WWW.MATEINFO.RO

REVISTA ELECTRONICA MATEINFO.RO

SEPTEMBRIE 2022

ISSN 2065 - 6432

REVISTĂ DIN FEBRUARIE 2009

COORDONATOR:

ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ȘI SUSȚINĂTORI PERMANENȚI AI REVISTEI

NECULAI STANCIU

MARIN CHIRCIU

ROXANA MIHAELA STANCIU

NELA CICEU

ARTICOLE

R.E.M.I. SEPTEMBRIE 2022

PUTEȚI TRIMITE ARTICOLE ÎN FOMAT WORD PE
REVISTA.MATEINFO@YAHOO.COM

1. Probleme de maxim și minim

Marin Chirciu[1]

Art 3888

Articolul dezvoltă probleme de maximum și de minimum din revistele de specialitate recente.

Aplicația1.

If $x, y > 0$, $x^2 + y^2 = 4$ then find Min of

$$P = x + 2y.$$

Rin Huynh, Vietnam

Soluție.

Avem $P^2 = (x + 2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2 = (4 - y^2) + 4xy + 4y^2 = 4 + 4xy + 3y^2 \geq 4$.

Din $P^2 \geq 4$ rezultă că $P \geq 2$.

Deducem că $MinP = 2$ pentru $(x, y) = (2, 0)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda \geq 1$ fixed. If $x, y > 0$, $x^2 + y^2 = \lambda^2$ then find Min of

$$P = x + \lambda y.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Avem $P^2 = (x + \lambda y)^2 = x^2 + 2\lambda xy + \lambda^2 y^2 = (\lambda^2 - y^2) + 2\lambda xy + \lambda^2 y^2 = \lambda^2 + 2\lambda xy + (\lambda^2 - 1)y^2 \geq \lambda^2$.

Din $P^2 \geq \lambda^2$ rezultă că $P \geq \lambda$.

Deducem că MinP=λ, pentru $(x, y) = (\lambda, 0)$.

Aplicația2.

If $x, y, z > 0$, $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ then find Min of

$$P = \frac{x^3}{3y+1} + \frac{y^3}{3z+1} + \frac{z^3}{3x+1}.$$

Hoanghai Nguyen, Vietnam

[1] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu", Pitești*

Soluție.

Cu substituția $\left(x^3,y^3,z^3\right)=(a,b,c)$ problema se reformulează:

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then find Min of

$$P=\frac{a}{3\sqrt[3]{b}+1}+\frac{b}{3\sqrt[3]{c}+1}+\frac{c}{3\sqrt[3]{a}+1}.$$

Lema

If $a,b,c>0$ then

$$\frac{a}{3\sqrt[3]{b}+1}\geq\frac{5a-ab}{16}.$$

Soluție.

Cu inegalitatea mediilor avem $b+1+1\geq 3\sqrt[3]{b\cdot 1\cdot 1}=3\sqrt[3]{b}$,

cu egalitate pentru $b=1\Rightarrow\frac{a}{3\sqrt[3]{b}+1}\geq\frac{a}{b+3}$, (1).

Obținem $\frac{a}{b+3}+\frac{a(b+3)}{16}\overset{AM-GM}{\geq}2\sqrt{\frac{a}{b+3}\cdot\frac{a(b+3)}{16}}=\frac{a}{2}$,

cu egalitate pentru $\frac{a}{b+3}=\frac{a(b+3)}{16}\Leftrightarrow b=1$, (2).

Din(1) și (2) $\Rightarrow\frac{a}{3\sqrt[3]{b}+1}\geq\frac{a}{b+3}\geq\frac{a}{2}-\frac{a(b+3)}{16}=\frac{5a-ab}{16}$, cu egalitate pentru $b=1$.

Folosind **Lema** obținem:

$$P=\sum\frac{a}{3\sqrt[3]{b}+1}\overset{Lema}{\geq}\sum\frac{5a-ab}{16}=\frac{5}{16}\sum a-\frac{1}{16}\sum ab\overset{SOS}{\geq}\frac{5}{16}\sum a-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2=$$

$$=\frac{5}{16}\cdot 3-\frac{1}{48}\cdot 3^2=\frac{3}{4}.$$

Deducem că $\min P=\frac{3}{4}$ pentru $(a,b,c)=(1,1,1)\Leftrightarrow(x,y,z)=(1,1,1)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda\geq 0$ fixed. If $x,y,z>0$, $x^3+y^3+z^3=3$ then find Min of

$$P=\frac{x^3}{\lambda y+1}+\frac{y^3}{\lambda z+1}+\frac{z^3}{\lambda x+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Cu substituția $(x^3,y^3,z^3)=(a,b,c)$ problema se reformulează:

Let $\lambda \geq 0$ fixed. If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then find Min of

$$P=\frac{a}{\lambda\sqrt[3]{b}+1}+\frac{b}{\lambda\sqrt[3]{c}+1}+\frac{c}{\lambda\sqrt[3]{a}+1}.$$

Pentru $\lambda=0$ obținem $P=a+b+c=3$. În continuare luăm $\lambda>0$.

Lema

If $a,b,c,\lambda>0$ then

$$\frac{a}{\lambda\sqrt[3]{b}+1}\geq\frac{(4\lambda+3)a-\lambda ab}{3(\lambda+1)^2}.$$

Soluție.

Cu inegalitatea mediilor avem $b+1+1\geq 3\sqrt[3]{b\cdot 1\cdot 1}=3\sqrt[3]{b}$,

cu egalitate pentru $b=1\Rightarrow \frac{a}{\lambda\sqrt[3]{b}+1}\geq\frac{3a}{\lambda(b+2)+3}$, (1).

Obținem:

$$\frac{3a}{\lambda(b+2)+3}+\frac{3a(\lambda(b+2)+3)}{9(\lambda+1)^2}\overset{AM-GM}{\geq}2\sqrt{\frac{3a}{\lambda(b+2)+3}\cdot\frac{3a(\lambda(b+2)+3)}{9(\lambda+1)^2}}=\frac{2a}{\lambda+1},$$

cu egalitate pentru $\frac{3a}{\lambda(b+2)+3}=\frac{3a(\lambda(b+2)+3)}{9(\lambda+1)^2}\Leftrightarrow \lambda b=\lambda\Leftrightarrow ,(2).$

Din(1) și (2) $\Rightarrow \frac{a}{\lambda\sqrt[3]{b}+1}\geq\frac{3a}{\lambda(b+2)+3}\geq\frac{2a}{\lambda+1}-\frac{3a(\lambda(b+2)+3)}{9(\lambda+1)^2}=\frac{(4\lambda+3)a-\lambda ab}{3(\lambda+1)^2}.$

Folosind **Lema** obținem:

$$P=\sum\frac{a}{\lambda\sqrt[3]{b}+1}\overset{Lema}{\geq}\sum\frac{(4\lambda+3)a-\lambda ab}{3(\lambda+1)^2}=\frac{(4\lambda+3)}{3(\lambda+1)^2}\sum a-\frac{\lambda}{3(\lambda+1)^2}\sum ab\overset{SOS}{\geq}$$

$$=\frac{(4\lambda+3)}{3(\lambda+1)^2}\sum a-\frac{\lambda}{3(\lambda+1)^2}\cdot\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2=\frac{(4\lambda+3)}{3(\lambda+1)^2}\cdot 3-\frac{\lambda}{3(\lambda+1)^2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 3^2=\frac{4\lambda+3}{(\lambda+1)^2}-\frac{\lambda}{(\lambda+1)^2}=$$

$$=\frac{3\lambda+3}{(\lambda+1)^2}=\frac{3}{\lambda+1}.$$

Deducem că $\min P=\frac{3}{\lambda+1}$ pentru $(a,b,c)=(1,1,1)\Leftrightarrow(x,y,z)=(1,1,1)$.

Aplicația3.

Determine

$$\min \frac{x^2+2023}{\sqrt{x^2+2022}}, x \in \mathbf{R}.$$

Neculai Stanciu, Buzău

Soluție.

$$E=\frac{x^2+2023}{\sqrt{x^2+2022}}=\frac{2021}{2022}\sqrt{x^2+2022}+\left(\frac{\sqrt{x^2+2022}}{2022}+\frac{1}{\sqrt{x^2+2022}}\right)\overset{AGM}{\geq}\frac{2021}{2022}\sqrt{x^2+2022}+$$

$$+2\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+2022}}{2022}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+2022}}}=\frac{2021}{2022}\sqrt{x^2+2022}+2\sqrt{\frac{1}{2022}}\overset{x^2\geq 0}{\geq}\frac{2021}{2022}\sqrt{2022}+2\sqrt{\frac{1}{2022}}=$$

$$=\frac{2023}{\sqrt{2022}}.$$

Deducem că $\min \frac{x^2+2023}{\sqrt{x^2+2022}}=\frac{2023}{\sqrt{2022}}$ pentru $x=0$.

Problema se poate dezvolta.

Let $a>0, b\geq 0, \lambda \geq 1$ fixed. Determine

$$\min \frac{ax^2+bx+\lambda+1}{\sqrt{ax^2+bx+\lambda}}, x \in (0,\infty).$$

Marin Chirciu

Soluție.

Obținem $E=\frac{ax^2+bx+\lambda+1}{\sqrt{ax^2+bx+\lambda}}=\frac{\lambda-1}{\lambda}\sqrt{ax^2+bx+\lambda}+\left(\frac{\sqrt{ax^2+bx+\lambda}}{\lambda}+\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+\lambda}}\right)\overset{AGM}{\geq}$

$$\overset{AGM}{\geq}\frac{\lambda-1}{\lambda}\sqrt{ax^2+bx+\lambda}+2\sqrt{\frac{\sqrt{ax^2+bx+\lambda}}{\lambda}\cdot\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+\lambda}}}=\frac{\lambda-1}{\lambda}\sqrt{ax^2+bx+\lambda}+2\sqrt{\frac{1}{\lambda}}\overset{ax^2+bx\geq 0}{\geq}$$

$$\overset{ax^2+bx\geq 0}{\geq}\frac{\lambda-1}{\lambda}\sqrt{\lambda}+2\sqrt{\frac{1}{\lambda}}=\frac{\lambda+1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Deducem că $\min \frac{ax^2+\lambda+1}{\sqrt{ax^2+\lambda}}=\frac{\lambda+1}{\sqrt{\lambda}}$ pentru $x=0$.

Aplicația4.

If $x, y, z>0$, $xyz=1$ then find Max of

$$P=\frac{1}{x^2+y^2+4}+\frac{1}{y^2+z^2+4}+\frac{1}{z^2+x^2+4}.$$

Quan Nguyen, Vietnam

Soluție.

Lema

If $x,y>0$ then

$$x^2+y^2+4\geq 2(x+y+1).$$

$x^2+y^2+4\geq 2(x+y+1)\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2\geq 0$, cu egalitate pentru $x=y=1$.

$$P=\sum\frac{1}{x^2+y^2+4}\overset{Lema}{\leq}\frac{1}{2}\sum\frac{1}{x+y+1}\overset{(1)}{\leq}\frac{1}{2}.$$

Am folosit(1): $(x,y,z)=(a^3,b^3,c^3)$, $xyz=1\Rightarrow abc=1$.

$$x+y+1=a^3+b^3+1=(a+b)(a^2+b^2-ab)+1\geq(a+b)(2ab-ab)+1=(a+b)ab+abc=$$

$$=ab(a+b+c)\Rightarrow\sum\frac{1}{x+y+1}\leq\sum\frac{1}{ab(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{abc(a+b+c)}=\frac{1}{abc}=1.$$

Deducem că MaxP=$\frac{1}{2}$ pentru $(a,b,c)=(1,1,1)\Leftrightarrow(x,y,z)=(1,1,1)$.

Problema se poate dezvolta.

If $x,y,z>0$, $xyz=\lambda^3$ then find Max of

$$P=\frac{1}{x^2+y^2+4\lambda^2}+\frac{1}{y^2+z^2+4\lambda^2}+\frac{1}{z^2+x^2+4\lambda^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema

If $x,y>0$ then

$$x^2+y^2+4\lambda^2\geq 2\lambda(x+y+\lambda).$$

$x^2+y^2+4\lambda^2\geq 2\lambda(x+y+\lambda)\Leftrightarrow(x-\lambda)^2+(y-\lambda)^2\geq 0$, cu egalitate pentru $x=y=\lambda$.

$$P=\sum\frac{1}{x^2+y^2+4\lambda^2}\overset{Lema}{\leq}\frac{1}{2\lambda}\sum\frac{1}{x+y+\lambda}\overset{(1)}{\leq}\frac{1}{2\lambda}\cdot\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{2\lambda^2}.$$

Am folosit(1): $(x,y,z)=(a^3,b^3,c^3)$, $xyz=\lambda^3\Rightarrow abc=\lambda$.

$$x+y+\lambda=a^3+b^3+\lambda=(a+b)(a^2+b^2-ab)+\lambda\ge(a+b)(2ab-ab)+\lambda=(a+b)ab+abc=$$

$$=ab(a+b+c)\Rightarrow\sum\frac{1}{x+y+\lambda}\le\sum\frac{1}{ab(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{abc(a+b+c)}=\frac{1}{abc}=\frac{1}{\lambda}.$$

Deducem că MaxP$=\frac{1}{2\lambda^2}$ pentru $(a,b,c)=(\sqrt[3]{\lambda},\sqrt[3]{\lambda},\sqrt[3]{\lambda})\Leftrightarrow(x,y,z)=(\lambda,\lambda,\lambda)$.

Aplicația5.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3abc$ then find Max of

$$P=\frac{1}{1+a+2bc}+\frac{1}{1+b+2ca}+\frac{1}{1+c+2ab}.$$

Bui Xuan Truong, Vietnam

Soluție

Lema

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3abc$ then

$$\frac{1}{1+a+2bc}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{abc}+\frac{1}{bc}+2\right).$$

$$\frac{1}{1+a+2bc}=\frac{1}{1+a+bc+bc}\overset{AGM}{\le}\frac{1}{4\sqrt[4]{1\cdot a\cdot bc\cdot bc}}=\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{1}{abc}\cdot\frac{1}{bc}\cdot1\cdot1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{abc}+\frac{1}{bc}+1+1\right)=$$

$=\frac{1}{16}\left(\frac{1}{abc}+\frac{1}{bc}+2\right)$, cu egalitate pentru $1=a=bc$ și $\frac{1}{abc}=\frac{1}{bc}=1$.

$$P=\sum\frac{1}{1+a+2bc}\overset{Lema}{\le}\sum\frac{1}{16}\left(\frac{1}{abc}+\frac{1}{bc}+2\right)=\frac{1}{16}\left(\frac{3}{abc}+\sum\frac{1}{bc}+6\right)\overset{(1)}{\le}\frac{1}{16}\left(\frac{3}{1}+3+6\right)=\frac{3}{4},$$

unde (1) rezultă din $abc\ge1$,(vezi $a+b+c=3abc$ și inegalitatea mediilor) și $\sum\frac{1}{bc}=3$.

Deducem că MaxP$=\frac{3}{4}$ pentru $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3abc$ and $n\in\mathbf{N}^*$ then find Max of

$$P=\frac{1}{1+a+nbc}+\frac{1}{1+b+nca}+\frac{1}{1+c+nab}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3abc$ then

$$\frac{1}{1+a+nbc}\le\frac{1}{(n+2)^2}\left(\frac{1}{abc}+\frac{n-1}{bc}+2\right).$$

$$\frac{1}{1+a+nbc}=\frac{1}{1+a+\underbrace{bc+\ldots+bc}_{n}}\overset{AGM}{\le}\frac{1}{(n+2)\sqrt[n+2]{1\cdot a\cdot\underbrace{bc\cdot\ldots\cdot bc}_{n}}}=\frac{1}{(n+2)}\sqrt[n+2]{\frac{1}{abc}\cdot\underbrace{\frac{1}{bc}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{bc}}_{n-1}\cdot1\cdot1}=$$

$$=\frac{1}{n+2}\cdot\frac{1}{n+2}\left(\frac{1}{abc}+\underbrace{\frac{1}{bc}+\ldots+\frac{1}{bc}}_{n-1}+1+1\right)=\frac{1}{(n+2)^2}\left(\frac{1}{abc}+\frac{n-1}{bc}+2\right),$$

cu egalitate pentru $1=a=bc$ și $\frac{1}{abc}=\frac{1}{bc}=1$.

$$P=\sum\frac{1}{1+a+nbc}\overset{Lema}{\le}\sum\frac{1}{(n+2)^2}\left(\frac{1}{abc}+\frac{n-1}{bc}+2\right)=\frac{1}{(n+2)^2}\left(\frac{1}{abc}+\frac{n-1}{bc}+2\right)\overset{(1)}{\le}$$

$$\overset{(1)}{\le}\frac{1}{(n+2)^2}\left(\frac{3}{1}+(n-1)\cdot3+6\right)=\frac{3(n+2)}{(n+2)^2}=\frac{3}{n+2},$$

unde (1) rezultă din $abc\ge1$,(vezi $a+b+c=3abc$ și inegalitatea mediilor) și $\sum\frac{1}{bc}=3$.

Deducem că MaxP=$\frac{3}{n+2}$ pentru $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Aplicația6.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then find Max of

$$T=\frac{a}{a+b^4+c^4}+\frac{b}{b+c^4+a^4}+\frac{c}{c+a^4+b^4}.$$

Hoanghai Nguyen, Vietnam

Soluție

Lema

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\frac{a}{a+b^4+c^4}\le\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

$$\frac{a}{a+b^4+c^4}=\frac{a^2bc}{a^2bc+b^4+c^4}\overset{(1)}{\le}\frac{a^2bc}{a^2bc+bc\left(b^2+c^2\right)}=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2},$$

unde (1) $\Leftrightarrow$ $b^4+c^4 \ge bc\left(b^2+c^2\right) \Leftrightarrow (b-c)\left(b^3-c^3\right)\ge 0$, evident deoarece facorii

$(b-c)$ și $\left(b^3-c^3\right)$ au aceleași semn, cu egalitate pentru $b=c$.

$$T=\sum \frac{a}{a+b^4+c^4} \overset{Lema}{\le} \sum \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}=1.$$

Deducem că MaxP=1 pentru $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $n\in \mathbf{N}$ then find Max of

$$T=\frac{a^n}{a^n+b^{n+2}+c^{n+2}}+\frac{b^n}{b^n+c^{n+2}+a^{n+2}}+\frac{c^n}{c^n+a^{n+2}+b^{n+2}}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $n\in \mathbf{N}$ then

$$\frac{a^n}{a^n+b^{n+2}+c^{n+2}} \le \frac{a^n}{a^n+b^n+c^n}.$$

$$\frac{a^n}{a^n+b^{n+2}+c^{n+2}}=\frac{a^n bc}{a^n bc+b^{n+2}+c^{n+2}} \overset{(1)}{\le} \frac{a^n bc}{a^n bc+bc\left(b^n+c^n\right)}=\frac{a^n}{a^n+b^n+c^n},$$

unde (1) $\Leftrightarrow$ $b^{n+2}+c^{n+2} \ge bc\left(b^n+c^n\right) \Leftrightarrow (b-c)\left(b^{n+1}-c^{n+1}\right)\ge 0$, evident deoarece facorii

$(b-c)$ și $\left(b^{n+1}-c^{n+1}\right)$ au aceleași semn, cu egalitate pentru $b=c$.

$$T=\sum \frac{a^n}{a^n+b^{n+2}+c^{n+2}} \overset{Lema}{\le} \sum \frac{a^n}{a^n+b^n+c^n}=1.$$

Deducem că MaxP=1 pentru $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Aplicația7.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then find Min of

$$P=\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}+\frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Hoanghai Nguyen, Vietnam

Soluție

Cu substituția $(a,b,c)=\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}\right)$ problema se reformulează:

If $x,y,z>0$, $xyz=1$ then find Min of

$$P=\frac{y^2}{x}+\frac{y^2}{x}+\frac{y^2}{x}+\frac{9}{2(xy+yz+zx)}.$$

$$P=\frac{y^2}{x}+\frac{z^2}{y}+\frac{x^2}{z}+\frac{9}{2(xy+yz+zx)}\overset{Bergstrom}{\geq}\frac{(x+y+z)^2}{x+y+z}+\frac{9}{2(xy+yz+zx)}=$$

$$=x+y+z+\frac{9}{2(xy+yz+zx)}\overset{SOS}{\geq}\sum x+\frac{9}{2\cdot\frac{1}{3}\left(\sum x\right)^2}\overset{\sum x=t}{=}t+\frac{27}{2t^2}\overset{(1)}{\geq}\frac{9}{2},$$

unde (1) $t+\frac{27}{2t^2}\geq\frac{9}{2}\Leftrightarrow 2t^3-9t^2+27\geq 0\Leftrightarrow (t-3)^2(2t+3)\geq 0$.

