duală, al treilea cu alegere multiplă, iar ultimul item din test este de tip pereche.

Test de evaluare - Aplicații ale trigonometriei în geometrie

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Nu se acordă punctaje intermediare, cu excepția celor prevăzute în barem
- Timp de lucru: 1 oră.

1. (30p) Fie triunghiul $\triangle ABC$ dreptunghic în A cu $AB = 6\text{cm}$ și $BC = 10\text{cm}$, iar AD înălțime. Calculați AC , BD , DC , AD , $m(\angle B)$, $m(\angle C)$.

2. (20p) Dacă considerați că propozițiile de mai jos sunt adevărate încercuiți A, în caz contrar încercuiți F.

În orice $\triangle ABC$ sunt adevărate relațiile:

A F a) $b \cos C + c \cos B = a$;

A F b) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{4S}{abc}$.

3. (20p) Încercuiți răspunsul corect!

Fie $\triangle ABC$ cu $AB = 4\text{cm}$, $AC = 6\text{cm}$, $BC = 8\text{cm}$. Atunci:

A) $\cos A$ are valoarea:

- a) $-\frac{1}{4}$; b) $\frac{11}{16}$; c) $\frac{7}{8}$; d) $\frac{5}{7}$.

B) $\sin B$ are valoarea:

- a) $\frac{4\sqrt{15}}{5}$; b) $\frac{\sqrt{15}}{4}$; c) $\frac{3\sqrt{15}}{16}$; d) $\frac{\sqrt{15}}{8}$.

4. (20p) Asociați numerele din coloana A cu răspunsul corect din coloana B astfel încât să realizați corespondențe corecte:

A	B
a) $\cos(A+B)$	1) $\sin C$
b) $\sin(A+B)$	2) $-\operatorname{tg} C$
c) $\operatorname{tg}(A+B)$	3) $-\operatorname{ctg} C$
d) $\operatorname{ctg}(A+B)$	4) $-\cos C$
	5) $\operatorname{tg} C$

Barem de corectare și notare

1. Aplică teorema lui Pitagora: $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow AC = 8\text{cm}$5p

Aplică teorema catetei pentru AB: $AB^2 = BD \cdot BC \Rightarrow BD = \frac{36}{10} = 3,6\text{cm}$ 5p

Calculează DC: $DC = BC - BD \Rightarrow DC = 10 - 3,6 = 6,4\text{cm}$ 5p

Aplică teorema înălțimii: $AD^2 = BD \cdot DC \Rightarrow AD = \sqrt{3,6 \cdot 6,4} = 4,8$ 5p

Aplică sinus: $\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ 5p

$\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ 5p

2. Răspuns corect: a) A10p

b) B10p

3. Răspuns corect: a)10p

c)10p

4. a) $\rightarrow 4$)5p

b) $\rightarrow 1$)5p

c) $\rightarrow 2$)5p

d) $\rightarrow 3$)5p

Exercițiul 2

În orientarea modernă **evaluarea**:

- înseamnă măsurarea și aprecierea competențelor (ceea ce poate să facă elevul cu ceea ce știe)
- pune accentul pe elementele de ordin calitativ (valori, atitudini)
- vizează progresul la fiecare elev.

Rostul evaluării este măsurarea progresului în învățare și generarea (determinarea) acestui progres. În aceste condiții, notarea ar trebui să măsoare nu atât cantitatea de informații de care dispune elevul la un moment dat, cât mai ales, ceea ce poate să facă el utilizându-și competențele dobândite prin învățare.

Pentru a evalua progresele înregistrate de elevi și calitatea activităților didactice desfășurate de el cu elevii, profesorul poate folosi o gamă largă de forme și metode de evaluare.

Prin **metodă de evaluare** înțelegem calea de acțiune pe care o urmează profesorul și elevii și care conduce la punerea în aplicare a oricărui demers evaluativ.

În afară de metodele devenite clasice vizând evaluarea, se mai poate identifica o serie de **metode moderne** numite fie complementare, fie alternative. Caracterul **complementar** implică faptul că acestea completează instrumentele tradiționale (probe practice, probe scrise, probe orale) și că se pot utiliza simultan în procesul evaluativ. Caracterul **alternativ** presupune o înlocuire cvasitotală a metodelor clasice cu cele moderne, ceea ce, deocamdată, nu este oportun și nu se poate generaliza. Se mizează deci pe o împletire funcțională, o complementare fructuoasă, optimă între cele două tipuri de evaluare și nu pe folosirea unilaterală, exclusivă, concurențială a acestora.

Însă, unele capacități intelectuale pe care dorim să le dezvoltăm elevilor au un caracter complex și interdisciplinar. De exemplu, capacitatea de a rezolva probleme este comună matematicii, fizicii, biologiei, etc. Capacitatea de a citi și înțelege un text este utilă la limba și literatura română sau limbile străine, cât și la istorie, geografie, economie, etc.

Deși importante pentru testarea unor cunoștințe și capacități de bază, metodele tradiționale nu mai sunt eficiente în situații ca cele de mai sus. Astfel, trebuie folosite metode care fac apel la creativitatea elevului, la gândirea divergentă, la generalizări, sau la lucrul în echipă.

Printre cele mai cunoscute metode de evaluare alternative din literatura de specialitate enumerăm:

- -investigația
- -proiectul
- -portofoliul
- -autoevaluarea
- -referatul
- -observarea sistematică a elevilor.

Voi folosi **investigația** ca metodă de evaluare alternativă adecvată pentru a măsura gradul de formare/dezvoltare a competențelor specifice **CS1, CS4, CS5 și CS6** din secvența

dată. Elevii vor investiga cercul trigonometric și vor explora proprietățile acestuia pentru diferite cazuri particulare. Astfel ei vor descoperi proprietăți ale cercului trigonometric utile atât la orele următoare, dar și în clasele ulterioare.

Investigația este o metodă de evaluare în care elevul este pus în situația de a căuta o soluție deosebită (față de soluțiile algoritmice) la sarcini de complexități diferite. Chiar dacă sarcina este simplă, elevul trebuie să facă dovada înțelegerii sarcinii, rezolvării, generalizării sau transpunerii ei în alt context.

Modul de lucru în cadrul investigației este individual sau de grup.

Dezavantaj al investigației:

- necesită timp și resurse materiale de realizare.

Avantaje ale investigației:

- este un veritabil instrument de apreciere și analiză a cunoștințelor
- contribuie la dezvoltarea capacităților de ordin aplicativ ale elevilor (mai ales în cazul rezolvării de probleme)
- are un pronunțat caracter formativ.

Evaluarea investigației se face pe baza unei scheme de notare, unde se vor măsura următoarele elemente:

- -strategia de rezolvare
- -aplicarea cunoștințelor, regulilor
- -acuratețea prelucrării datelor
- -claritatea argumentării și forma prezentării
- -atitudinea elevilor față de cerințe
- -dezvoltarea unor deprinderi de lucru individual sau de grup.

Procedura de apreciere- Evaluarea investigației se face holistic(global) ținând cont mai ales de claritatea argumentării și forma prezentării, dar și de gradul de finalizare a sarcinii după cum urmează:

- Nota 5- Competență realizată la nivelul minim al atingerii obiectivelor.
- Nota 7- Competență formată, dar nestructurată, care necesită antrenament pentru consolidare.
- Nota 9- Competență formată, dar care poate fi dezvoltată.
- Nota 10- Competență formată, care se poate autodezvolta.