Deducem că MinP$=\frac{9}{2}$ pentru $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $0\leq\lambda\leq 8$ fixed. If $a,b,c>0$, $abc=1$ then find Min of

$$P=\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}+\frac{\lambda}{a+b+c}.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție</u>

Cu substituția $(a,b,c)=\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}\right)$ problema se reformulează:

If $x,y,z>0$, $xyz=1$ then find Min of

$$P=\frac{y^2}{x}+\frac{y^2}{x}+\frac{y^2}{x}+\frac{\lambda}{xy+yz+zx}.$$

$$P=\frac{y^2}{x}+\frac{z^2}{y}+\frac{x^2}{z}+\frac{\lambda}{xy+yz+zx}\overset{Bergstrom}{\geq}\frac{(x+y+z)^2}{x+y+z}+\frac{\lambda}{xy+yz+zx}=$$

$$=x+y+z+\frac{\lambda}{xy+yz+zx}\overset{SOS}{\geq}\sum x+\frac{\lambda}{\frac{1}{3}\left(\sum x\right)^2}\overset{\sum x=t}{=}t+\frac{3\lambda}{t^2}\overset{(1)}{\geq}3+\frac{\lambda}{3},$$

unde (1) $t+\frac{3\lambda}{t^2}\ge 3+\frac{\lambda}{3}\Leftrightarrow 3t^3-(\lambda+9)t^2+9\lambda\ge 0\Leftrightarrow (t-3)\left[2t^2+(9-\lambda)t+27-6\lambda\right]\ge 0$, care rezultă din: $t\ge 3$,(vezi $t=x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}=3$) și condiția din ipoteză $0\le\lambda\le 8$, care asigură $\left[2t^2+(9-\lambda)t+27-6\lambda\right]\ge 0$.

Deducem că MinP=$3+\frac{\lambda}{3}$ pentru $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Aplicația8.

If $x,y,z>0$, $xyz=1$ then find Min of

$$P=\frac{1}{x^3+y^3+1}+\frac{1}{y^3+z^3+1}+\frac{1}{z^3+x^3+1}.$$

Hoanghai Nguyen, Vietnam

Soluție

Lema.

If $x,y,z>0$, $xyz=1$

$$\frac{1}{x^3+y^3+1}\ge\frac{z}{x+y+z}.$$

$\frac{1}{x^3+y^3+1}=\frac{xyz}{x^3+y^3+xyz}\overset{SOS}{\ge}\frac{xyz}{xy(x+y)+xyz}=\frac{z}{x+y+z}$, cu egalitate pentru $x=y$.

$P=\sum\frac{1}{x^3+y^3+1}\overset{Lema}{\ge}\sum\frac{z}{x+y+z}=1.$

Deducem că MinP=1 pentru $(x,y,z)=(1,1,1)$.

Aplicația9.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=1$ then find Min of

$$P=\frac{a}{9b^2+1}+\frac{b}{9c^2+1}+\frac{c}{9a^2+1}.$$

Hoanghai Nguyen, Vietnam

Soluție

Lema.

If $a,b>0$ then

$$\frac{a}{9b^2+1}\ge a-\frac{3}{2}ab.$$

$$\frac{a}{9b^2+1}=a-\frac{9ab^2}{9b^2+1}\overset{SOS}{\geq}a-\frac{9ab^2}{6b}=a-\frac{3}{2}ab,$$

cu egalitate pentru $9b^2+1=6b \Leftrightarrow (3b-1)^2=0 \Leftrightarrow b=\frac{1}{3}$.

$$P=\sum\frac{a}{9b^2+1}\overset{Lema}{\geq}\sum\left(a-\frac{3}{2}ab\right)=\sum a-\frac{3}{2}\sum ab\overset{SOS}{\geq}\sum a-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2=1-\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

Deducem că MinP=$\frac{1}{2}$ pentru $(a,b,c)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda>0$ fixed. If $a,b,c>0$, $a+b+c=\frac{3}{\sqrt{\lambda}}$ then find Min of

$$P=\frac{a}{\lambda b^2+1}+\frac{b}{\lambda c^2+1}+\frac{c}{\lambda a^2+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema.

If $a,b,\lambda>0$ then

$$\frac{a}{\lambda b^2+1}\geq a-\frac{\sqrt{\lambda}}{2}ab.$$

$$\frac{a}{\lambda b^2+1}=a-\frac{\lambda ab^2}{\lambda b^2+1}\overset{SOS}{\geq}a-\frac{\lambda ab^2}{2\sqrt{\lambda}b}=a-\frac{\sqrt{\lambda}}{2}ab,$$

cu egalitate pentru $\lambda b^2+1=2\sqrt{\lambda}b \Leftrightarrow \left(\sqrt{\lambda}b-1\right)^2=0 \Leftrightarrow b=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

$$P=\sum\frac{a}{\lambda b^2+1}\overset{Lema}{\geq}\sum\left(a-\frac{\sqrt{\lambda}}{2}ab\right)=\sum a-\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\sum ab\overset{SOS}{\geq}\sum a-\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{\lambda}}-\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{3}{\sqrt{\lambda}}\right)^2=\frac{3}{2\sqrt{\lambda}}.$$

Deducem că Min P=$\frac{3}{2\sqrt{\lambda}}$ pentru $(a,b,c)=\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}},\frac{1}{\sqrt{\lambda}},\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$.

Aplicația10.

If $x,y,z>0$, $x^3+y^3+z^3=8$ then find Min of

$$A=\sum\frac{x^2+y^2}{xy(x+y)^3}.$$

Hoanghai Nguyen, Vietnam

Soluție

Lema

If $x,y,z>0$ then

$$\frac{x^2+y^2}{xy(x+y)^3}\geq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3+y^3}.$$

Avem $\frac{x^2+y^2}{xy(x+y)^3}\overset{CS}{\geq}\frac{\frac{(x+y)^2}{2}}{xy(x+y)^3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{xy(x+y)}\overset{SOS}{\geq}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3+y^3}$, cu egalitate pentru $x=y$.

$A=\sum\frac{x^2+y^2}{xy(x+y)^3}\overset{Lema}{\geq}\sum\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3+y^3}=\frac{1}{2}\sum\frac{1}{x^3+y^3}\overset{Lema}{\geq}\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{\sum(x^3+y^3)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2\sum x^3}=\frac{9}{4\cdot 8}=\frac{9}{32}$.

Deducem că Min A$=\frac{9}{32}$ pentru $(x,y,z)=\left(\frac{2}{\sqrt[3]{3}},\frac{2}{\sqrt[3]{3}},\frac{2}{\sqrt[3]{3}}\right)$.

Remarca.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda\geq 0$ fixed. If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx=1$ then find Min of

$$A=\sum\frac{x^2+\lambda y^2}{xy(x+\lambda y)^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $x,y,z>0$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\frac{x^2+\lambda y^2}{xy(x+\lambda y)^2}\geq\frac{1}{\lambda+1}\cdot\frac{1}{xy}.$$

Avem $\frac{x^2+\lambda y^2}{xy(x+\lambda y)^2}\overset{(1)}{\geq}\frac{\frac{(x+\lambda y)^2}{\lambda+1}}{xy(x+\lambda y)^2}=\frac{1}{\lambda+1}\cdot\frac{1}{xy}\overset{SOS}{\geq}\frac{1}{\lambda+1}\cdot\frac{1}{xy}$.

Am folosit (1): $x^2+\lambda y^2 \geq \frac{(x+\lambda y)^2}{\lambda+1} \Leftrightarrow \lambda(x-y)^2 \geq 0$, cu egalitate pentru $x=y$ sau $\lambda=0$.

$$A=\sum \frac{x^2+\lambda y^2}{xy(x+\lambda y)^2} \overset{Lema}{\geq} \sum \frac{1}{\lambda+1}\cdot\frac{1}{xy}=\frac{1}{\lambda+1}\sum\frac{1}{xy} \overset{CS}{\geq} \frac{1}{\lambda+1}\cdot\frac{9}{\sum xy}=\frac{1}{\lambda+1}\cdot\frac{9}{1}=\frac{9}{\lambda+1}.$$

Deducem că MinA$=\frac{9}{\lambda+1}$ pentru $(x,y,z)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Aplicația11.

If $x,y>0$,then find Min of

$$M=\left(3+\frac{4}{x}\right)\left(3+\frac{4}{y}\right)(x+y).$$

Amir Sofi, Kosovo

Soluție

Lema

Folosind inegalitatea mediilor obținem:

$$M=\left(3+\frac{4}{x}\right)\left(3+\frac{4}{y}\right)(x+y)\geq 2\sqrt{3\cdot\frac{4}{x}}\cdot 2\sqrt{3\cdot\frac{4}{y}}\cdot 2\sqrt{xy}=96,$$

cu egalitate pentru $3=\frac{4}{x}, 3=\frac{4}{y}, x=y \Leftrightarrow x=y=\frac{4}{3}$

Deducem că min M=96 pentru $(x,y)=\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $a,b>0$ fixed. If $x,y>0$,then find Min of

$$M=\left(a+\frac{b}{x}\right)\left(a+\frac{b}{y}\right)(x+y).$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

Folosind inegalitatea mediilor obținem:

$$M=\left(a+\frac{b}{x}\right)\left(a+\frac{b}{y}\right)(x+y)\geq 2\sqrt{a\cdot\frac{b}{x}}\cdot 2\sqrt{a\cdot\frac{b}{y}}\cdot 2\sqrt{xy}=8ab,$$

cu egalitate pentru $a=\frac{b}{x}, a=\frac{b}{y}, x=y \Leftrightarrow x=y=\frac{b}{a}$

Deducem că min M=8ab pentru $(x,y)=\left(\frac{b}{a},\frac{b}{a}\right)$.

Aplicația12.

If $a,b>0$, $a+b=1$then find Min of

$$P=\frac{1}{1+3ab+a^2}+\frac{1}{1+3ab+b^2}.$$

Hoanghai Nguyen, Vietnam

Soluție

$$P=\frac{1}{1+3ab+a^2}+\frac{1}{1+3ab+b^2}\overset{CS}{\geq}\frac{(1+1)^2}{\left(1+3ab+a^2\right)+\left(1+3ab+b^2\right)}=\frac{4}{2+6ab+a^2+b^2}=$$

$$=\frac{4}{2+4ab+(a+b)^2}\overset{AGM}{\geq}\frac{4}{2+(a+b)^2+(a+b)^2}=\frac{2}{1+(a+b)^2}=\frac{2}{1+1^2}=1.$$

Deducem că MinP=1pentru $(a,b)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Remarca.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda\geq 1$ fixed. If $a,b>0$, $a+b=1$then find Min of

$$P=\frac{1}{1+\lambda ab+a^2}+\frac{1}{1+\lambda ab+b^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$P=\frac{1}{1+\lambda ab+a^2}+\frac{1}{1+\lambda ab+b^2}\overset{CS}{\geq}\frac{(1+1)^2}{\left(1+\lambda ab+a^2\right)+\left(1+\lambda ab+b^2\right)}=\frac{4}{2+2\lambda ab+a^2+b^2}=$$

$$=\frac{4}{2+2(\lambda-1)ab+(a+b)^2}\overset{AGM}{\geq}\frac{4}{2+\frac{1}{2}(\lambda-1)(a+b)^2+(a+b)^2}=\frac{4}{2+\frac{1}{2}(\lambda-1)1^2+1^2}=\frac{8}{\lambda+5}.$$

Deducem că MinP=$\frac{8}{\lambda+5}$pentru $(a,b)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Aplicația13.

If $a,b>0$, $a+b=\sqrt{2}$ then find Min of

$$P=\frac{4}{a^2+b^2}+\frac{1}{ab}.$$

Pham Van Tuyen, Vietnam

Soluție

Folosind inegalitatea mediilor obținem:

$$P=\frac{4}{a^2+b^2}+\frac{1}{ab}=\frac{2(a+b)^2}{a^2+b^2}+\frac{(a+b)^2}{2ab}=2\left(1+\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)+\frac{a^2+b^2}{2ab}+1=2\left(1+\frac{1}{t}\right)+t+1=$$

$$=t+\frac{2}{t}+3\geq 2\sqrt{t\cdot\frac{2}{t}}+3=2\sqrt{2}+3,$$

cu egalitate pentru $t=\frac{2}{t}, t=\frac{a^2+b^2}{2ab}$ și $a+b=\sqrt{2} \Leftrightarrow ab=\sqrt{2}-1$ și $a+b=\sqrt{2}$, adică $(a,b)=\left(1,\sqrt{2}-1\right),(a,b)=\left(\sqrt{2}-1,1\right)$.

Deducem că MinP$=3+2\sqrt{2}$ pentru $(a,b)=\left(1,\sqrt{2}-1\right),(a,b)=\left(\sqrt{2}-1,1\right)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda>0$ fixed. If $a,b>0$, $a+b=\sqrt{3}$ then find Min of

$$P=\frac{6}{a^2+b^2}+\frac{1}{ab}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Folosind inegalitatea mediilor obținem:

$$P=\frac{6}{a^2+b^2}+\frac{1}{ab}=\frac{6(a+b)^2}{2(a^2+b^2)}+\frac{(a+b)^2}{2ab}=3\left(1+\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)+\frac{a^2+b^2}{2ab}+1=3\left(1+\frac{1}{t}\right)+t+1=$$

$$=t+\frac{3}{t}+4\geq 2\sqrt{t\cdot\frac{3}{t}}+4=2\sqrt{3}+4,$$

cu egalitate pentru $t=\frac{3}{t}, t=\frac{a^2+b^2}{2ab}$ și $a+b=\sqrt{3} \Leftrightarrow ab=\frac{3\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$ și $a+b=\sqrt{3}$, adică $(a,b)=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(2-\sqrt{2}+\sqrt{6}\right),\frac{\sqrt{3}}{4}\left(2+\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)\right),(a,b)=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(2+\sqrt{2}-\sqrt{6}\right),\frac{\sqrt{3}}{4}\left(2-\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\right)$.

Deducem că MinP=$4+2\sqrt{3}$ pentru $(a,b)=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(2-\sqrt{2}+\sqrt{6}\right),\frac{\sqrt{3}}{4}\left(2+\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)\right)$,

$(a,b)=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(2+\sqrt{2}-\sqrt{6}\right),\frac{\sqrt{3}}{4}\left(2-\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\right)$.

Aplicația14.

If $a,b,c>0$, $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}=1$ then find Max of

$$P=\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ca}+\frac{c}{c^2+ab}.$$

Hoanghai Nguyen, Vietnam

Soluție

Lema

If $a,b,c>0$ then

$$\frac{a}{a^2+bc}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

$$\frac{a}{a^2+bc}\overset{AM-GM}{\le}\frac{a}{2\sqrt{a^2\cdot bc}}=\frac{1}{2\sqrt{bc}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}\overset{AM-GM}{\le}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

cu egalitate pentru $a^2=bc$ și $b=c$, adică $a=b=c$.

$$P=\sum\frac{a}{a^2+bc}\overset{Lema}{\le}\sum\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{2}\sum\frac{1}{a}=\frac{1}{2}\frac{\sum ab}{abc}\overset{SOS}{\le}\frac{1}{2}\frac{\sum a^2}{abc}=\frac{1}{2}.$$

Deducem că MaxP=$\frac{1}{2}$ pentru $(a,b,c)=(3,3,3)$.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c>0$, $\frac{a^2}{b^2c^2}+\frac{b^2}{c^2a^2}+\frac{c^2}{a^2b^2}=1$ then find Max of

$$P=\frac{a}{a^3+2bc\sqrt{bc}}+\frac{b}{b^3+2ca\sqrt{ca}}+\frac{c}{c^3+2ab\sqrt{ab}}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $a,b,c>0$ then

$$\frac{a}{a^3+2bc\sqrt{bc}}\le\frac{1}{6}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

$$\frac{a}{a^3+2bc\sqrt{bc}}\overset{AM-GM}{\le}\frac{a}{3\sqrt[3]{a^3\cdot bc\sqrt{bc}\cdot bc\sqrt{bc}}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{b^3c^3}}=\frac{1}{3bc}\overset{AM-GM}{\le}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right),$$

cu egalitate pentru $a^3=bc\sqrt{bc}$ și $b=c$, adică $a=b=c$.

$$P=\sum\frac{a}{a^3+2bc\sqrt{bc}}\overset{Lema}{\le}\sum\frac{1}{6}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\frac{1}{3}\sum\frac{1}{a^2}=\frac{1}{2}\frac{\sum b^2c^2}{a^2b^2c^2}\overset{SOS}{\le}\frac{1}{2}\frac{\sum a^4}{a^2b^2c^2}=\frac{1}{2}.$$

Deducem că MaxP=$\frac{1}{2}$ pentru $(a,b,c)=\left(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$.

Aplicația15.

If $x,y>0$, $x+y+4xy=4x^2+4y^2$ then find Max of

$$P=20\left(x^3+y^3\right)-6\left(x^2+y^2\right)+2022.$$

Vinh Duy, Vietnam

Soluție

Lema

If $x,y>0$, $x+y+4xy=4x^2+4y^2$ then

$$x^3+y^3=\frac{1}{4}(x+y)^2,$$

$$x+y\le 1.$$

$$x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)=\frac{1}{4}(x+y)\left(4x^2-4xy+4y^2\right)=\frac{1}{4}(x+y)\cdot(x+y)=\frac{1}{4}(x+y)^2.$$

$$x+y+4xy=4x^2+4y^2\Leftrightarrow x+y+4xy=4(x+y)^2-8xy\Leftrightarrow x+y=4(x+y)^2-12xy.$$

Folosind $xy\le\frac{(x+y)^2}{4}$ și $x+y=4(x+y)^2-12xy$ obținem: $(x+y)^2\le x+y\Leftrightarrow x+y\le 1$.

$$P=20\left(x^3+y^3\right)-6\left(x^2+y^2\right)+2022=20\cdot\frac{1}{4}(x+y)^2-6\left(x^2+y^2\right)+2022=$$

$$=5(x+y)^2-6\left(x^2+y^2\right)+2022=-(x+y)^2+12xy+2022\le-(x+y)^2+12\cdot\frac{(x+y)^2}{4}+2022=$$

$$=2(x+y)^2+2022\le 2\cdot 1+2022=2024.$$

Deducem că Max P=2024 pentru $(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $n>0$, $\lambda>0$ fixed. If $x,y>0$, $x+y+nxy=nx^2+ny^2$ then find Max of

$$P=n\lambda\left(x^3+y^3\right)-(\lambda+1)\left(x^2+y^2\right)+\lambda.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție</u>

<u>Lema</u>

If $x,y>0$, $x+y+nxy=nx^2+ny^2$ then

$$x^3+y^3=\frac{1}{n}(x+y)^2,$$

$$x+y\le 1.$$

$$x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)=\frac{1}{n}(x+y)\left(nx^2-nxy+ny^2\right)=\frac{1}{n}(x+y)\cdot(x+y)=\frac{1}{n}(x+y)^2.$$

$$x+y+nxy=nx^2+ny^2 \Leftrightarrow x+y+nxy=n(x+y)^2-2nxy \Leftrightarrow x+y=4(x+y)^2-3nxy.$$

Folosind $xy\le\frac{(x+y)^2}{4}$ și $x+y=4(x+y)^2-3nxy$ obținem: $(16-3n)(x+y)^2\le 4(x+y) \Leftrightarrow$

$x+y\le\frac{4}{16-3n}$, cu egalitate pentru $x=y=\frac{2}{n}$.

$$P=n\lambda\left(x^3+y^3\right)-(\lambda+1)\left(x^2+y^2\right)+\lambda=n\lambda\cdot\frac{1}{n}(x+y)^2-(\lambda+1)\left(x^2+y^2\right)+\lambda=$$

$$=\lambda(x+y)^2-(\lambda+1)\left(x^2+y^2\right)+\lambda=-(x+y)^2+12xy+\lambda\le-(x+y)^2+12\cdot\frac{(x+y)^2}{4}+\lambda=$$

$$=2(x+y)^2+\lambda\le 2\cdot\left(\frac{4}{16-3n}\right)^2+\lambda.$$

Deducem că Max P$=2\cdot\left(\frac{4}{16-3n}\right)^2+\lambda$ pentru $(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

<u>Aplicația16.</u>

If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2=3$ then find Max of

$$P=\sum\frac{a}{a^2+2b+3}.$$

Tranh Linh, Vietnam

Soluție

Lema

If $a,b>0$ then

$$\frac{a}{a^2+2b+3}\le\frac{a}{2(a+b+1)}.$$

Avem $a^2+2b+3\ge 2(a+b+1)\Leftrightarrow(a-1)^2\ge 0$, cu egalitate pentru $a=1$.

Rezultă $\frac{a}{a^2+2b+3}\le\frac{a}{2(a+b+1)}$.

$$P=\sum\frac{a}{a^2+2b+3}\le\sum\frac{a}{2(a+b+1)}=\frac{1}{2}\sum\frac{a}{a+b+1}\overset{(1)}{\le}\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2},$$

unde (1) $\Leftrightarrow\sum\frac{a}{a+b+1}\le 1\Leftrightarrow\sum\frac{b+1}{a+b+1}\ge 2$, care rezultă din inegalitatea lui Bergstrom:

$$\sum\frac{b+1}{a+b+1}=\sum\frac{(b+1)^2}{(b+1)(a+b+1)}\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\sum(b+1)\right)^2}{\sum(b+1)(a+b+1)}=\frac{\left(\sum a+3\right)^2}{\sum a^2+\sum ab+3\sum a+3}=$$

$$=\frac{\sum a^2+2\sum ab+6\sum a+9}{\sum a^2+\sum ab+3\sum a+3}=\frac{3+2\sum ab+6\sum a+9}{3+\sum ab+3\sum a+3}=\frac{2\sum ab+6\sum a+12}{\sum ab+3\sum a+6}=2.$$

Deducem că Max P$=\frac{1}{2}$ pentru $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda>0$ fixed. If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2=3\lambda^2$ then find Max of

$$P=\sum\frac{a}{a^2+2\lambda b+\lambda(\lambda+2)}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $a,b>0$ then

$$\frac{a}{a^2+2\lambda b+\lambda(\lambda+2)}\le\frac{a}{2\lambda(a+b+1)}.$$

Avem $a^2+2\lambda b+\lambda(\lambda+2)\ge 2\lambda(a+b+1)\Leftrightarrow(a-\lambda)^2\ge 0$, cu egalitate pentru $a=\lambda$.

$$P=\sum\frac{a}{a^2+2\lambda b+\lambda(\lambda+2)}\le\sum\frac{a}{2\lambda(a+b+1)}=\frac{1}{2\lambda}\sum\frac{a}{a+b+1}\overset{(1)}{\le}\frac{1}{2\lambda}\cdot 1=\frac{1}{2\lambda},$$

unde (1) $\Leftrightarrow\sum\frac{a}{a+b+1}\le 1\Leftrightarrow\sum\frac{b+1}{a+b+1}\ge 2$, care rezultă din inegalitatea lui Bergstrom:

$$\sum\frac{b+1}{a+b+1}=\sum\frac{(b+1)^2}{(b+1)(a+b+1)}\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\sum(b+1)\right)^2}{\sum(b+1)(a+b+1)}=\frac{\left(\sum a+3\right)^2}{\sum a^2+\sum ab+3\sum a+3}=$$

$$=\frac{\sum a^2+2\sum ab+6\sum a+9}{\sum a^2+\sum ab+3\sum a+3}=\frac{3+2\sum ab+6\sum a+9}{3+\sum ab+3\sum a+3}=\frac{2\sum ab+6\sum a+12}{\sum ab+3\sum a+6}=2.$$

Deducem că Max P=$\frac{1}{2\lambda}$ pentru $(a,b,c)=(\lambda,\lambda,\lambda)$.

Aplicația17.

If $a,b>0$, $a+b+3ab=1$ then find Max of

$$P=\frac{6ab}{a+b}-a^2-b^2.$$

Doan Movic, Vietnam

Soluție

Lema

If $a,b>0$, $a+b+3ab=1$ then

$$\frac{ab}{a+b}\le\frac{1}{6}.$$

Din $a+b+3ab=1\Rightarrow a+b=1-3ab\overset{AGM}{\ge}1-\frac{3}{4}(a+b)^2\Rightarrow a+b\ge 1-\frac{3}{4}(a+b)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(a+b)^2+4(a+b)-4\ge 0\Leftrightarrow(a+b+2)(3(a+b)-2)\ge 0\Rightarrow a+b\ge\frac{2}{3}$, (1)

cu egalitate pentru $a=b=\frac{1}{3}$.

$$\frac{ab}{a+b}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3ab}{a+b}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-a-b}{a+b}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a+b}-1\right)\le\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}-1\right)=\frac{1}{6}.$$

$$P=6\frac{ab}{a+b}-a^2-b^2\overset{Lema}{\le}6\cdot\frac{1}{6}-\left(a^2+b^2\right)\overset{CS}{\le}1-\frac{1}{2}(a+b)^2\overset{(1)}{\le}1-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{7}{9}.$$

Deducem că MaxP=$\frac{7}{9}$ pentru $(a,b)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda>0$ fixed. If $a,b>0$, $a+b+\lambda ab=\frac{3}{\lambda}$ then find Max of

$$P=\frac{2\lambda ab}{a+b}-a^2-b^2.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $a,b>0$, $a+b+\lambda ab=\frac{3}{\lambda}$ then

$$\frac{ab}{a+b}\le\frac{1}{2\lambda}.$$

Din $a+b+\lambda ab=\frac{3}{\lambda}\Rightarrow a+b=\frac{3}{\lambda}-\lambda ab\overset{AGM}{\ge}\frac{3}{\lambda}-\frac{\lambda}{4}(a+b)^2\Rightarrow a+b\ge\frac{3}{\lambda}-\frac{\lambda}{4}(a+b)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\lambda^2(a+b)^2+4\lambda(a+b)-12\ge0\Leftrightarrow\left(a+b+\frac{6}{\lambda}\right)\left(a+b-\frac{2}{\lambda}\right)\ge0\Rightarrow a+b\ge\frac{2}{\lambda}$, (1)

cu egalitate pentru $a=b=\frac{1}{\lambda}$.

$$\frac{ab}{a+b}=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\lambda ab}{a+b}=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\frac{3}{\lambda}-a-b}{a+b}=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{3}{\lambda}\cdot\frac{1}{a+b}-1\right)\le\frac{1}{\lambda}\left(\frac{3}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{2}-1\right)=\frac{1}{2\lambda}.$$

$$P=2\lambda\frac{ab}{a+b}-a^2-b^2\overset{Lema}{\le}2\lambda\cdot\frac{1}{2\lambda}-\left(a^2+b^2\right)\overset{CS}{\le}1-\frac{1}{2}(a+b)^2\overset{(1)}{\le}1-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2=1-\frac{2}{\lambda^2}.$$

Deducem că MaxP=$1-\frac{2}{\lambda^2}$ pentru $(a,b)=\left(\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right)$.

Aplicația18.

If $x,y,z>0$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\sqrt{3}$ then find Min of

$$P=\frac{\sqrt{2x^2+y^2}}{xy}+\frac{\sqrt{2y^2+z^2}}{yz}+\frac{\sqrt{2z^2+x^2}}{zx}.$$

Ha Quoc Cuong, Vietnam

Soluție

Lema.

If $x, y > 0$ then

$$\frac{\sqrt{2x^2+y^2}}{xy} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right).$$

$$\frac{\sqrt{2x^2+y^2}}{xy} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right) \Leftrightarrow 3\left(2x^2+y^2\right) \geq (2x+y)^2 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0.$$

$$P = \sum \frac{\sqrt{2x^2+y^2}}{xy} \overset{Lema}{\geq} \sum \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum \frac{3}{x} = \sqrt{3}\sum \frac{1}{x} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 3.$$

Deducem că MinP=3 pentru $(x, y, z) = \left(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda \geq 0$ fixed. If $x, y, z > 0$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \sqrt{\lambda+1}$ then find Min of

$$P = \frac{\sqrt{\lambda x^2+y^2}}{xy} + \frac{\sqrt{\lambda y^2+z^2}}{yz} + \frac{\sqrt{\lambda z^2+x^2}}{zx}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Pentru $\lambda = 0$ obținem $P = 1$. În continuare vom lua $\lambda > 0$.

Lema.

If $x, y, \lambda > 0$ then

$$\frac{\sqrt{\lambda x^2+y^2}}{xy} \geq \frac{1}{\sqrt{\lambda+1}}\left(\frac{1}{x}+\frac{\lambda}{y}\right).$$

$$\frac{\sqrt{\lambda x^2+y^2}}{xy} \geq \frac{1}{\sqrt{\lambda+1}}\left(\frac{1}{x}+\frac{\lambda}{y}\right) \Leftrightarrow (\lambda+1)\left(\lambda x^2+y^2\right) \geq (\lambda x+y)^2 \Leftrightarrow \lambda(x-y)^2 \geq 0,$$

evident cu egalitate pentru $x = y$.

$$P = \sum \frac{\sqrt{\lambda x^2+y^2}}{xy} \overset{Lema}{\geq} \sum \frac{1}{\sqrt{\lambda+1}}\left(\frac{1}{x}+\frac{\lambda}{y}\right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda+1}}\sum \frac{\lambda+1}{x} = \sqrt{\lambda+1}\sum \frac{1}{x} = \sqrt{\lambda+1}\cdot\sqrt{\lambda+1} =$$

$$= \lambda+1.$$

Deducem că MinP $= \lambda+1$ pentru $(x, y, z) = \left(\sqrt{\lambda+1}, \sqrt{\lambda+1}, \sqrt{\lambda+1}\right)$.

Aplicația19.

If $x, y > 0$, $x + y = 1$then find Min of

$$P = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Pham Van Tuyen, Vietnam

Soluție

Lema.

If $0 < x < 1$then

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \geq \frac{8x-1}{3\sqrt{3}}.$$

Folosim Tangent Line Method pentru funcția $f:(0,1) \to \mathbf{R}$ $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ în $x_0 = \frac{1}{2}$.

Ecuația tangentei în punctul $x_0 = \frac{1}{2}$ este $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Avem $f'(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{3\sqrt{3}}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ecuația tangentei în punctul $x_0 = \frac{1}{2}$ este $y - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{8}{3\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = \frac{8x-1}{3\sqrt{3}}$.

Arătăm că:

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \geq \frac{8x-1}{3\sqrt{3}}$. Dacă $8x - 1 \leq 0$ inegalitatea este evidentă.

Dacă $8x - 1 > 0$, prin ridicare la pătrat inegalitatea este echivalentă cu:

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \geq \frac{8x-1}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{x^2}{1-x^2} \geq \frac{(8x-1)^2}{27} \Leftrightarrow 27x^2 \geq (8x-1)^2(1-x^2) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 64x^4 - 16x^3 - 36x^2 + 16x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2(16x^2 + 12x - 1) \geq 0$,adevărată pentru $x > \frac{1}{8}$,

cu egalitate pentru $x = \frac{1}{2}$.

$$P = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \overset{Lema}{\geq} \frac{8x-1}{3\sqrt{3}} + \frac{8y-1}{3\sqrt{3}} = \frac{8(x+y)-2}{3\sqrt{3}} = \frac{8\cdot 1-2}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Deducem că MinP=$\frac{2}{\sqrt{3}}$ pentru $(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Problema se poate dezvolta.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=\frac{3}{2}$ then find Min of

$$P=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție</u>

<u>Lema.</u>

If $0<x<1$ then

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\geq\frac{8x-1}{3\sqrt{3}}.$$

Folosim Tangent Line Method pentru funcția $f:(0,1)\to\mathbf{R}$ $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ în $x_0=\frac{1}{2}$.

Ecuația tangentei în punctul $x_0=\frac{1}{2}$ este $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

Avem $f'(x)=\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{8}{3\sqrt{3}}$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ecuația tangentei în punctul $x_0=\frac{1}{2}$ este $y-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{8}{3\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow y=\frac{8x-1}{3\sqrt{3}}$.

Arătăm că:

$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\geq\frac{8x-1}{3\sqrt{3}}$. Dacă $8x-1\leq 0$ inegalitatea este evidentă.

Dacă $8x-1>0$, prin ridicare la pătrat inegalitatea este echivalentă cu:

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\geq\frac{8x-1}{3\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{x^2}{1-x^2}\geq\frac{(8x-1)^2}{27}\Leftrightarrow 27x^2\geq(8x-1)^2\left(1-x^2\right)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 64x^4-16x^3-36x^2+16x-1\geq 0\Leftrightarrow(2x-1)^2\left(16x^2+12x-1\right)\geq 0$, adevărată pentru $x>\frac{1}{8}$,

cu egalitate pentru $x=\frac{1}{2}$.

$$P=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\overset{Lema}{\geq}\frac{8x-1}{3\sqrt{3}}+\frac{8y-1}{3\sqrt{3}}+\frac{8z-1}{3\sqrt{3}}=\frac{8(x+y+z)-3}{3\sqrt{3}}=\frac{8\cdot\frac{3}{2}-3}{3\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

Deducem că MinP=$\sqrt{3}$ pentru $(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Aplicația20.

If $a,b>0$, $a+b=2$ then find Max of

$$P=a\sqrt{4+b^2}+b\sqrt{4+a^2}.$$

Tran Nam, Vietnam

Soluție

Lema

If $x>0$ then

$$\sqrt{4+x^2}\leq\frac{9+x^2}{2\sqrt{5}}.$$

Avem $\sqrt{4+x^2}\leq\frac{9+x^2}{2\sqrt{5}}\Leftrightarrow 2\sqrt{5}\sqrt{4+x^2}\leq 9+x^2\Leftrightarrow 20\left(4+x^2\right)\leq\left(9+x^2\right)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^4-2x^2+1\geq 0\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)^2\geq 0$, evident cu egalitate pentru $x=1$.

$$P=a\sqrt{4+b^2}+b\sqrt{4+a^2}\overset{Lema}{\leq}a\frac{9+b^2}{2\sqrt{5}}+b\frac{9+a^2}{2\sqrt{5}}=\frac{9(a+b)+ab(a+b)}{2\sqrt{5}}=\frac{9\cdot 2+ab\cdot 2}{2\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{9+ab}{\sqrt{5}}\overset{AGM}{\leq}\frac{9+\frac{(a+b)^2}{4}}{\sqrt{5}}=\frac{9+\frac{2^2}{4}}{\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}.$$

Deducem că MaxP=$2\sqrt{5}$ pentru $(a,b)=(1,1)$.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b>0$, $a^3+b^3+c^3=3$ then find Max of

$$P=a\sqrt{4+b^2}+b\sqrt{4+c^2}+c\sqrt{4+a^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $x>0$ then

$$\sqrt{4+x^2} \le \frac{9+x^2}{2\sqrt{5}}.$$

Avem $\sqrt{4+x^2} \le \frac{9+x^2}{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow 2\sqrt{5}\sqrt{4+x^2} \le 9+x^2 \Leftrightarrow 20\left(4+x^2\right) \le \left(9+x^2\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 \ge 0 \Leftrightarrow \left(x^2-1\right)^2 \ge 0$, evident cu egalitate pentru $x=1$.

$$P = a\sqrt{4+b^2} + b\sqrt{4+c^2} + c\sqrt{4+a^2} \overset{Lema}{\le} a\frac{9+b^2}{2\sqrt{5}} + b\frac{9+c^2}{2\sqrt{5}} + c\frac{9+a^2}{2\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{9(a+b+c)+ab^2+bc^2+ca^2}{2\sqrt{5}} \le \frac{9(a+b+c)+a^3+b^3+c^3}{2\sqrt{5}} \le \frac{9\cdot 3+3}{2\sqrt{5}} = \frac{30}{2\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}.$$

Deducem că MaxP=$3\sqrt{5}$ pentru $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Aplicația21.

If $a,b,c>0$ then find Min of

$$P = \sum \frac{a^2+1}{b+c}.$$

Pham Van Tuyen, Vietnam

Soluție

Avem $P = \sum \frac{a^2+1}{b+c} \overset{AGM}{\ge} 3\sqrt[3]{\prod \frac{a^2+1}{b+c}} = 3\sqrt[3]{\frac{\prod\left(a^2+1\right)}{\prod(b+c)}} \overset{(1)}{\ge} 3,$

unde (1) $\Leftrightarrow \prod\left(a^2+1\right) \ge \prod(b+c)$, care rezultă din $\left(a^2+1\right)\left(1+b^2\right) \overset{CBS}{\ge} (a+b)^2$,

cu egalitate pentru $ab=1$ și analoagele.

Deducem că MinP=3 pentru $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Aplicația22.

If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx \ge 3$ then find Min of

$$P = \sum \frac{x^3}{\sqrt{y^2+3}}.$$

Hoanghai Nguyen, Vietnam

Soluție

$$P=\sum\frac{x^3}{\sqrt{y^2+3}}=\sum\frac{x^3}{\sqrt{y^2+xy+yz+zx}}=\sum\frac{x^3}{\sqrt{(y+x)(y+z)}}\geq\sum\frac{x^3}{\frac{(y+x)+(y+z)}{2}}=$$

$$=2\sum\frac{x^3}{x+2y+z}\overset{Holder}{\geq}2\frac{\left(\sum x\right)^3}{3\sum(x+2y+z)}=2\frac{\left(\sum x\right)^3}{3\cdot 4\sum x}=\frac{\left(\sum x\right)^2}{6}\overset{SOS}{\geq}\frac{3\sum xy}{6}\geq\frac{3}{2}.$$

Problema se poate dezvolta.

If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx\geq 3$, and $n\in\mathbf{N}^*$ then find Min of

$$P=\sum\frac{x^{2n+1}}{\sqrt{y^2+3}}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$P=\sum\frac{x^{2n+1}}{\sqrt{y^2+3}}=\sum\frac{x^{2n+1}}{\sqrt{y^2+xy+yz+zx}}=\sum\frac{x^{2n+1}}{\sqrt{(y+x)(y+z)}}\geq\sum\frac{x^{2n+1}}{\frac{(y+x)+(y+z)}{2}}=$$

$$=2\sum\frac{x^5}{x+2y+z}\overset{Holder}{\geq}2\frac{\left(\sum x\right)^{2n+1}}{3^{2n-1}\sum(x+2y+z)}=2\frac{\left(\sum x\right)^{2n+1}}{3^{2n-1}\cdot 4\sum x}=\frac{\left(\sum x\right)^{2n}}{2\cdot 3^{2n-1}}\overset{SOS}{\geq}\frac{\left(3\sum xy\right)^n}{2\cdot 3^{2n-1}}\geq$$

$$\geq\frac{(3\cdot 3)^n}{2\cdot 3^{2n-1}}=\frac{3}{2}.$$

Deducem că minP=$\frac{3}{2}$ pentru $(x,y,z)=(1,1,1)$.

Aplicația23.

If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2\leq abc$ then find max of

$$M=\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ca}+\frac{c}{c^2+ab}.$$

Hoanghai Nguyen, Vietnam

Soluție

$$M=\sum\frac{a}{a^2+bc}\overset{AGM}{\leq}\sum\frac{a}{2\sqrt{a^2\cdot bc}}=\frac{1}{2}\sum\sqrt{\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}\overset{AGM}{\leq}\frac{1}{4}\sum\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{2}\sum\frac{1}{a}\overset{Lema}{\leq}\frac{1}{2}.$$

Lema

If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2\leq abc$ then

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 1.$$

Cu inegalitatea mediilor avem: $\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\ge 2\sqrt{\frac{b}{ca}\cdot\frac{c}{ab}}=\frac{2}{a}$ și analoagele.

Adunând cele trei inegalități rezultă: $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Obținem $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}=\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}\le 1$.

Deducem că maxM=$\frac{1}{2}$ pentru $(a,b,c)=(3,3,3)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda\ge 0$ fixed. If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2\le abc$ then find max of

$$M=\frac{b+\lambda c}{a^2+bc}+\frac{c+\lambda a}{b^2+ca}+\frac{a+\lambda b}{c^2+ab}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$M=\sum\frac{b+\lambda c}{a^2+bc}\overset{AGM}{\le}\sum\frac{b+\lambda c}{2\sqrt{a^2\cdot bc}}=\sum\frac{b+\lambda c}{a}\sqrt{\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}\overset{AGM}{\le}\frac{1}{4}\sum\frac{b+\lambda c}{a}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left((\lambda+1)\sum\frac{1}{a}+\sum\frac{b^2+\lambda c^2}{abc}\right)=\frac{1}{4}\left((\lambda+1)\sum\frac{1}{a}+(\lambda+1)\sum\frac{a^2}{abc}\right)\overset{Lema+Ipoteza}{\le}$$

$$\overset{Lema+Ipoteza}{\le}\frac{1}{4}\left((\lambda+1)\cdot 1+(\lambda+1)\cdot 1\right)=\frac{\lambda+1}{2}.$$

Lema

If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2\le abc$ then

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 1.$$

Cu inegalitatea mediilor avem: $\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\ge 2\sqrt{\frac{b}{ca}\cdot\frac{c}{ab}}=\frac{2}{a}$ și analoagele.

Adunând cele trei inegalități rezultă: $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Obținem $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}=\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}\leq 1$.

Deducem că maxM$=\frac{\lambda+1}{2}$ pentru $(a,b,c)=(3,3,3)$.

Aplicația24.

If $x,y>0$, $2x+3y\leq 2$ then find Min of

$$A=\frac{4}{4x^2+9y^2}+\frac{4}{xy}.$$

Hoanghai Nguyen, Vietnam

Soluție

Lema

If $x,y>0$, $2x+3y\leq 2$ then

$$xy\leq\frac{1}{6}.$$

$2\geq 2x+3y\overset{AGM}{\geq}2\sqrt{2x\cdot 3y}\Rightarrow 2\geq 2\sqrt{2x\cdot 3y}\Rightarrow xy\leq\frac{1}{6}$, cu egalitate pentru $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}$.

$$A=\frac{4}{4x^2+9y^2}+\frac{4}{xy}=\frac{4}{4x^2+9y^2}+\left(\frac{4}{12xy}+\frac{26}{3xy}\right)=4\left(\frac{1}{4x^2+9y^2}+\frac{1}{12xy}\right)+\frac{26}{3xy}\overset{CS}{\geq}$$

Deducem că MinA=56 pentru $(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $a,b,\lambda>0, ab\geq\frac{1}{2}$ fixed. If $x,y>0$, $ax+by\leq 2$ then find Min of

$$A=\frac{\lambda}{a^2x^2+b^2y^2}+\frac{1}{xy}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $a,b,x,y>0$ then

$$xy\leq\frac{1}{ab}.$$

$2 \geq ax+by \overset{AGM}{\geq} 2\sqrt{ax\cdot by} \Rightarrow 2 \geq 2\sqrt{ax\cdot by} \Rightarrow xy \leq \frac{1}{ab}$, cu egalitate pentru $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}$.

$$A=\frac{\lambda}{a^2x^2+b^2y^2}+\frac{1}{xy}=\frac{\lambda}{a^2x^2+b^2y^2}+\left(\frac{\lambda}{2abxy}+\frac{2ab-\lambda}{2abxy}\right)=\left(\frac{\lambda}{a^2x^2+b^2y^2}+\frac{\lambda}{2abxy}\right)+\frac{2ab-\lambda}{2abxy}\overset{CS}{\geq}$$

$$\overset{CS}{\geq}\frac{\lambda(1+1)^2}{a^2x^2+b^2y^2+2abxy}+\frac{2ab-\lambda}{2abxy}=\frac{4\lambda}{(ax+by)^2}+\frac{2ab-\lambda}{2abxy}\overset{Lema}{\geq}\frac{4\lambda}{2^2}+\frac{2ab-\lambda}{2ab\cdot\frac{1}{ab}}=\lambda+\frac{2ab-\lambda}{2}=$$

$$=\frac{2ab+\lambda}{2}.$$

Deducem că MinA$=\frac{2ab+\lambda}{2}$ pentru $(x,y)=\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)$.

<u>Aplicația25</u>

If $x,y>0$, $x+y=1$ then find Min of

$$A=\frac{2}{xy}+\frac{3}{x^2+y^2}.$$

Van Luan Nguyen, Vietnam

<u>Soluție</u>

$$A=\frac{2}{xy}+\frac{3}{x^2+y^2}=\left(\frac{1}{2xy}+\frac{3}{2xy}\right)+\frac{3}{x^2+y^2}=\frac{1}{2xy}+3\left(\frac{1}{2xy}+\frac{1}{x^2+y^2}\right)\overset{SOS}{\geq}$$

$$\overset{SOS}{\geq}\frac{2}{(x+y)^2}+3\left(\frac{1}{2xy}+\frac{1}{x^2+y^2}\right)\overset{CS}{\geq}\frac{2}{1}+3\cdot\frac{(1+1)^2}{2xy+x^2+y^2}=2+3\cdot\frac{4}{(x+y)^2}=2+3\cdot\frac{4}{1}=14.$$

Deducem că MinA=14pentru $(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $2n \geq k > 0$ fixed. If $x,y>0$, $x+y=1$ then find Min of

$$A=\frac{n}{xy}+\frac{k}{x^2+y^2}.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție</u>

$$A=\frac{n}{xy}+\frac{k}{x^2+y^2}=\left(\frac{2n-k}{2xy}+\frac{k}{2xy}\right)+\frac{k}{x^2+y^2}=\frac{2n-k}{2xy}+k\left(\frac{1}{2xy}+\frac{1}{x^2+y^2}\right)\overset{SOS}{\geq}$$

$$\overset{SOS}{\geq}\frac{2(2n-k)}{(x+y)^2}+k\left(\frac{1}{2xy}+\frac{1}{x^2+y^2}\right)\overset{CS}{\geq}\frac{2(2n-k)}{1}+k\cdot\frac{(1+1)^2}{2xy+x^2+y^2}=2(2n-k)+k\cdot\frac{4}{(x+y)^2}=$$

$$=2(2n-k)+k\cdot\frac{4}{1}=4n+2k.$$

Deducem că MinA= $4n+2k$ pentru $(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Aplicația26.

If $x,y,z>0$, $xyz=1$ then find max of

$$P=\frac{1}{x^3+2y^3+3}+\frac{1}{y^3+2z^3+3}+\frac{1}{z^3+2x^3+3}.$$

Pham Van Tuyen, Vietnam

Soluție

Cu substituția $(x^3,y^3,z^3)=(a^2,b^2,c^2)$ și $xyz=1$ avem $abc=1$.

Problema se reformulează:

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then find max of

$$P=\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3}.$$

Lema

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$a^2+2b^2+3\geq 2(ab+b+1).$$

Avem $a^2+2b^2+3\geq 2(ab+b+1)\Leftrightarrow(a-b)^2+(b-1)^2\geq 0$, cu egalitate pentru $a=b=1$.

Folosind **Lema** obținem:

$$P=\sum\frac{1}{a^2+2b^2+3}\overset{Lema}{\leq}\frac{1}{2}\sum\frac{1}{ab+b+1}=\frac{1}{2}.$$

Deducem că maxP= $\frac{1}{2}$ pentru $(a,b,c)=(1,1,1)\Leftrightarrow(x,y,z)=(1,1,1)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $n\in\mathbf{N}^*$ fixed. If $x,y,z>0$, $xyz=1$ then find max of

$$P=\frac{1}{x^n+2y^n+3}+\frac{1}{y^n+2z^n+3}+\frac{1}{z^n+2x^n+3}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Cu substituția $\left(x^n,y^n,z^n\right)=\left(a^2,b^2,c^2\right)$ și $xyz=1$ avem $abc=1$.

Problema se reformulează:

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then find max of

$$P=\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3}.$$

Lema

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$a^2+2b^2+3\geq 2\left(ab+b+1\right).$$

Avem $a^2+2b^2+3\geq 2\left(ab+b+1\right)\Leftrightarrow\left(a-b\right)^2+\left(b-1\right)^2\geq 0$, cu egalitate pentru $a=b=1$.

Folosind **Lema** obținem:

$$P=\sum\frac{1}{a^2+2b^2+3}\overset{Lema}{\leq}\frac{1}{2}\sum\frac{1}{ab+b+1}=\frac{1}{2}.$$

Deducem că maxP=$\frac{1}{2}$ pentru $\left(a,b,c\right)=\left(1,1,1\right)\Leftrightarrow\left(x,y,z\right)=\left(1,1,1\right)$.

Aplicația27.

If $x,y\geq 0$, $x+y\leq 1$ then find max of

$$P=\sqrt{1+4x^2}+\sqrt{1+4y^2}+4\sqrt{x}+4\sqrt{y}.$$

Pham Van Tuyen, Vietnam

Soluție

Lema

If $x,y\geq 0$, $x+y\leq 1$ then

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leq\frac{1}{2}\sqrt{6+8xy}.$$

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2=x+y+2\sqrt{xy}=x+y+2\sqrt{xy}\overset{AGM}{\leq}x+y+2\cdot\left(xy+\frac{1}{4}\right)\leq 1+2xy+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+2xy.$$

Rezultă că $\sqrt{x}+\sqrt{y}\le\sqrt{\frac{3}{2}+2xy}=\frac{1}{2}\sqrt{6+8xy}$, cu egalitate pentru $x+y=1$ și $xy=\frac{1}{4}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$.

Folosind **Lema** obținem:

$$P=\sqrt{1+4x^2}+\sqrt{1+4y^2}+4\sqrt{x}+4\sqrt{y}\overset{Lema}{\le}\sqrt{1+4x^2}+\sqrt{1+4y^2}+4\sqrt{6+8xy}\overset{CBS}{\le}$$

$$\overset{CBS}{\le}\sqrt{\left(1^2+1^2+2^2\right)\left(1+4x^2+1+4y^2+6+8xy\right)}=\sqrt{6\left(8+4\left(x^2+y^2+2xy\right)\right)}=$$

$$=\sqrt{6\left(8+4\left(x+y\right)^2\right)}\le\sqrt{6\left(8+4\cdot1^2\right)}=\sqrt{6\cdot12}=6\sqrt{2}.$$

Deducem că maxP=$6\sqrt{2}$ pentru $(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Aplicația28.

If $a,b\ge0$, $a+b=2$ then Min-Max of

$$P=\sqrt{a^2+2b}+\sqrt{b^2+2a}+2\sqrt{4+ab}$$

Pham Van Tuyen, Vietnam

Soluție

Avem $a^2+2b=a^2+(a+b)b=a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab=4-ab$.

Analog $b^2+2a=b^2+(a+b)a=b^2+ab+a^2=(a+b)^2-ab=4-ab$.

Notând $ab=t$ avem $0\le t=ab\le\frac{(a+b)^2}{4}=1$.

Problema se reformulează:

If $0\le t\le1$ then Min-Max of

$$P=2\left(\sqrt{4-t}+\sqrt{4+t}\right).$$

Considerăm funcția $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}$.

Avem $f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{4-x}}+\frac{1}{2\sqrt{4+x}}$, cu $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

Din tabelul de variație al funcției avem $f(0)=4$, $f(1)=\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $f'(x)\le0,\forall x\in[0,1]\Rightarrow$

$\Rightarrow f\downarrow,\forall x\in[0,1]$.

Obținem că $\sqrt{3}+\sqrt{5}\le f(x)\le 4\ \forall x\in[0,1]$, deci $2\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\le P\le 8$.

Revenind la problema din enunț deducem că $\min P=2\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$ pentru $(a,b)=(1,1)$ și

$\max P=8$ pentru $(a,b)=(2,0)$,$(a,b)=(0,2)$.

<u>Remarca</u>

Let $\lambda>0$ fixed. If $a,b\ge 0$, $a+b=\lambda$ then Min-Max of

$$P=\sqrt{a^2+\lambda b}+\sqrt{b^2+\lambda a}+2\sqrt{\lambda^2+ab}$$

Marin Chirciu

<u>Soluție</u>

Avem $a^2+\lambda b=a^2+(a+b)b=a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab=\lambda^2-ab$.

Analog $b^2+\lambda a=b^2+(a+b)a=b^2+ab+a^2=(a+b)^2-ab=\lambda^2-ab$.

Notând $ab=t$ avem $0\le t=ab\le\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{\lambda^2}{4}$.

Problema se reformulează:

If $0\le t\le\frac{\lambda^2}{4}$ then Min-Max of

$$P=2\left(\sqrt{\lambda^2-t}+\sqrt{\lambda^2+t}\right).$$

Considerăm funcția $f:\left[0,\frac{\lambda^2}{4}\right]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{\lambda^2-x}+\sqrt{\lambda^2+x}$.

Avem $f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{\lambda^2-x}}+\frac{1}{2\sqrt{\lambda^2+x}}$, cu $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

Din tabelul de variație al funcției avem $f(0)=2\lambda$, $f(1)=\frac{\lambda}{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$, $f'(x)\le 0$, $\forall x\in[0,1]\Rightarrow$

$\Rightarrow f\downarrow, \forall x\in[0,1]$.

Obținem că $\frac{\lambda}{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\le f(x)\le 2\lambda\ \ \forall x\in[0,1]$, deci $\lambda\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\le P\le 4\lambda$.

Revenind la problema din enunț deducem că $\min P=\lambda\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$ pentru $(a,b)=\left(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2}\right)$ și

$\max P=4\lambda$ pentru $(a,b)=(\lambda,0)$,$(a,b)=(0,\lambda)$.

<u>Aplicația29.</u>

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then find Min of

$$P=abc+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2.$$

Biswajt Ghosh

<u>Soluție</u>

<u>Principiul lui Dirichlet:</u>

Din trei numere pozitive a,b,c există cel puțin două numere care sunt situate de aceeași parte a lui 1. Fie b,c numerele, deci $(b-1)(c-1)\geq 0$.

Folosind principiul lui Dirichlet obținem:

$$P=abc+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=abc+a^2-2a+1+(b-1)^2+(c-1)^2=$$

$$=a(bc+a-2)+1+(b-1)^2+(c-1)^2=a(bc+3-b-c-2)+1+(b-1)^2+(c-1)^2=$$

$$=a(bc-b-c+1)+1+(b-1)^2+(c-1)^2=a(b-1)(c-1)+(b-1)^2+(c-1)^2+1\geq 1.$$

Deducem că: $\min P=1$ pentru $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda\geq 0$ fixed. If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then find Min of

$$P=abc+(a-1)^2+\lambda(b-1)^2+(c-1)^2.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție</u>

Folosind principiul lui Dirichlet obținem:

$$P=abc+(a-1)^2+\lambda(b-1)^2+\lambda(c-1)^2=abc+a^2-2a+1+\lambda(b-1)^2+\lambda(c-1)^2=$$

$$=a(bc+a-2)+1+\lambda(b-1)^2+\lambda(c-1)^2=a(bc+3-b-c-2)+1+\lambda(b-1)^2+\lambda(c-1)^2=$$

$$=a(bc-b-c+1)+1+\lambda(b-1)^2+\lambda(c-1)^2=a(b-1)(c-1)+\lambda(b-1)^2+\lambda(c-1)^2+1\geq 1.$$

Deducem că: $\min P=1$ pentru $(a,b,c)=(1,1,1)$.

<u>Aplicația30.</u>

If $a,b,c>0$, $a+b+c=1$ then find Min of

$$M=27\left(a^2+b^2+c^2\right)+108abc.$$

Pham Van Tuyen, Vietnam

Soluție

Lema

If $a,b,c>0$, $a+b+c=1$ then

$$9abc \geq 4\sum bc-1.$$

Folosind inegalitatea lui Schur $a^3+b^3+c^3+3abc \geq \sum bc(b+c)$ sub forma echivalentă:

$abc \geq \prod(b+c-a)$ obținem

$abc \geq \prod(b+c-a) \overset{a+b+c=1}{\Leftrightarrow} abc \geq \prod(1-2a) \Leftrightarrow abc \geq 4\sum bc-2\sum a-8abc+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9abc \geq 4\sum bc-2\cdot 1+1 \Leftrightarrow 9abc \geq 4\sum bc-1$, cu egalitate pentru $a=b=c=1$.

$M=27(a^2+b^2+c^2)+108abc \overset{Lema}{\geq} 27(a^2+b^2+c^2)+108\cdot\dfrac{4\sum bc-1}{9}=$

$=27(a^2+b^2+c^2)+12\cdot(4\sum bc-1)=27\left(\left(\sum a\right)^2-2\sum bc\right)+48\sum bc-12=$

$=27(1-2\sum bc)+48\sum bc-12=15-6\sum bc \overset{(1)}{\geq} 13$,

unde (1) $\Leftrightarrow 15-6\sum bc \geq 13 \Leftrightarrow 1 \geq 3\sum bc \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 3\sum bc \Leftrightarrow \sum(b-c) \geq 0$.

Rezultă că $M=27(a^2+b^2+c^2)+108abc \geq 13$, cu egalitate pentru $a=b=c=1$.

Deducem că: $\min M=13$ pentru $(a,b,c)=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda \geq \dfrac{2}{9}$ fixed. If $a,b,c>0$, $a+b+c=1$ then find Min of

$$M=\lambda(a^2+b^2+c^2)+abc.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $a,b,c>0$, $a+b+c=1$ then

$$9abc \geq 4\sum bc-1.$$

Folosind inegalitatea lui Schur $a^3+b^3+c^3+3abc \geq \sum bc(b+c)$ sub forma echivalentă:

$abc \geq \prod(b+c-a)$ obținem

$$abc \geq \prod(b+c-a) \overset{a+b+c=1}{\Leftrightarrow} abc \geq \prod(1-2a) \Leftrightarrow abc \geq 4\sum bc - 2\sum a - 8abc + 1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 9abc \geq 4\sum bc - 2\cdot 1 + 1 \Leftrightarrow 9abc \geq 4\sum bc - 1$, cu egalitate pentru $a=b=c=1$.

$$M = \lambda\left(a^2+b^2+c^2\right) + abc \overset{Lema}{\geq} \lambda\left(a^2+b^2+c^2\right) + \frac{4\sum bc - 1}{9} =$$

$$= \lambda\left(a^2+b^2+c^2\right) + \frac{1}{9}\cdot\left(4\sum bc - 1\right) = \lambda\left(\left(\sum a\right)^2 - 2\sum bc\right) + \frac{4}{9}\cdot\sum bc - \frac{1}{9} =$$

$$= \lambda\left(1 - 2\sum bc\right) + \frac{4}{9}\cdot\sum bc - \frac{1}{9} = \lambda - 2\lambda\sum bc + \frac{4}{9}\cdot\sum bc - \frac{1}{9} =$$

$$= \lambda - \frac{1}{9} + \left(\frac{4}{9} - 2\lambda\right)\sum bc \overset{(1)}{\geq} \frac{9\lambda+1}{27} \Leftrightarrow 1 \geq 3\sum bc \Leftrightarrow$$

unde (1) $\Leftrightarrow \lambda - \frac{1}{9} + \left(\frac{4}{9} - 2\lambda\right)\sum bc \geq \frac{9\lambda+1}{27} \Leftrightarrow (18\lambda - 4) \geq 3(18\lambda - 4)\sum bc$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 3\sum bc \Leftrightarrow \sum(b-c) \geq 0.$$

Rezultă că $M = \lambda\left(a^2+b^2+c^2\right) + abc \geq \frac{9\lambda+1}{27}$, cu egalitate pentru $a=b=c=1$.

Deducem că: $\min M = \frac{9\lambda+1}{27}$ pentru $(a,b,c) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Aplicația31.

If $a,b,c > 0$, $a+b+c = 2022$ then find Max value of

$$P = \sum \frac{bc}{a+2022}.$$

Hoang Le, Vietnam

Soluție

Lema

If $a,b,c > 0$ then

$$\frac{bc}{a+2022} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{a+c}\right).$$

$$\frac{bc}{a+2022} \overset{AGM}{\leq} \frac{bc}{a+(a+b+c)} = \frac{bc}{(a+b)+(a+c)} \overset{CS}{\leq} \frac{bc}{4}\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{a+c}\right).$$

$$P=\sum\frac{bc}{a+2022}\overset{Lema}{\leq}\frac{1}{4}\sum\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}\right)=\frac{1}{4}\sum\left(\frac{ab}{b+c}+\frac{ac}{b+c}\right)=\frac{1}{4}\sum a=\frac{1}{4}\cdot 2022=\frac{1011}{2}.$$

Deducem că max $P=\frac{1011}{2}$ 1pentru $(a,b,c)=\left(\frac{2022}{3},\frac{2022}{3},\frac{2022}{3}\right)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda>0$ fixed. If $a,b,c>0$, $a+b+c=\lambda$ then find Max value of

$$P=\sum\frac{bc}{a+\lambda}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $a,b,c,\lambda>0$ then

$$\frac{bc}{a+\lambda}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}\right).$$

$$\frac{bc}{a+\lambda}\overset{AGM}{\leq}\frac{bc}{a+(a+b+c)}=\frac{bc}{(a+b)+(a+c)}\overset{CS}{\leq}\frac{bc}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}\right).$$

$$P=\sum\frac{bc}{a+\lambda}\overset{Lema}{\leq}\frac{1}{4}\sum\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}\right)=\frac{1}{4}\sum\left(\frac{ab}{b+c}+\frac{ac}{b+c}\right)=\frac{1}{4}\sum a=\frac{1}{4}\cdot\lambda=\frac{\lambda}{4}.$$

Deducem că max $P=\frac{\lambda}{4}$ 1pentru $(a,b,c)=\left(\frac{\lambda}{3},\frac{\lambda}{3},\frac{\lambda}{3}\right)$.

Aplicația32.

If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2=abc$ then find Max value of

$$P=\sum\frac{b+c}{a^2+bc}.$$

Nguyen Thuong, Vietnam

Soluție

Lema

If $a,b,c>0$ then

$$\frac{b+c}{a^2+bc}\leq\frac{b^2+c^2}{2abc}.$$

$$\frac{b+c}{a^2+bc} \overset{AGM}{\leq} \frac{b+c}{2\sqrt{a^2\cdot bc}} = \frac{b+c}{2a\sqrt{bc}} \overset{AGM}{\leq} \frac{(b+c)^2}{4abc} \overset{CS}{\leq} \frac{b^2+c^2}{2abc}$$,cu egalitate pentru $b=c$.

$$P=\sum\frac{b+c}{a^2+bc} \overset{Lema}{\leq} \sum\frac{b^2+c^2}{2abc} = \frac{2\sum a^2}{2abc} = 1,$$ cu egalitate pentru $a=b=c=1$.

Deducem că max P =1pentru $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Aplicația33.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then find the maximum value of

$$P=\sqrt{3a+bc}+\sqrt{3b+ca}+\sqrt{3c+ab}-a^2-b^2-c^2.$$

Hoanghai Nguyen, Vietnam

Soluție

Lema

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then

$$\sum\sqrt{3a+bc}\leq 2\sum a.$$

$$\sum\sqrt{3a+bc}=\sum\sqrt{(a+b+c)a+bc}=\sum\sqrt{(a+b)(a+c)} \overset{AGM}{\leq} \sum\frac{(a+b)+(a+c)}{2} = 2\sum a.$$

Folosind **Lema** și $\sum a^2 \geq \frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2$ obținem:

$$P=\sum\sqrt{3a+bc}-\sum a^2 \overset{Lema}{\leq} 2\sum a-\sum a^2 \overset{Lema}{\leq} 2\sum a-\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2 \overset{Ipoteza}{=} 2\cdot 3-\frac{1}{3}\cdot 3^2=6-3=3.$$

Deducem că max $P=3$ pentru $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda>0$ fixed. If $a,b,c>0$, $a+b+c=\lambda$ then find the maximum value of

$$P=\sqrt{\lambda a+c}+\sqrt{\lambda b+ca}+\sqrt{\lambda c+ab}-a^2-b^2-c^2.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $a,b,c,\lambda>0$, $a+b+c=\lambda$ then

$$\sum\sqrt{\lambda a+bc}\leq\sqrt{\lambda+1}\sum a.$$

$$\sum\sqrt{\lambda a+bc}=\sum\sqrt{(a+b+c)a+bc}=\sum\sqrt{(a+b)(a+c)}\overset{AGM}{\leq}\sum\frac{(a+b)+(a+c)}{2}=2\sum a.$$

Folosind **Lema** și $\sum a^2\geq\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2$ obținem:

$$P=\sum\sqrt{\lambda a+bc}-\sum a^2\overset{Lema}{\leq}\sqrt{\lambda+1}\sum a-\sum a^2\overset{Lema}{\leq}\sqrt{\lambda+1}\sum a-\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2\overset{Ipoteza}{=}$$

$$\overset{Ipoteza}{=}\sqrt{\lambda+1}\cdot\lambda-\frac{1}{3}\cdot\lambda^2=\lambda\left(\sqrt{\lambda+1}-\frac{1}{3}\lambda\right).$$

Deducem că $\max P=\lambda\left(\sqrt{\lambda+1}-\frac{1}{3}\lambda\right)$ pentru $(a,b,c)=\left(\frac{\lambda}{3},\frac{\lambda}{3},\frac{\lambda}{3}\right)$.

Aplicația34.

If $x,y,z>0$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=6$ then find the maximum value of

$$P=\frac{1}{3x+y}+\frac{1}{3y+z}+\frac{1}{3z+x}.$$

Hoanghai Nguyen, Vietnam

Soluție

Lema

If $a,b>0$ then

$$\frac{1}{a+b}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\overset{CS}{\geq}\frac{(1+1)^2}{a+b}=\frac{4}{a+b}$, cu egalitate pentru $a=b$.

$$P=\sum\frac{1}{3x+y}=\sum\frac{1}{2x+(x+y)}\overset{Lema}{\leq}\sum\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{x+y}\right)=\frac{1}{8}\sum\frac{1}{x}+\frac{1}{4}\sum\frac{1}{x+y}\overset{Lema}{\leq}$$

$$\overset{Lema}{\leq}\frac{1}{8}\sum\frac{1}{x}+\frac{1}{4}\sum\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{8}\sum\frac{1}{x}+\frac{1}{4}\sum\frac{1}{2}\frac{1}{x}=\frac{1}{8}\sum\frac{1}{x}+\frac{1}{8}\sum\frac{1}{x}=\frac{1}{4}\sum\frac{1}{x}=\frac{1}{4}\cdot6=\frac{3}{2}.$$

Deducem că $\max P=\frac{3}{2}$ pentru $(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda\geq2$ fixed. If $x,y,z>0$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=6$ then find the maximum value of

$$Q=\frac{1}{3\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{3\sqrt{y}+\sqrt{z}}+\frac{1}{3\sqrt{z}+\sqrt{x}}.$$

Hoanghai Nguyen, Vietnam

Soluție

Lema

If $a,b>0$ then

$$\frac{1}{a+b}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\overset{CS}{\ge}\frac{(1+1)^2}{a+b}=\frac{4}{a+b}$, cu egalitate pentru $a=b$.

$$P=\sum\frac{1}{3\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\sum\frac{1}{2\sqrt{x}+\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}\overset{Lema}{\le}\sum\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)=\frac{1}{8}\sum\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{4}\sum\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\overset{Lema}{\le}$$

$$\overset{Lema}{\le}\frac{1}{8}\sum\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{4}\sum\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)=\frac{1}{8}\sum\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{4}\sum\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{8}\sum\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{8}\sum\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{4}\sum\frac{1}{\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{1}{4}\sum\sqrt{\frac{1}{x}}\overset{CBS}{\le}\frac{1}{4}\sqrt{3\sum\frac{1}{x}}=\frac{1}{4}\sqrt{3\cdot 6}=\frac{1}{4}3\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$, cu egalitate pentru $x=y=z=\frac{1}{2}$.

Deducem că $\max Q=\frac{3\sqrt{2}}{4}$ pentru $(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Aplicația35.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then find the minimum value of

$$P=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9}{ab+bc+ca}-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right).$$

Hoanghai Nguyen, Vietnam

Soluție

$$P=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9}{ab+bc+ca}-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)=\left(\frac{1}{\sum a^2}+\frac{1}{\sum bc}+\frac{1}{\sum bc}\right)+\frac{7}{\sum bc}-\left(\sum\sqrt{a}\right)\overset{CS}{\ge}$$

$$\overset{CS}{\ge}\frac{(1+1+1)^2}{\sum a^2+\sum bc+\sum bc}+\frac{7}{\sum bc}-\left(\sum\sqrt{a}\right)\overset{SOS}{\ge}\frac{9}{(a+b+c)^2}+7\cdot\frac{3}{(a+b+c)^2}-\left(\sum\sqrt{a}\right)\overset{CBS}{\ge}$$

$$\overset{CBS}{\ge}\frac{30}{(a+b+c)^2}-\sqrt{3(a+b+c)}\overset{a+b+c=3}{=}\frac{30}{3^2}-\sqrt{3\cdot 3}=\frac{30}{9}-3=\frac{1}{3}$$, cu egalitate pentru $a=b=c=1$.

Deducem că $\min P=\frac{1}{3}$ pentru $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda\ge 2$, $n\ge 0$ fixed. If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then find the minimum value of

$$P=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{\lambda}{ab+bc+ca}-n\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right).$$

Soluție

$$P=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{\lambda}{ab+bc+ca}-n\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)=\left(\frac{1}{\sum a^2}+\frac{1}{\sum bc}+\frac{1}{\sum bc}\right)+\frac{\lambda-2}{\sum bc}-n\left(\sum\sqrt{a}\right)\overset{CS}{\ge}$$

$$\overset{CS}{\ge}\frac{(1+1+1)^2}{\sum a^2+\sum bc+\sum bc}+\frac{\lambda-2}{\sum bc}-n\left(\sum\sqrt{a}\right)\overset{SOS}{\ge}\frac{9}{(a+b+c)^2}+(\lambda-2)\cdot\frac{3}{(a+b+c)^2}-n\left(\sum\sqrt{a}\right)\overset{CBS}{\ge}$$

$$\overset{CBS}{\ge}\frac{3\lambda+3}{(a+b+c)^2}-n\sqrt{3(a+b+c)}\overset{a+b+c=3}{=}\frac{3\lambda+3}{3^2}-n\sqrt{3\cdot 3}=\frac{\lambda+1}{3}-3n=\frac{\lambda}{3}-3n+\frac{1}{3}.$$

Deducem că $\min P=\frac{\lambda}{3}-3n+\frac{1}{3}$ pentru $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Aplicația36.

If $a,b>0$, $a+b=2$ then find the minimum value of

$$P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{4}{ab}-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right).$$

Hoanghai Nguyen, Vietnam

Soluție

$$P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{4}{ab}-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=\left(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}\right)+\frac{7}{2ab}-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\overset{CS}{\ge}$$

$$\overset{CS}{\ge}\frac{(1+1)^2}{a^2+b^2+2ab}+\frac{7}{2ab}-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\overset{SOS}{\ge}\frac{4}{(a+b)^2}+\frac{7}{2}\cdot\frac{4}{(a+b)^2}-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\overset{SOS}{\ge}$$

$$\overset{SOS}{\ge}\frac{18}{(a+b)^2}-\sqrt{2(a+b)}\overset{a+b=2}{=}\frac{18}{2^2}-\sqrt{2\cdot 2}=\frac{18}{4}-2=\frac{5}{2}$$, cu egalitate pentru $a=b=1$.

Deducem că $\min P=\frac{5}{2}$ pentru $(a,b)=(1,1)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda\ge\frac{1}{2}$, $n\ge 0$ fixed. If $a,b>0$, $a+b=2$ then find the minimum value of

$$P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{\lambda}{ab}-n\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right).$$

Marin Chirciu

Soluție

$$P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{\lambda}{ab}-n\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=\left(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}\right)+\frac{2\lambda-1}{2ab}-n\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\overset{CS}{\geq}$$

$$\overset{CS}{\geq}\frac{(1+1)^2}{a^2+b^2+2ab}+\frac{2\lambda-1}{2ab}-n\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\overset{SOS}{\geq}\frac{4}{(a+b)^2}+\frac{2\lambda-1}{2}\cdot\frac{4}{(a+b)^2}-n\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\overset{SOS}{\geq}$$

$$\overset{SOS}{\geq}\frac{4\lambda+2}{(a+b)^2}-n\sqrt{2(a+b)}\overset{a+b=2}{=}\frac{4\lambda+2}{2^2}-n\sqrt{2\cdot 2}=\frac{4\lambda+2}{4}-2n=\frac{2\lambda+1}{2}-2n=\lambda-2n+\frac{1}{2}.$$

Deducem că $\min P=\lambda-2n+\frac{1}{2}$ pentru $(a,b)=(1,1)$.

Aplicația37.

If $x,y,z>0$ then find the minimum value of

$$P=2019\sum\frac{x}{y+z}+\frac{x^2+y^2+z^2}{2022(xy+yz+zx)}.$$

Biswajt Ghosh

Soluție

Folosind inegalitatea lui Nesbitt și $\sum x^2\geq\sum yz$ obținem:

$$P=2019\sum\frac{x}{y+z}+\frac{x^2+y^2+z^2}{2022(xy+yz+zx)}\overset{Nesbitt}{\geq}2019\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{2022}.$$

Deducem că $\min P=2019\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{2022}$, pentru $x=y=z$.

Problema se poate dezvolta.

$\lambda\geq 0, n,k>0$ fixed. If $x,y,z>0$ then find the minimum value of

$$P=n\sum\frac{x}{y+\lambda z}+\frac{x^2+y^2+z^2}{k(xy+yz+zx)}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Folosind inegalitatea lui Nesbitt și $\sum x^2\geq\sum yz$ obținem:

$$P = n\sum\frac{x}{y+\lambda z}+\frac{x^2+y^2+z^2}{k\left(xy+yz+zx\right)} \overset{Nesbitt}{\geq} n\cdot\frac{3}{\lambda+1}+\frac{1}{k}=\frac{3n}{\lambda+1}+\frac{1}{k}.$$

Deducem că $\min P=\frac{3n}{\lambda+1}+\frac{1}{k}$, pentru $x=y=z$.

Aplicația38.

If $x,y,z>0$, $x^2+y^2+z^2\leq 3xyz$ then find the minmum value of

$$P=\sum\frac{x^2}{x^4+yz}.$$

Thu Hue, Vietnam

Soluție

$$P=\sum\frac{x^2}{x^4+yz}\overset{AGM}{\leq}\sum\frac{x^2}{2\sqrt{x^4\cdot yz}}=\frac{1}{2}\sum\sqrt{\frac{1}{yz}}\overset{AGM}{\leq}\frac{1}{2}\sum\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\sum\frac{1}{x}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sum xy}{xyz}\overset{sos}{\leq}\frac{1}{2}\frac{\sum x^2}{xyz}\overset{ipoteza}{\leq}\frac{1}{2}\cdot\frac{3xyz}{xyz}=\frac{3}{2}$$, cu egalitate pentru $x=y=z=1$.

Deducem că $\min P=\frac{3}{2}$ pentru $(x,y,z)=(1,1,1)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $n\in\mathbf{N}$ fixed. If $x,y,z>0$, $x^2+y^2+z^2\leq 3xyz$ then find the minmum value of

$$P=\sum\frac{x^n}{x^{2n}+yz}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$P=\sum\frac{x^n}{x^{2n}+yz}\overset{AGM}{\leq}\sum\frac{x^n}{2\sqrt{x^{2n}\cdot yz}}=\frac{1}{2}\sum\sqrt{\frac{1}{yz}}\overset{AGM}{\leq}\frac{1}{2}\sum\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\sum\frac{1}{x}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sum xy}{xyz}\overset{sos}{\leq}\frac{1}{2}\frac{\sum x^2}{xyz}\overset{ipoteza}{\leq}\frac{1}{2}\cdot\frac{3xyz}{xyz}=\frac{3}{2}$$, cu egalitate pentru $x=y=z=1$.

Deducem că $\min P=\frac{3}{2}$ pentru $(x,y,z)=(1,1,1)$.

Aplicația39.

If $a,b\geq 0$, $a+b=2$ then find Min-Max of

$$P=\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}+4\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right).$$

Pham Van Tuyen, Vietnam

Soluție

Notând $x=\sqrt{ab}$ avem $0\le x=\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}=1$, $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=4-2x^2$,

$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2+2x}$.

Problema se reformulează.

If $0\le x\le 1$, $a+b=2$ then find Min-Max of

$$P=2\sqrt{2-x^2}+4\sqrt{2+2x}.$$

Considerăm funcția $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=2\sqrt{2-x^2}+4\sqrt{2+2x}$.

Avem $f'(x)=\frac{-2x}{\sqrt{2-x^2}}+\frac{4}{\sqrt{2+2x}}$, cu $f'(x)=0\Leftrightarrow(x-1)(x+2)^2=0\Leftrightarrow x=1$.

Din tabelul de variație al funcției avem

$f(0)=6\sqrt{2}$, $f(1)=10$, $f'(x)\ge 0,\forall x\in[0,1]\Rightarrow f\uparrow, 0\le x\le 1$.

Deducem că $6\sqrt{2}\le f(x)\le 10$ pentru $0\le x\le 1$.

Rezultă că $\min P=6\sqrt{2}$ pentru $x=0\Leftrightarrow(a,b)=(2,0),(a,b)=(0,2)$.

$\max P=10$ pentru $x=1\Leftrightarrow(a,b)=(1,1)$.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b\ge 0$, $a+b=1$then find Min-Max of

$$P=\sqrt{a^2+b^2}+2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right).$$

Marin Chirciu

Soluție

Notând $x=\sqrt{ab}$ avem $0\le x=\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}=1$, $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=1-2x^2$,

$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{1+2x}$.

Problema se reformulează.

If $0\le x\le 1$, $a+b=2$ then find Min-Max of

$$P=\sqrt{1-2x^2}+2\sqrt{1+2x}.$$

Considerăm funcția $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{1-2x^2}+2\sqrt{1+2x}$.

Avem $f'(x)=\frac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}}+\frac{2}{\sqrt{1+2x}}$, cu $f'(x)=0\Leftrightarrow(2x-1)(x+1)^2=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Din tabelul de variație al funcției avem

$f(0)=3$, $f(1)=\frac{5\sqrt{2}}{2}$, $f'(x)\ge 0,\forall x\in[0,1]\Rightarrow f\uparrow,0\le x\le\frac{1}{2}$.

Deducem că $6\le f(x)\le 5\sqrt{2}$ pentru $0\le x\le\frac{1}{2}$.

Rezultă că $\min P=6$ pentru $x=0\Leftrightarrow(a,b)=(1,0),(a,b)=(0,1)$.

$\max P=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ pentru $x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow(a,b)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Aplicația40.

If $a,b>0$, $a^2+b^2\le a+b$ then find the maximum value of

$$S=2021+\left(\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}\right)^{2022}.$$

Pham Van Tuyen, Vietnam

Soluție

Lema

If $a,b>0$, $a^2+b^2\le a+b$ then

$$a+b\le 2.$$

Avem $a+b\ge a^2+b^2\overset{CS}{\ge}\frac{(a+b)^2}{2}\Rightarrow a+b\ge\frac{(a+b)^2}{2}\Rightarrow a+b\le 2$, cu egalitate pentru $a=b=1$.

$$S=2021+\left(\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}\right)^{2022}\overset{SOS}{\le}2021+\left(\frac{a+1}{4}+\frac{b+1}{4}\right)^{2022}=2021+\left(\frac{a+b+2}{4}\right)^{2022}\overset{Lema}{\le}$$

$$\overset{Lema}{\le}2021+\left(\frac{2+2}{4}\right)^{2022}=2021+1=2022.$$

Deducem că $\max S=2022$ pentru $(a,b)=(1,1)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda\ge 0$, $n\in\mathbf{N}$, $n\ge 2$ fixed. If $a,b>0$, $a^n+b^n\le a+b$ then find the maximum value of

$$S=\lambda+\left(\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}\right)^{\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $a,b>0$, $a^n+b^n\le a+b$, $n\in\mathbf{N}$, $n\ge 2$ then

$$a+b\le 2.$$

Avem $a+b\ge a^n+b^n\overset{CS}{\ge}\frac{(a+b)^n}{2^{n-1}}\Rightarrow a+b\ge\frac{(a+b)^n}{2^{n-1}}\Rightarrow a+b\le 2$, cu egalitate pentru $a=b=1$.

$$S=\lambda+\left(\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}\right)^{\lambda+1}\overset{SOS}{\le}\lambda+\left(\frac{a+1}{4}+\frac{b+1}{4}\right)^{\lambda+1}=\lambda+\left(\frac{a+b+2}{4}\right)^{\lambda+1}\overset{Lema}{\le}$$

$$\overset{Lema}{\le}\lambda+\left(\frac{2+2}{4}\right)^{\lambda+1}=\lambda+1.$$

Deducem că $\max S=\lambda+1$ pentru $(a,b)=(1,1)$.

Aplicația41.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=2022$ then find the minimum value of

$$P=\sum\sqrt{2a^2+ab+2b^2}.$$

Pham Van Tuyen, Vietnam

Soluție

Lema

If $a,b>0$ then

$$\sqrt{2a^2+ab+2b^2}\ge\frac{\sqrt{5}}{2}(a+b)^2.$$

$\sqrt{2a^2+ab+2b^2}\ge\frac{\sqrt{5}}{2}(a+b)^2\Leftrightarrow(a-b)^2\ge 0$, cu egalitate pentru $a=b$.

$$P=\sum\sqrt{2a^2+ab+2b^2}\overset{Lema}{\ge}\sum\frac{\sqrt{5}}{2}(a+b)=\frac{\sqrt{5}}{2}\sum(a+b)=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot 2\sum x=\sqrt{5}\cdot 2022=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=674$.

Deducem că $\min P=2022\sqrt{3}$ pentru $(a,b,c)=(674,674,674)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda \geq \frac{1}{2}$ fixed. If $a,b,c>0$, $a+b+c=1$then then find the minimum value of

$$P=\sum\sqrt{\lambda a^2+ab+\lambda b^2}\ .$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $a,b>0$ and $\lambda \geq \frac{1}{2}$ then

$$\sqrt{\lambda a^2+ab+\lambda b^2}\geq\frac{\sqrt{2\lambda+1}}{2}(a+b).$$

$$\sqrt{\lambda a^2+ab+\lambda b^2}\geq\frac{\sqrt{2\lambda+1}}{2}(a+b)\Leftrightarrow(2\lambda-1)(a-b)^2\geq 0,$$

cu egalitate pentru $a=b$ sau $\lambda=\frac{1}{2}$.

$$P=\sum\sqrt{\lambda a^2+ab+\lambda b^2}\overset{Lema}{\geq}\sum\frac{\sqrt{2\lambda+1}}{2}(a+b)=\frac{\sqrt{2\lambda+1}}{2}\sum(a+b)=\frac{\sqrt{2\lambda+1}}{2}\cdot 2\sum a=$$

$$=\sqrt{2\lambda+1}\cdot 1=RHS\ .$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Aplicația42.

If $a,b,c>0$,then find the minimum value of

$$A=\frac{a+b+c}{\sqrt{a(a+3b)}+\sqrt{b(b+3c)}+\sqrt{c(c+3a)}}\ .$$

Phan Van Tuyen, Vietnam

Soluție

Lema

If $a,b,c>0$,then find the minimum value of

$$\sqrt{a(a+3b)}\leq\frac{5a+3b}{4}\ .$$

$$\sqrt{a(a+3b)} \le \frac{5a+3b}{4} \Leftrightarrow 4\sqrt{a(a+3b)} \le 5a+3b \Leftrightarrow 16a(a+3b) \le (5a+3b)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0.$$

$$A = \frac{a+b+c}{\sum\sqrt{a(a+3b)}} \overset{Lema}{\ge} \frac{a+b+c}{\sum \frac{5a+3b}{4}} = \frac{4(a+b+c)}{\sum(5a+3b)} = \frac{4\sum a}{8\sum a} = \frac{1}{2}.$$

Deducem că $\min A = \frac{1}{2}$ pentru $a=b=c$.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda \ge 0$ fixed. If $a,b,c>0$, then find the minimum value of

$$A = \frac{a+b+c}{\sqrt{a(a+\lambda b)}+\sqrt{b(b+\lambda c)}+\sqrt{c(c+\lambda a)}}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Pentru $\lambda = 0$ avem $A=1$. În continuare fie $\lambda > 0$.

Lema

If $a,b,c>0$, then find the minimum value of

$$\sqrt{a(a+\lambda b)} \le \frac{(\lambda+2)a+nb}{2\sqrt{\lambda+1}}.$$

$(\lambda+1)a+(a+\lambda b) \ge 2\sqrt{(\lambda+1)a\cdot(a+\lambda b)}$, cu egalitate pentru $(\lambda+1)a=(a+\lambda b) \Leftrightarrow a=b$.

$$(\lambda+1)a+(a+\lambda b) \ge 2\sqrt{(\lambda+1)a\cdot(a+\lambda b)} \Leftrightarrow (\lambda+2)a+\lambda b \ge 2\sqrt{(\lambda+1)a\cdot(a+\lambda b)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\lambda+1)a\cdot(a+\lambda b)} \le \frac{(\lambda+2)a+\lambda b}{2} \Leftrightarrow \sqrt{a(a+\lambda b)} \le \frac{(\lambda+2)a+\lambda b}{2\sqrt{\lambda+1}}$$

$$A = \frac{a+b+c}{\sum\sqrt{a(a+\lambda b)}} \overset{Lema}{\ge} \frac{a+b+c}{\sum\frac{(\lambda+2)a+\lambda b}{2\sqrt{\lambda+1}}} = \frac{2\sqrt{\lambda+1}(a+b+c)}{\sum((\lambda+2)a+\lambda b)} = \frac{2\sqrt{\lambda+1}\sum a}{2(\lambda+1)\sum a} = \frac{1}{\sqrt{\lambda+1}}.$$

Deducem că $\min A = \frac{1}{\sqrt{\lambda+1}}$ pentru $a=b=c$.

Aplicația43.

If $a,b,c>0$ then find the minimum value of

$$P = (a+b+c)^2\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right).$$

Hai Nguyen Tran, Vietnam

Soluție

$$P=\left(\sum a\right)^2\left(\frac{1}{\sum a^2}+\sum\frac{1}{ab}\right)\overset{CS}{\geq}\left(\sum a\right)^2\left(\frac{1}{\sum a^2}+\frac{9}{\sum ab}\right)=$$

$$=\left(\sum a\right)^2\left(\frac{1}{\sum a^2}+\frac{1}{\sum ab}+\frac{1}{\sum ab}+\frac{7}{\sum ab}\right)\overset{CS}{\geq}\left(\sum a\right)^2\left(\frac{9}{\sum a^2+\sum ab+\sum ab}+\frac{7}{\sum ab}\right)=$$

$$=\left(\sum a\right)^2\left(\frac{9}{\sum a^2+2\sum ab}+\frac{7}{\sum ab}\right)=\left(\sum a\right)^2\left(\frac{9}{\left(\sum a\right)^2}+\frac{7}{\sum ab}\right)\overset{SOS}{\geq}$$

$$\overset{SOS}{\geq}\left(\sum a\right)^2\left(\frac{9}{\left(\sum a\right)^2}+\frac{7}{\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2}\right)=\left(\sum a\right)^2\left(\frac{9}{\left(\sum a\right)^2}+\frac{21}{\left(\sum a\right)^2}\right)=\left(\sum a\right)^2\cdot\frac{30}{\left(\sum a\right)^2}=30\,.$$

Deducem că $\min P=30$ pentru $a=b=c$.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda\geq\frac{2}{9}$ fixed. If $a,b,c>0$ then find the minimum value of

$$P=(a+b+c)^2\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{\lambda}{ab}+\frac{\lambda}{bc}+\frac{\lambda}{ca}\right).$$

Marin Chirciu

Soluție

$$P=\left(\sum a\right)^2\left(\frac{1}{\sum a^2}+\sum\frac{\lambda}{ab}\right)\overset{CS}{\geq}\left(\sum a\right)^2\left(\frac{1}{\sum a^2}+\frac{9\lambda}{\sum ab}\right)=$$

$$=\left(\sum a\right)^2\left(\frac{1}{\sum a^2}+\frac{1}{\sum ab}+\frac{1}{\sum ab}+\frac{9\lambda-2}{\sum ab}\right)\overset{CS}{\geq}\left(\sum a\right)^2\left(\frac{9}{\sum a^2+\sum ab+\sum ab}+\frac{9\lambda-2}{\sum ab}\right)=$$

$$=\left(\sum a\right)^2\left(\frac{9}{\sum a^2+2\sum ab}+\frac{9\lambda-2}{\sum ab}\right)=\left(\sum a\right)^2\left(\frac{9}{\left(\sum a\right)^2}+\frac{9\lambda-2}{\sum ab}\right)\overset{SOS}{\geq}$$

$$\overset{SOS}{\geq}\left(\sum a\right)^2\left(\frac{9}{\left(\sum a\right)^2}+\frac{9\lambda-2}{\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2}\right)=\left(\sum a\right)^2\left(\frac{9}{\left(\sum a\right)^2}+\frac{3(9\lambda-2)}{\left(\sum a\right)^2}\right)=\left(\sum a\right)^2\cdot\frac{27\lambda+3}{\left(\sum a\right)^2}=27\lambda+3\,.$$

Deducem că $\min P=27\lambda+3$ pentru $a=b=c$.

Aplicația44.

If $x, y, z > 0$ then find the minimum value of

$$S = \sum \sqrt{\frac{x}{2y+2z-x}}.$$

Pham Van Tuyen, Vietnam

Soluție

$$S = \sum \sqrt{\frac{x}{2y+2z-x}} = \sqrt{3}\sum \sqrt{\frac{x^2}{3x(2y+2z-x)}} = \sqrt{3}\sum \frac{x}{\sqrt{3x(2y+2z-x)}} \overset{AGM}{\geq}$$

$$\overset{AGM}{\geq} \sqrt{3}\sum \frac{x}{\frac{3x+(2y+2z-x)}{2}} = \sqrt{3}\sum \frac{2x}{2(x+y+z)} = \sqrt{3}\sum \frac{x}{x+y+z} = \sqrt{3},$$

cu egalitate pentru $3x = (2y+2z-x)$ și analoagele $\Leftrightarrow x = y = z$.

Deducem că $\min S = \sqrt{3}$ pentru $x = y = z$.

Problema se poate dezvolta.

If $x, y, z, \lambda > 0$ then

$$S = \sum \sqrt{\frac{x}{\lambda y+\lambda z-x}} \geq \frac{2}{\lambda}\sqrt{\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$S = \sum \sqrt{\frac{x}{\lambda y+\lambda z-x}} = \sqrt{\lambda+1}\sum \sqrt{\frac{x^2}{(\lambda+1)x(\lambda y+\lambda z-x)}} = \sqrt{\lambda+1}\sum \frac{x}{\sqrt{(\lambda+1)x(\lambda y+\lambda z-x)}} \overset{AGM}{\geq}$$

$$\overset{AGM}{\geq} \sqrt{\lambda+1}\sum \frac{x}{\frac{(\lambda+1)x+(\lambda y+\lambda z-x)}{2}} = \sqrt{\lambda+1}\sum \frac{2x}{\lambda(x+y+z)} = \sqrt{\lambda+1}\frac{2}{\lambda}\sum \frac{x}{x+y+z} =$$

$= \frac{2}{\lambda}\sqrt{\lambda+1}$, cu egalitate pentru $(\lambda+1)x = (\lambda y+\lambda z-x)$ și analoagele $\Leftrightarrow x = y = z$ și $\lambda = 2$.

Deducem că $\min S = \frac{2}{\lambda}\sqrt{\lambda+1}$ pentru $x = y = z$.

Aplicația45.

If $a, b > 0$, $a^2 + b^2 = 1$ then find the minimum value of

$$A=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2.$$

Pham Van Tuyen, Vietnam

Soluție

Lema.

If $a,b>0$, $a^2+b^2=1$ then

$$A=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2=\frac{a+b-1}{ab}+2.$$

Avem $A=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{a}{b}-\frac{b}{a}+2=\frac{a+b-\left(a^2+b^2\right)}{ab}+2=\frac{a+b-1}{ab}+2.$

Folosind **Lema** și notând $a+b=t$ obținem:

$$A=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\overset{Lema}{=}\frac{a+b-1}{ab}+2\overset{ab=\frac{t^2-1}{2}}{=}\frac{t-1}{\frac{t^2-1}{2}}+2=\frac{2}{t+1}+2\overset{t\le\sqrt{2}}{\ge}\frac{2}{\sqrt{2}+1}+2=2\sqrt{2}.$$

Deducem că $\min A=2\sqrt{2}$ pentru $(a,b)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Aplicația46.

If $a,b>0$, $a+2b=1$ then find the minimum value of

$$P=\frac{1}{ab}+\frac{3}{a^2+4b^2}.$$

Hoanghai Nguyen, Vietnam

Soluție

Cu substituția $(a,2b)=(x,y)$ avem $x+y=1$ și $P=\frac{2}{xy}+\frac{3}{x^2+y^2}$.

Problema se reformulează.

If $x,y>0$, $x+y=1$ then find the minimum value of

$$P=\frac{2}{xy}+\frac{3}{x^2+y^2}.$$

$$P=\frac{2}{xy}+\frac{3}{x^2+y^2}=\frac{1}{2xy}+\left(\frac{3}{2xy}+\frac{3}{x^2+y^2}\right)\overset{CS}{\geq}\frac{2}{(x+y)^2}+3\frac{(1+1)^2}{2xy+x^2+y^2}=\frac{2}{(x+y)^2}+\frac{12}{(x+y)^2}=$$

$=\frac{14}{(x+y)^2}=14$, cu egalitate pentru $x=y=\frac{1}{2}$.

Deducem că $\min P=14$ pentru $(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Problema se poate dezvolta .

Let $\lambda\geq 0$ fixed. If $a,b>0$, $a+(\lambda+1)b=1$ then find the minimum value of

$$P=\frac{1}{ab}+\frac{3}{a^2+\lambda^2b^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Cu substituția $(a,(\lambda+1)b)=(x,y)$ avem $x+y=1$ și $P=\frac{\lambda+1}{xy}+\frac{2\lambda+1}{x^2+y^2}$.

Problema se reformulează.

Let $\lambda\geq 0$ fixed. If $x,y>0$, $x+y=1$ then find the minimum value of

$$P=\frac{\lambda+1}{xy}+\frac{2\lambda+1}{x^2+y^2}.$$

Avem $P=\frac{\lambda+1}{xy}+\frac{2\lambda+1}{x^2+y^2}=\frac{1}{2xy}+\left(\frac{2\lambda+1}{2xy}+\frac{2\lambda+1}{x^2+y^2}\right)\overset{CS}{\geq}\frac{2}{(x+y)^2}+(2\lambda+1)\frac{(1+1)^2}{2xy+x^2+y^2}=$

$=\frac{2}{(x+y)^2}+\frac{4(2\lambda+1)}{(x+y)^2}=\frac{2(4\lambda+3)}{(x+y)^2}=2(4\lambda+3)$, cu egalitate pentru $x=y=\frac{1}{2}$.

Aplicația47.

If $x,y,z>0$, $x\geq 7, x+y\geq 12, x+y+z=15$ then find the minimum value of

$$A=x^2+y^2+z^2.$$

Pham Van Tuyen, Vietnam

Soluție

Din $(x-7)^2\geq 0\Rightarrow x^2\geq 14x-49$, (1), cu egalitate pentru $x=7$.

Din $(y-5)^2\geq 0\Rightarrow y^2\geq 10y-25$, (2), cu egalitate pentru $y=5$.

Din $(z-3)^2 \geq 0 \Rightarrow z^2 \geq 6z-9$, (3), cu egalitate pentru $z=3$.

Adunând (1),(2),(3) obținem:

$$A=x^2+y^2+z^2 \geq (14x-49)+(10y-25)+(6z-9)=14x+10y+6z-83=$$

$$=6(x+y+z)+4(x+y)+4x-83 \geq 6\cdot 15+4\cdot 12+4\cdot 7-83=83$$, cu egalitate pentru

$(x,y,z)=(7,5,3)$.

Deducem că $\min A=83$ pentru $(x,y,z)=(7,5,3)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda>0$ fixed. If $x,y,z>0$, $x\geq \lambda+2, x+y\geq 2\lambda+3, x+y+z=3\lambda+3$ then find the minimum value of

$$A=x^2+y^2+z^2.$$

Marin Chirciu

Soluție

Din $(x-\lambda-2)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 2(\lambda+2)x-(\lambda+2)^2$, (1), cu egalitate pentru $x=\lambda+2$.

Din $(y-\lambda-1)^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \geq 2(\lambda+1)y-(\lambda+1)^2$, (1), cu egalitate pentru $y=\lambda+1$.

Din $(z-\lambda)^2 \geq 0 \Rightarrow z^2 \geq 2\lambda z-\lambda^2$, (1), cu egalitate pentru $z=\lambda$.

Adunând (1),(2),(3) obținem:

$$A=x^2+y^2+z^2 \geq \left(2(\lambda+2)x-(\lambda+2)^2\right)+\left(2(\lambda+1)y-(\lambda+1)^2\right)+\left(2\lambda z-\lambda^2\right)=$$

$$=(2\lambda+4)x+(2\lambda+2)y+2\lambda z-\left(3\lambda^2+6\lambda+5\right)=2\lambda(x+y+z)+2(x+y)+2x-$$

$$-\left(3\lambda^2+6\lambda+5\right)\geq 2\lambda\cdot(3\lambda+3)+2\cdot(2\lambda+3)+2\cdot(\lambda+2)-\left(3\lambda^2+6\lambda+5\right)=3\lambda^2+6\lambda+5,$$

cu egalitate pentru $(x,y,z)=(\lambda+2,\lambda+1,\lambda)$.

Deducem că $\min A=3\lambda^2+6\lambda+5$ pentru $(x,y,z)=(\lambda+2,\lambda+1,\lambda)$.

Aplicația48.

If $a,b>0$ then find the minimum value of

$$P=\frac{ab^2}{a^2+b^4}+\frac{a}{b^2}+\frac{b^2}{a}.$$

Hoanghai Nguyen, Vietnam

Soluție

Cu substituția $(a,b^2)=(x,y)$ avem $P=\frac{ab^2}{a^2+b^4}+\frac{a}{b^2}+\frac{b^2}{a}=\frac{xy}{x^2+y^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$.

Problema se reformulează:

If $a,b>0$ then find the minimum value of

$$P=\frac{xy}{x^2+y^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}.$$

$$P=\frac{xy}{x^2+y^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{xy}{x^2+y^2}+\frac{x^2+y^2}{xy}\overset{t=\frac{x^2+y^2}{xy}\geq 2}{=}t+\frac{1}{t}=\left(\frac{1}{t}+\frac{t}{4}\right)+\frac{3t}{4}\overset{AGM}{\geq}2\sqrt{\frac{1}{t}\cdot\frac{t}{4}}+\frac{3}{4}\cdot 2=\frac{5}{2},$$

cu egalitate pentru $\frac{1}{t}=\frac{t}{4}$ și $t=2 \Leftrightarrow x=y=1$.

Deducem că $\min P=\frac{5}{2}$ pentru $(x,y)=(1,1)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda \geq \frac{1}{4}$ fixed. If $a,b>0$ then find the minimum value of

$$P=\frac{xy}{x^2+y^2}+\lambda\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right).$$

Marin Chirciu

Soluție

$$P=\frac{xy}{x^2+y^2}+\lambda\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=\lambda\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{xy}{x^2+y^2}\overset{t=\frac{x^2+y^2}{xy}\geq 2}{=}\lambda t+\frac{1}{t}=\left(\frac{1}{t}+\frac{t}{4}\right)+\left(\lambda-\frac{1}{4}\right)t\overset{AGM}{\geq}$$

$$\overset{AGM}{\geq}2\sqrt{\frac{1}{t}\cdot\frac{t}{4}}+\left(\lambda-\frac{1}{4}\right)\cdot 2=1+\left(\lambda-\frac{1}{4}\right)\cdot 2=2\lambda+\frac{1}{2},$$

cu egalitate pentru $\frac{1}{t}=\frac{t}{4}$ și $t=2 \Leftrightarrow x=y=1$.

Deducem că $\min P=2\lambda+\frac{1}{2}$ pentru $(x,y)=(1,1)$.

Aplicația49.

If $x,y,z>0$, $xyz\geq 1$ then find the minimum value of

$$H=\sum\frac{x^3-1}{x^2+y+z}.$$

Quan Nguyen, Vietnam

Soluție

Avem $H=\sum\frac{x^3-1}{x^2+y+z}=\sum\frac{x^3}{x^2+y+z}-\sum\frac{1}{x^2+y+z}=\sum\left(x-\frac{xy+xz}{x^2+y+z}\right)-\sum\frac{1}{x^2+y+z}=$

$$=\sum x-\sum\frac{x(y+z)}{x^2+\frac{y+z}{2}+\frac{y+z}{2}}-\sum\frac{1}{x^2+y+z}\overset{AGM}{\geq}\sum x-\sum\frac{x(y+z)}{3\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{y+z}{2}\cdot\frac{y+z}{2}}}-\sum\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2\cdot y\cdot z}}=$$

$$=\sum x-\sum\frac{x(y+z)}{3\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{(y+z)^2}{4}}}-\sum\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}=\sum x-\frac{1}{3}\sum\sqrt[3]{4x(y+z)}-\frac{1}{3}\sum\sqrt[3]{yz}\overset{AGM}{\geq}$$

$$\overset{AGM}{\geq}\sum x-\frac{1}{3}\cdot\sum\frac{2+2x+(y+z)}{3}-\frac{1}{3}\cdot\sum\frac{y+z+1}{3}=\sum x-\frac{4}{9}\sum x-\frac{2}{3}-\frac{2}{9}\sum x-\frac{1}{3}=$$

$=\frac{1}{3}\sum x-1\overset{AGM}{\geq}\sqrt[3]{xyz}-1\geq 1-1=0$, cu egalitate pentru $x=y=z=1$.

Deducem că $\min H=0$ pentru $(x,y,z)=(1,1,1)$.

Aplicația50.

If $a,b>0$, $a(a-1)+b(b-1)=ab$ then find the minimum value of

$$F=\frac{a^4+2022}{b}+\frac{b^4+2022}{a}.$$

Pham Van Tuyen, Vietnam

Soluție

Lema1

If $a,b>0$, $a(a-1)+b(b-1)=ab$ then

$$a+b\leq 4.$$

Avem $\frac{(a+b)^2}{4}\overset{AGM}{\geq}ab=a(a-1)+b(b-1)=a^2+b^2-a-b\overset{CS}{\geq}\frac{(a+b)^2}{2}-(a+b)$.

Din $\frac{(a+b)^2}{4}\geq\frac{(a+b)^2}{2}-(a+b)\Leftrightarrow(a+b)\geq\frac{(a+b)^2}{4}\Leftrightarrow a+b\leq 4$.

Lema2

If $a>0$ then

$$a^4 \geq 32a-48.$$

Avem $a^4 \geq 32a-48,(1) \Leftrightarrow a^4-32a+48 \geq 0 \Leftrightarrow (a-2)^2(a^2+2a+4) \geq 0$.

Folosind **Lemele** de mai sus obținem:

$$F=\sum\frac{a^4+2022}{b}\overset{Lema2}{\geq}\sum\frac{(32a-48)+2022}{b}=\sum\frac{32a+1974}{b}=32\sum\frac{a}{b}+1974\sum\frac{1}{b}\overset{AGM}{\geq}$$

$$\overset{AGM}{\geq}32\cdot 2+1974\sum\frac{1}{b}=64+1974\sum\frac{1}{b}\overset{CS}{\geq}64+1974\frac{\left(\sum 1\right)^2}{\sum b}=64+1974\cdot\frac{4}{a+b}\overset{Lema2}{\geq}$$

$\overset{Lema2}{\geq}64+1974\cdot\frac{4}{4}=64+1974=2038$, cu egalitate pentru $a=b=2$.

Deducem că $\min F=2038$ pentru $(a,b)=(2,2)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda \geq 48$ fixed. If $a,b>0$, $a(a-1)+b(b-1)=ab$ then find the minimum value of

$$F=\frac{a^4+\lambda}{b}+\frac{b^4+\lambda}{a}.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție</u>

<u>Lema1</u>

If $a,b>0$, $a(a-1)+b(b-1)=ab$ then

$$a+b \leq 4.$$

Avem $\frac{(a+b)^2}{4}\overset{AGM}{\geq}ab=a(a-1)+b(b-1)=a^2+b^2-a-b\overset{CS}{\geq}\frac{(a+b)^2}{2}-(a+b)$.

Din $\frac{(a+b)^2}{4}\geq\frac{(a+b)^2}{2}-(a+b) \Leftrightarrow (a+b)\geq\frac{(a+b)^2}{4} \Leftrightarrow a+b\leq 4$.

<u>Lema2</u>

If $a>0$ then

$$a^4 \geq 32a-48.$$

Avem $a^4 \geq 32a-48,(1) \Leftrightarrow a^4-32a+48 \geq 0 \Leftrightarrow (a-2)^2(a^2+2a+4) \geq 0$.

$$F=\sum\frac{a^4+\lambda}{b}\overset{Lema2}{\geq}\sum\frac{(32a-48)+\lambda}{b}=\sum\frac{32a+\lambda-48}{b}=32\sum\frac{a}{b}+(\lambda-48)\sum\frac{1}{b}\overset{AGM}{\geq}$$

$$\overset{AGM}{\geq}32\cdot 2+(\lambda-48)\sum\frac{1}{b}=64+(\lambda-48)\sum\frac{1}{b}\overset{CS}{\geq}64+(\lambda-48)\frac{\left(\sum 1\right)^2}{\sum b}=64+(\lambda-48)\cdot\frac{4}{a+b}\overset{Lema2}{\geq}$$

$$\overset{Lema2}{\geq}64+(\lambda-48)\cdot\frac{4}{4}=64+(\lambda-48)=\lambda+16$$, cu egalitate pentru $a=b=2$.

Deducem că $\min F=\lambda+16$ pentru $(a,b)=(2,2)$.

Aplicația51.

If $x,y,z\geq 0$ then find the maximum value of

$$A=\frac{x+1}{(x+2)^2}.$$

Thu Trang, Vietnam

Soluție

Avem $\frac{x+1}{(x+2)^2}\leq\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4(x+1)\leq(x+2)^2\Leftrightarrow x^2\geq 0$, cu egalitate pentru $x=0$.

Deducem că $\max A=\frac{1}{4}$ pentru $x=0$.

Remarca.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda>0$ fixed. If $x,y,z\geq 0$ then find the maximum value of

$$A=\frac{x+\lambda}{(x+2\lambda)^2}+\frac{y+\lambda}{(y+2\lambda)^2}+\frac{z+\lambda}{(z+2\lambda)^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema.

If $x\geq 0$,then

$$\frac{x+\lambda}{(x+2\lambda)^2}\leq\frac{1}{4\lambda}.$$

Soluție

Avem $\frac{x+\lambda}{(x+2\lambda)^2} \le \frac{1}{4\lambda} \Leftrightarrow 4\lambda(x+\lambda) \le (x+2\lambda)^2 \Leftrightarrow x^2 \ge 0$, cu egalitate pentru $x=0$.

$$A = \sum \frac{x+\lambda}{(x+2\lambda)^2} \overset{Lema}{\le} \sum \frac{\lambda}{4} = \frac{3\lambda}{4}.$$

Deducem că $\max A = \frac{3\lambda}{4}$ pentru $(x,y,z) = (0,0,0)$.

Aplicația52.

If $x,y,z>0$, $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=2020$ then find the minimal value of

$$Q = \frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x}.$$

Tien Dung, Vietnam

Soluție

Lema.

If $x,y,z>0$, $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=2020$ then

$$x+y+z \ge 2020.$$

$$Q = \sum \frac{x^2}{x+y} \overset{CS}{\ge} \frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum(x+y)} = \frac{\left(\sum x\right)^2}{2\sum x} = \frac{1}{2}\sum x \overset{Lema}{\ge} \frac{1}{2}\cdot 2020 = 1010.$$

Deducem că $\min Q = 1010$ pentru $(x,y,z) = \left(\frac{2020}{3}, \frac{2020}{3}, \frac{2020}{3}\right)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $n,\lambda>0, k\in\mathbf{N}, k\ge 2$ fixed. If $x,y,z>0$, $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=\lambda$ then find minim value of

$$Q = \frac{x^k}{nx+y} + \frac{y^k}{ny+z} + \frac{z^k}{nz+x}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema.

If $x,y,z>0$, $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=\lambda$ then

$$x+y+z \ge \lambda.$$

Avem $\sum x \overset{SOS}{\ge} \sum \sqrt{yz} = \lambda$, cu egalitate pentru $x=y=z=\frac{\lambda}{3}$.

$$Q=\sum\frac{x^k}{nx+y}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum x\right)^k}{3^{k-2}\sum(nx+y)}=\frac{\left(\sum x\right)^k}{3^{k-2}(n+1)\sum x}=\frac{1}{3^{k-2}(n+1)}\left(\sum x\right)^{k-1}\overset{Lema}{\geq}\frac{1}{3(n+1)}\cdot\lambda^{k-1}=\frac{\lambda^{k-1}}{3(n+1)}$$

Deducem că $\min Q=\frac{\lambda^{k-1}}{3(n+1)}$ pentru $(x,y,z)=\left(\frac{\lambda}{3},\frac{\lambda}{3},\frac{\lambda}{3}\right)$.

Aplicația53.

If $x,y,z>0$, $xyz=1$ then find the minimal value of

$$A=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{1}{(z+1)^2}.$$

Huyen Dinh, Vietnam

Soluție

Lema

If $x,y>0$ then

$$\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}\geq\frac{1}{xy+1}.$$

Avem $\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}\geq\frac{1}{xy+1}\Leftrightarrow xy(x-y)^2+(1-xy)^2\geq 0$, cu egalitate pentru $x=y=1$.

$$A=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{1}{(z+1)^2}\overset{Lema}{\geq}\frac{1}{xy+1}+\frac{1}{(z+1)^2}=\frac{z}{xyz+z}+\frac{1}{(z+1)^2}=\frac{1}{z+1}+\frac{1}{(z+1)^2}=$$

$$\frac{z^2+z+1}{(z+1)^2}=1-\frac{z}{(z+1)^2}\overset{SOS}{\geq}1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

Deducem că $\min A=\frac{3}{4}$ pentru $(x,y,z)=(1,1,1)$.

Aplicația54.

If $x,y,z>0$, $x^2+y^2+z^2\geq 12$ then find the minimal value of

$$P=\frac{x^6}{\sqrt{y^3+1}}+\frac{y^6}{\sqrt{z^3+1}}+\frac{z^6}{\sqrt{x^3+1}}.$$

Hoanghai Nguyen, Vietnam

Soluție

Lema

If $x,y,z>0$, $x^2+y^2+z^2\geq 12$ then

$$\frac{x^6}{\sqrt{y^3+1}} \geq \frac{2x^6}{y^2+2}.$$

$$\frac{x^6}{\sqrt{y^3+1}} = \frac{x^6}{\sqrt{(y+1)(y^2-y+1)}} \geq \frac{x^6}{\frac{(y+1)+(y^2-y+1)}{2}} = \frac{2x^6}{y^2+2},$$

cu egalitate pentru $(y+1)=(y^2-y+1) \Leftrightarrow y=2$.

$$P=\sum \frac{x^6}{\sqrt{y^3+1}} \overset{Lema}{\geq} \sum \frac{2x^6}{y^2+2} \overset{CS}{\geq} \frac{2\left(\sum x^3\right)^2}{\sum\left(y^2+2\right)} = \frac{2\left(\sum x^3\right)^2}{\sum x^2+6} \overset{(1)}{\geq} \frac{2\left(3\sum x^2-12\right)^2}{\sum x^2+6} \overset{\sum x^2=t}{=}$$

$\overset{\sum x^2=t}{=} \dfrac{2(3t-12)^2}{t+6} \overset{(2)}{\geq} 64$, unde(1) $\Leftrightarrow \sum x^3 \geq 3\sum x^2-12$, care rezultă din:

$$x^3+x^3+8 \geq 3\sqrt[3]{x^3\cdot x^3\cdot 8}=6x^2 \Rightarrow 2x^3+8 \geq 6x^2 \Rightarrow x^3+4 \geq 3x^2 \Rightarrow \sum x^3 \geq 3\sum x^2-12,$$

cu egalitate pentru $x=2$, iar (2) $\Leftrightarrow \dfrac{2(3t-12)^2}{t+6} \geq 64 \Leftrightarrow (3t-12)^2 \geq 32(t+6) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9t^2-104t-48 \geq 0 \Leftrightarrow (t-12)(9t+4) \geq 0$, care rezultă din $t=\sum x^2 \geq 12$.

Problema se poate dezvolta.

If $x,y,z>0$, $x^2+y^2+z^2 \geq 12$ then find the minimal value of

$$P=\frac{x^6}{\sqrt[3]{3(y^3+1)}}+\frac{y^6}{\sqrt[3]{3(z^3+1)}}+\frac{z^6}{\sqrt[3]{3(x^3+1)}}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $x,y,z>0$, $x^2+y^2+z^2 \geq 12$ then

$$\frac{x^6}{\sqrt[3]{3(y^3+1)}} \geq \frac{3x^6}{y^2+5}.$$

$$\frac{x^6}{\sqrt[3]{3(y^3+1)}} = \frac{x^6}{\sqrt[3]{3(y+1)(y^2-y+1)}} \geq \frac{x^6}{\frac{3+(y+1)+(y^2-y+1)}{3}} = \frac{3x^6}{y^2+5},$$

cu egalitate pentru $3=(y+1)=(y^2-y+1) \Leftrightarrow y=2$.

$$P=\sum\frac{x^6}{\sqrt[3]{3\left(y^3+1\right)}}\overset{Lema}{\geq}\sum\frac{3x^6}{y^2+5}\overset{CS}{\geq}\frac{2\left(\sum x^3\right)^2}{\sum\left(y^2+5\right)}=\frac{2\left(\sum x^3\right)^2}{\sum x^2+15}\overset{(1)}{\geq}\frac{2\left(3\sum x^2-12\right)^2}{\sum x^2+15}\overset{\sum x^2=t}{=}$$

$$\overset{\sum x^2=t}{=}\frac{2\left(3t-12\right)^2}{t+15}\overset{(2)}{\geq}\frac{128}{3},$$

unde(1) $\Leftrightarrow\sum x^3\geq 3\sum x^2-12$, care rezultă din:

$$x^3+x^3+8\geq 3\sqrt[3]{x^3\cdot x^3\cdot 8}=6x^2\Rightarrow 2x^3+8\geq 6x^2\Rightarrow x^3+4\geq 3x^2\Rightarrow\sum x^3\geq 3\sum x^2-12,$$

cu egalitate pentru $x=2$,

iar (2) $\Leftrightarrow\frac{2\left(3t-12\right)^2}{t+15}\geq\frac{128}{3}\Leftrightarrow 3\left(3t-12\right)^2\geq 64\left(t+15\right)\Leftrightarrow 27t^2-280t-528\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(t-12\right)\left(27t+44\right)\geq 0$, care rezultă din $t=\sum x^2\geq 12$.

Deducem că $\min P=64$ pentru $\left(x,y,z\right)=\left(2,2,2\right)$.

<u>Aplicația55.</u>

If $a,b,c>0$ then find the minimal value of

$$A=\frac{3a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{5c}{a+b}.$$

Anibal Asperphys, Sensei del Algebra 4/2022.

<u>Soluție</u>

Folosind inegalitatea lui Cebyshev pentru tripletele la fel ordonate

$\left(3,4,5\right)$ și $\left(\frac{a}{b+c},\frac{b}{c+a},\frac{c}{a+b}\right)$ obținem:

$$A=\frac{3a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{5c}{a+b}\overset{Chebyshev}{\geq}\frac{1}{3}\left(3+4+5\right)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\overset{Nesbitt}{\geq}4\cdot\frac{3}{2}=6.$$

Deducem că $\min A=6$ pentru $a=b=c$.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda>0$ fixed. If $a,b,c>0$ then find the minimal value of

$$A=\frac{\lambda a}{b+c}+\frac{\left(\lambda+1\right)b}{c+a}+\frac{\left(\lambda+2\right)c}{a+b}.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție</u>

Folosind inegalitatea lui Cebyshev pentru tripletele la fel ordonate

$(\lambda,\lambda+1,\lambda+2)$ și $\left(\frac{a}{b+c},\frac{b}{c+a},\frac{c}{a+b}\right)$ obținem:

$$A=\frac{\lambda a}{b+c}+\frac{(\lambda+1)b}{c+a}+\frac{(\lambda+2)c}{a+b}\overset{Chebyshev}{\geq}\frac{1}{3}(\lambda+\lambda+1+\lambda+2)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\overset{Nesbitt}{\geq}(\lambda+1)\cdot\frac{3}{2}.$$

Deducem că $\min A=\frac{3}{2}(\lambda+1)$ pentru $a=b=c$.

Aplicația56.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=2$ then find the maximum value of

$$P=\frac{xy}{\sqrt{xy+2z}}+\frac{yz}{\sqrt{yz+2x}}+\frac{zx}{\sqrt{zx+2y}}.$$

Tien Dung, Vietnam

Soluție

Lema

If $x,y,z>0$, $x+y+z=2$ then

$$\frac{yz}{\sqrt{yz+2x}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x+y}+\frac{yz}{x+z}\right).$$

Avem $yz+2x=yz+(x+y+z)x=x^2+xy+yz+zx=(x+y)(x+z)$.

Rezultă $\frac{yz}{\sqrt{yz+2x}}=\frac{yz}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}=yz\sqrt{\frac{1}{(x+y)(x+z)}}\overset{AGM}{\leq}yz\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right)$,

cu egalitate pentru $\frac{1}{x+y}=\frac{1}{x+z}\Leftrightarrow y=z$.

$$P=\sum\frac{yz}{\sqrt{yz+2x}}\overset{Lema}{\leq}\frac{1}{2}\sum\left(\frac{yz}{x+y}+\frac{yz}{x+z}\right)=\frac{1}{2}\sum\left(\frac{xy}{y+z}+\frac{zx}{y+z}\right)=\frac{1}{2}\sum x=\frac{1}{2}\cdot 2=1.$$

Deducem că $\max P=1$ pentru $(x,y,z)=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda>0$ fixed. If $x,y,z>0$, $x+y+z=\lambda$ then find the maximum value of

$$P=\frac{xy}{\sqrt{xy+\lambda z}}+\frac{yz}{\sqrt{yz+\lambda x}}+\frac{zx}{\sqrt{zx+\lambda y}}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $x,y,z>0$, $x+y+z=2$ then

$$\frac{yz}{\sqrt{yz+2x}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x+y}+\frac{yz}{x+z}\right).$$

Avem $yz+\lambda x=yz+(x+y+z)x=x^2+xy+yz+zx=(x+y)(x+z)$.

Rezultă $\frac{yz}{\sqrt{yz+\lambda x}}=\frac{yz}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}=yz\sqrt{\frac{1}{(x+y)(x+z)}}\overset{AGM}{\le}yz\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right)$,

$$P=\sum\frac{yz}{\sqrt{yz+\lambda x}}\overset{Lema}{\le}\frac{1}{2}\sum\left(\frac{yz}{x+y}+\frac{yz}{x+z}\right)=\frac{1}{2}\sum\left(\frac{xy}{y+z}+\frac{zx}{y+z}\right)=\frac{1}{2}\sum x=\frac{1}{2}\cdot\lambda=\frac{\lambda}{2}.$$

Deducem că $\max P=\frac{\lambda}{2}$ pentru $(x,y,z)=\left(\frac{\lambda}{3},\frac{\lambda}{3},\frac{\lambda}{3}\right)$.

Aplicația57.

If $a,b,c\ge 0$, $a+b+c=1$then find Min-Max of

$$P=\sqrt{a^2+2b^2}+\sqrt{b^2+2c^2}+\sqrt{c^2+2a^2}.$$

Pham Van Tuyen, Vietnam

Soluție

MinP.

$$P=\sum\sqrt{a^2+2b^2}\overset{CS}{\ge}\sum\sqrt{\frac{(a+2b)^2}{3}}=\sum\frac{a+2b}{\sqrt{3}}=\frac{3\sum a}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

Deducem că $\min P=\sqrt{3}$ pentru $(a,b,c)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

MaxP.

$$P=\sum\sqrt{a^2+2b^2}\overset{SOS}{\le}\sum\sqrt{\left(a+\sqrt{2}b\right)^2}=\sum\left(a+\sqrt{2}b\right)=\left(1+\sqrt{2}\right)\sum a=1+\sqrt{2}.$$

Deducem că $\max P=1+\sqrt{2}$ pentru $(a,b,c)=(0,1,1)$ și permutările sale.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda > 0$ fixed. If $a,b,c \ge 0$, $a+b+c=1$ then find Min-Max of

$$P=\sqrt{a^2+\lambda b^2}+\sqrt{b^2+\lambda c^2}+\sqrt{c^2+\lambda a^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție

MinP.

$$P=\sum\sqrt{a^2+\lambda b^2}\overset{CS}{\ge}\sum\sqrt{\frac{(a+\lambda b)^2}{1+\lambda}}=\sum\frac{a+\lambda b}{\sqrt{1+\lambda}}=\frac{(1+\lambda)\sum a}{\sqrt{1+\lambda}}=\sqrt{1+\lambda}.$$

Deducem că $\min P=\sqrt{1+\lambda}$ pentru $(a,b,c)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

MaxP.

$$P=\sum\sqrt{a^2+\lambda b^2}\overset{SOS}{\le}\sum\sqrt{\left(a+\sqrt{\lambda}b\right)^2}=\sum\left(a+\sqrt{\lambda}b\right)=\left(1+\sqrt{\lambda}\right)\sum a=1+\sqrt{\lambda}.$$

Deducem că $\max P=1+\sqrt{\lambda}$ pentru $(a,b,c)=(0,1,1)$ și permutările sale.

Aplicația58.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=1$ then find the minimum value of

$$P=2020\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)+\frac{1}{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}.$$

Tran Ha, Vietnam

Soluție

Lema.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=1$ then

$$a^2+b^2+c^2\ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right).$$

Folosind $a+b+c=1$ obținem:

$$a^2+b^2+c^2\ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\Leftrightarrow\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c)\ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum a^3+\sum ab^2+\sum a^2b\ge 3\sum a^2b\Leftrightarrow\sum a^3+\sum ab^2-2\sum a^2b\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum\left(a^3+ab^2-2a^2b\right)\ge 0\Leftrightarrow\sum a\left(a^2-2ab+b^2\right)\ge 0\Leftrightarrow\sum a(a-b)^2\ge 0.$$

Avem $\sum\frac{a^2}{b}=\sum\frac{a^4}{a^2b}\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum a^2b}\overset{Lema}{\ge}\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\frac{1}{3}\sum a^2}=3\sum a^2$, (1).

Rezultă $P = 2020\sum\frac{a^2}{b} + \frac{1}{3\sum a^2} \overset{(1)}{\geq} 2020\cdot 3\sum a^2 + \frac{1}{3\sum a^2} = 6060\sum a^2 + \frac{1}{3\sum a^2} =$

$$= 6057\sum a^2 + \left(3\sum a^2 + \frac{1}{3\sum a^2}\right) \overset{CS+AGM}{=} 6057\cdot\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2 + 2\sqrt{3\sum a^2 \cdot \frac{1}{3\sum a^2}} =$$

$= 6057\cdot\frac{1}{3}\cdot 1^2 + 2\sqrt{1} = 2019 + 2 = 2021$, cu egalitate pentru $3\sum a^2 = \frac{1}{3\sum a^2} \Leftrightarrow 3\sum a^2 = 1$.

Deducem că $\min P = 2021$ pentru $(a,b,c) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Problema se poate dezvolta.

If $n \geq \lambda > 0$ fixed. If $a,b,c > 0$, $a+b+c=1$ then find the minimum value of

$$P = n\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right) + \frac{\lambda}{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție</u>

<u>Lema.</u>

If $a,b,c > 0$, $a+b+c=1$ then

$$a^2+b^2+c^2 \geq 3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right).$$

Folosind $a+b+c=1$ obținem:

$$a^2+b^2+c^2 \geq 3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right) \Leftrightarrow \left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c) \geq 3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum a^3 + \sum ab^2 + \sum a^2b \geq 3\sum a^2b \Leftrightarrow \sum a^3 + \sum ab^2 - 2\sum a^2b \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum\left(a^3+ab^2-2a^2b\right) \geq 0 \Leftrightarrow \sum a\left(a^2-2ab+b^2\right) \geq 0 \Leftrightarrow \sum a(a-b)^2 \geq 0.$$

Avem $\sum\frac{a^2}{b} = \sum\frac{a^4}{a^2b} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum a^2b} \overset{Lema}{\geq} \frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\frac{1}{3}\sum a^2} = 3\sum a^2$, (1).

Rezultă $P = n\sum\frac{a^2}{b} + \frac{\lambda}{3\sum a^2} \overset{(1)}{\geq} n\cdot 3\sum a^2 + \frac{\lambda}{3\sum a^2} = 3n\sum a^2 + \frac{\lambda}{3\sum a^2} =$

$$= (3n-3\lambda)\sum a^2 + \lambda\left(3\sum a^2 + \frac{1}{3\sum a^2}\right) \overset{CS+AGM}{=} (3n-3\lambda)\cdot\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2 + 2\sqrt{3\sum a^2\cdot\frac{1}{3\sum a^2}} =$$

$=(3n-3\lambda)\cdot\frac{1}{3}\cdot 1^2+2\sqrt{1}=n-\lambda+2$, cu egalitate pentru $3\sum a^2=\frac{1}{3\sum a^2}\Leftrightarrow 3\sum a^2=1$.

Deducem că $\min P=n-\lambda+2$ pentru $(a,b,c)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Aplicația59.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then find the minimum value of

$$P=\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}+\frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Hoanghai Nguyen, Vietnam

Soluție

Cu substituția $(a,b,c)=\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}\right)$, problema se reformulează.

If $x,y,z>0$, $xyz=1$ then find the minimum value of

$$P=\frac{y^2}{x}+\frac{z^2}{y}+\frac{x^2}{z}+\frac{9}{2(xy+yz+zx)}.$$

$$P=\frac{y^2}{x}+\frac{z^2}{y}+\frac{x^2}{z}+\frac{9}{2(xy+yz+zx)}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum x}+\frac{9}{2\sum xy}=\sum x+\frac{9}{2\sum xy}\overset{SOS}{\geq}$$

$$\overset{SOS}{\geq}\sum x+\frac{9}{2}\cdot\frac{3}{\left(\sum x\right)^2}\overset{t=\sum x}{=}t+\frac{9}{2}\cdot\frac{3}{t^2}\overset{(1)}{\geq}\frac{9}{2},$$

unde (1) $\Leftrightarrow t+\frac{27}{2t^2}\geq\frac{9}{2}\Leftrightarrow 2t^3-9t^2+27\geq 0\Leftrightarrow (t-3)^2(2t+3)\geq 0$.

Deducem că $\min P=\frac{9}{2}$ pentru $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $n\in\mathbf{N}$ fixed. If $a,b,c>0$, $abc=1$ then find the minimum value of

$$P=\frac{a^n}{b^{n+1}}+\frac{b^n}{c^{n+1}}+\frac{c^n}{a^{n+1}}+\frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Cu substituția $(a,b,c)=\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}\right)$, problema se reformulează.

If $x,y,z>0$, $xyz=1$ then find the minimum value of

$$P=\frac{y^{n+1}}{x^n}+\frac{z^{n+1}}{y^n}+\frac{x^{n+1}}{z^n}+\frac{9}{2(xy+yz+zx)}.$$

$$P=\frac{y^{n+1}}{x^n}+\frac{z^{n+1}}{y^n}+\frac{x^{n+1}}{z^n}+\frac{9}{2(xy+yz+zx)}\overset{Radon}{\geq}\frac{\left(\sum x\right)^{n+1}}{\left(\sum x\right)^n}+\frac{9}{2\sum xy}=\sum x+\frac{9}{2\sum xy}\overset{SOS}{\geq}$$

$$\overset{SOS}{\geq}\sum x+\frac{9}{2}\cdot\frac{3}{\left(\sum x\right)^2}\overset{t=\sum x}{=}t+\frac{9}{2}\cdot\frac{3}{t^2}\overset{(1)}{\geq}\frac{9}{2},$$

unde (1) $\Leftrightarrow t+\frac{27}{2t^2}\geq\frac{9}{2}\Leftrightarrow 2t^3-9t^2+27\geq 0\Leftrightarrow (t-3)^2(2t+3)\geq 0$.

Deducem că $\min P=\frac{9}{2}$ pentru $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Aplicația60.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then find the minimum value of

$$P=\sqrt{\frac{a^3}{1+bc}}+\sqrt{\frac{b^3}{1+ca}}+\sqrt{\frac{c^3}{1+ab}}$$

Pham Van Tuyen, Vietnam

Soluție

Avem $P=\sum\sqrt{\frac{a^3}{1+bc}}=\sum\sqrt{\frac{a^4}{a+abc}}=\sum\frac{a^2}{\sqrt{a+1}}$.

Lema.

If $a>0$ then

$$\frac{a^2}{\sqrt{a+1}}\geq\sqrt{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{a+1}.$$

$\frac{a^2}{\sqrt{a+1}}+\frac{\sqrt{a+1}}{2}\geq 2\sqrt{\frac{a^2}{\sqrt{a+1}}\cdot\frac{\sqrt{a+1}}{2}}=\sqrt{2}a$, cu egalitate pentru $\frac{a^2}{\sqrt{a+1}}=\frac{\sqrt{a+1}}{2}\Leftrightarrow a=1$.

$$P=\sum\frac{a^2}{\sqrt{a+1}}\overset{Lema}{\geq}\sum\left(\sqrt{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{a+1}\right)=\sqrt{2}\sum a-\frac{1}{2}\sum\sqrt{a+1}=\sqrt{2}\sum a-\frac{1}{2}\sum\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2(a+1)}\overset{AGM}{\geq}$$

$$\overset{AGM}{\geq}\sqrt{2}\sum a-\frac{1}{2}\sum\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2+(a+1)}{2}=\sqrt{2}\sum a-\frac{1}{4\sqrt{2}}\sum(a+3)=\sqrt{2}\sum a-\frac{1}{4\sqrt{2}}a-\frac{9}{4\sqrt{2}}=$$

$$\left(\sqrt{2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)\sum a-\frac{9}{4\sqrt{2}}=\frac{7}{4\sqrt{2}}\sum a-\frac{9}{4\sqrt{2}}=\frac{7}{4\sqrt{2}}\cdot 3-\frac{9}{4\sqrt{2}}=\frac{12}{4\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Deducem că $\min P=\frac{3}{\sqrt{2}}$ pentru $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda\geq 0$ fixed. If $a,b,c>0$, $abc=1$ then find the minimum value of

$$P=\sqrt{\frac{a^3}{\lambda+bc}}+\sqrt{\frac{b^3}{\lambda+ca}}+\sqrt{\frac{c^3}{\lambda+ab}}$$

Marin Chirciu

Soluție

Avem $P=\sum\sqrt{\frac{a^3}{\lambda+bc}}=\sum\sqrt{\frac{a^4}{\lambda a+abc}}=\sum\frac{a^2}{\sqrt{\lambda a+1}}$.

Lema.

If $a>0$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\frac{a^2}{\sqrt{\lambda a+1}}\geq\frac{2a}{\sqrt{\lambda+1}}-\frac{\sqrt{\lambda a+1}}{\lambda+1}.$$

$$\frac{a^2}{\sqrt{\lambda a+1}}+\frac{\sqrt{\lambda a+1}}{\lambda+1}\geq 2\sqrt{\frac{a^2}{\sqrt{\lambda a+1}}\cdot\frac{\sqrt{\lambda a+1}}{\lambda+1}}=\frac{2a}{\sqrt{\lambda+1}},$$

cu egalitate pentru $\frac{a^2}{\sqrt{\lambda a+1}}=\frac{\sqrt{\lambda a+1}}{\lambda+1}\Leftrightarrow a=1$.

$$P=\sum\frac{a^2}{\sqrt{\lambda a+1}}\overset{Lema}{\geq}\sum\left(\frac{2a}{\sqrt{\lambda+1}}-\frac{\sqrt{\lambda a+1}}{\lambda+1}\right)=\frac{2}{\sqrt{\lambda+1}}\sum a-\frac{1}{\lambda+1}\sum\sqrt{\lambda a+1}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\lambda+1}}\sum a-\frac{1}{\lambda+1}\sum\frac{1}{\sqrt{\lambda+1}}\sqrt{(\lambda+1)(\lambda a+1)}\overset{AGM}{\geq}\frac{2}{\sqrt{\lambda+1}}\sum a-\frac{1}{\lambda+1}\sum\frac{1}{\sqrt{\lambda+1}}\frac{(\lambda+1)+(\lambda a+1)}{2}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\lambda+1}}\sum a-\frac{1}{\lambda+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\lambda+1}}\sum(\lambda a+\lambda+2)=\frac{2}{\sqrt{\lambda+1}}\sum a-\frac{1}{\lambda+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\lambda+1}}\left(\lambda\sum a+3\lambda+6\right)=$$

$$=\left(\frac{2}{\sqrt{\lambda+1}}-\frac{1}{\lambda+1}\cdot\frac{\lambda}{2\sqrt{\lambda+1}}\right)\sum a-\frac{1}{\lambda+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\lambda+1}}(3\lambda+6)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\lambda+1}}\left(2-\frac{1}{\lambda+1}\cdot\frac{\lambda}{2}\right)\sum a-\frac{1}{\lambda+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\lambda+1}}(3\lambda+6)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\lambda+1}}\frac{3\lambda+4}{2(\lambda+1)}\sum a-\frac{1}{\lambda+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\lambda+1}}(3\lambda+6)\overset{AGM}{\geq}$$

$$\overset{AGM}{\geq}\frac{1}{\sqrt{\lambda+1}}\frac{3\lambda+4}{2(\lambda+1)}\cdot 3\sqrt[3]{abc}-\frac{1}{\lambda+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\lambda+1}}(3\lambda+6)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\lambda+1}}\frac{3\lambda+4}{2(\lambda+1)}\cdot 3\cdot 1-\frac{1}{\lambda+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\lambda+1}}(3\lambda+6)=$$

$$=\frac{3}{2(\lambda+1)\sqrt{\lambda+1}}\left[(3\lambda+4)-(\lambda+2)\right]=\frac{3\cdot 2(\lambda+1)}{2(\lambda+1)\sqrt{\lambda+1}}=\frac{3}{\sqrt{\lambda+1}}.$$

Deducem că $\min P=\dfrac{3}{\sqrt{\lambda+1}}$ pentru $(a,b,c)=(1,1,1)$.

<u>Aplicația61.</u>

If $x>0$, then find the maximum value of

$$Q=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{x+1}{\sqrt{3x^2+1}}.$$

Dan Teo, Vietnam

<u>Soluție</u>

<u>Lema.</u>

If $x>0$, then

$$\sqrt{x^2+3}+\sqrt{3x^2+1}\leq 2\sqrt{x^2+1}.$$

.

$$\sqrt{x^2+3}+\sqrt{1+3x^2}\leq\sqrt{(1+1)\left(x^2+3+1+3x^2\right)}=2\sqrt{2x^2+2},$$

cu egalitate pentru $\dfrac{1}{x^2+3}=\dfrac{1}{1+3x^2}\Leftrightarrow x=1$.

$$Q=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{x+1}{\sqrt{3x^2+1}}=\frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{3x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+3}\sqrt{3x^2+1}}\overset{Lema}{\leq}\frac{(x+1)\cdot 2\sqrt{2x^2+2}}{\sqrt{x^2+3}\sqrt{3x^2+1}}\overset{(1)}{\leq}2,$$

unde (1) $\Leftrightarrow\dfrac{(x+1)\cdot 2\sqrt{2x^2+2}}{\sqrt{x^2+3}\sqrt{3x^2+1}}\leq 2\Leftrightarrow(x+1)\sqrt{2x^2+2}\leq\sqrt{x^2+3}\sqrt{3x^2+1}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(x+1)^2\left(2x^2+2\right)\leq\left(x^2+3\right)\left(3x^2+1\right)\Leftrightarrow x^4-4x^3+6x^2-4x+1\geq 0\Leftrightarrow(x-1)^4\geq 0.$$

Deducem că $\max Q=2$ pentru $x=1$.

Problema se poate dezvolta.

Let $\frac{5}{4} \leq \lambda \leq \frac{5}{2}$ fixed. If $x \geq 0$ then find the maximum value of

$$Q = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+\lambda^2-1}} + \frac{x+1}{\sqrt{(\lambda^2-1)x^2+1}}.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție</u>

<u>Lema.</u>

If $x \geq 0$ and $\lambda > 1$ then

$$\sqrt{x^2+\lambda^2-1} + \sqrt{(\lambda^2-1)x^2+1} \leq \lambda\sqrt{2x^2+2}.$$

$$\sqrt{x^2+\lambda^2-1} + \sqrt{1+(\lambda^2-1)x^2} \leq \sqrt{(1+1)\left(x^2+\lambda^2-1+1+(\lambda^2-1)x^2\right)} \leq \lambda\sqrt{2x^2+2},$$

cu egalitate pentru $\frac{1}{x^2+\lambda^2-1} = \frac{1}{1+(\lambda^2-1)x^2} \Leftrightarrow x=1$.

$$Q = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+\lambda^2-1}} + \frac{x+1}{\sqrt{(\lambda^2-1)x^2+1}} = \frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2+\lambda^2-1}+\sqrt{(\lambda^2-1)x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+\lambda^2-1}\sqrt{(\lambda^2-1)x^2+1}} \overset{Lema}{\leq}$$

$$\overset{Lema}{\leq} \frac{(x+1)\cdot\lambda\sqrt{2x^2+2}}{\sqrt{x^2+\lambda^2-1}\sqrt{(\lambda^2-1)x^2+1}} \overset{(1)}{\leq} \frac{4}{\lambda}, \text{ unde } (1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)\cdot\lambda\sqrt{2x^2+2}}{\sqrt{x^2+\lambda^2-1}\sqrt{(\lambda^2-1)x^2+1}} \leq \frac{4}{\lambda} \Leftrightarrow (x+1)\cdot\lambda^2\sqrt{2x^2+2} \leq 4\sqrt{x^2+\lambda^2-1}\sqrt{(\lambda^2-1)x^2+1} \Leftrightarrow$$

$(x-1)^2\left[(8\lambda^2-8-\lambda^4)x^2+(16\lambda^2-16-4\lambda^4)x+(8\lambda^2-8-\lambda^4)\right] \geq 0$, care rezultă din condiția din ipoteză $\frac{5}{4} \leq \lambda \leq \frac{5}{2}$, care asigură:

$$\left[(8\lambda^2-8-\lambda^4)x^2+(16\lambda^2-16-4\lambda^4)x+(8\lambda^2-8-\lambda^4)\right] > 0.$$

Deducem că $\max Q = \frac{4}{\lambda}$ pentru $x=1$.

<u>Aplicația62.</u>

If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2=1$ then find the minimum value of

$$P=\frac{a^2}{1+2bc}+\frac{b^2}{1+2ca}+\frac{c^2}{1+2ab}.$$

Trai Tim Do, Vietnam

Soluție

$$P=\sum\frac{a^2}{1+2bc}\overset{AGM}{\geq}\sum\frac{a^2}{1+b^2+c^2}=\sum\frac{a^2}{2-a^2}=\sum\left(-1+\frac{2}{2-a^2}\right)=-3+2\sum\frac{1}{2-a^2}\overset{CS}{\geq}$$

$$\overset{CS}{\geq}-3+2\frac{\left(\sum 1\right)^2}{\sum\left(2-a^2\right)}=-3+2\cdot\frac{9}{6-\sum a^2}=-3+2\cdot\frac{9}{6-1}=-3+2\cdot\frac{9}{5}=\frac{3}{5}.$$

Deducem că $\min P=\frac{3}{5}$ pentru $(a,b,c)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda\geq 0$ fixed. If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2=1$ then find the minimum value of

$$P=\frac{a^2}{1+\lambda bc}+\frac{b^2}{1+\lambda ca}+\frac{c^2}{1+\lambda ab}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Pentru $\lambda=0$ obținem $P=a^2+b^2+c^2=1$. În continuare luăm $\lambda>0$.

$$P=\sum\frac{a^2}{1+\lambda bc}\overset{AGM}{\geq}\sum\frac{a^2}{1+\lambda\frac{b^2+c^2}{2}}=\sum\frac{2a^2}{2+\lambda\left(1-a^2\right)}=\frac{2}{\lambda}\sum\left(-1+\frac{1+\frac{2}{\lambda}}{1+\frac{2}{\lambda}-a^2}\right)=$$

$$=-\frac{6}{\lambda}+\left(1+\frac{2}{\lambda}\right)\frac{2}{\lambda}\sum\frac{1}{1+\frac{2}{\lambda}-a^2}\overset{CS}{\geq}-\frac{6}{\lambda}+\left(1+\frac{2}{\lambda}\right)\frac{2}{\lambda}\frac{\left(\sum 1\right)^2}{\sum\left(1+\frac{2}{\lambda}-a^2\right)}=-\frac{6}{\lambda}+\left(1+\frac{2}{\lambda}\right)\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{9}{3+\frac{6}{\lambda}-\sum a^2}=$$

$$=-\frac{6}{\lambda}+\left(1+\frac{2}{\lambda}\right)\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{9}{3+\frac{6}{\lambda}-1}=-\frac{6}{\lambda}+\left(1+\frac{2}{\lambda}\right)\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{9}{2+\frac{6}{\lambda}}=\frac{3}{\lambda+3}.$$

Deducem că $\min P=\frac{3}{\lambda+3}$ pentru $(a,b,c)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Aplicația63.

If $x,y,z>0$, $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\geq 2022$ then find the minimum value of

$$P=\sum\frac{\sqrt{3x^2+y^2}}{xy}.$$

Pham Van Tuyen, Vietnam

Soluție

$$P=\sum\frac{\sqrt{3x^2+y^2}}{xy}=\sum\sqrt{\frac{3x^2+y^2}{x^2y^2}}=\sum\sqrt{\frac{3}{y^2}+\frac{1}{x^2}}=\sum\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}}\overset{Minkowski}{\geq}$$

$$\overset{Minkowski}{\geq}\sqrt{4\left(\sum\frac{1}{x}\right)^2}=2\sum\frac{1}{x}=\sum\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\overset{CS}{\geq}4\sum\frac{1}{x+y}\overset{Ipoteza}{\geq}4\cdot 2022=8022.$$

Deducem că $\min P=8088$ pentru $(x,y,z)=\left(\frac{3}{4044},\frac{3}{4044},\frac{3}{4044}\right)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $n\in\mathbf{N}$ fixed. If $x,y,z>0$, $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}=\frac{3}{2}$ then find the minimum value of

$$P=\sum\frac{\sqrt{nx^2+y^2}}{xy}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$P=\sum\frac{\sqrt{nx^2+y^2}}{xy}=\sum\sqrt{\frac{nx^2+y^2}{x^2y^2}}=\sum\sqrt{\frac{n}{y^2}+\frac{1}{x^2}}=\sum\sqrt{\underbrace{\frac{1}{y^2}+\ldots+\frac{1}{y^2}}_{n}+\frac{1}{x^2}}\overset{Minkowski}{\geq}$$

$$\overset{Minkowski}{\geq}\sqrt{(n+1)\left(\sum\frac{1}{x}\right)^2}=\sqrt{n+1}\sum\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{n+1}}{2}\sum\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\overset{CS}{\geq}\frac{\sqrt{n+1}}{2}\cdot 4\sum\frac{1}{x+y}\overset{Ipoteza}{\geq}$$

$$\overset{Ipoteza}{\geq}2\sqrt{n+1}\cdot\frac{3}{2}=3\sqrt{n+1}.$$

Deducem că $\min P=3\sqrt{n+1}$ pentru $(x,y,z)=(1,1,1)$.

Aplicația64.

If $x,y,z>0$, $xy^2z^2+x^2z+y=3z^2$ then find the maximum value of

$$P=\frac{z^4}{1+z^4\left(x^4+y^4\right)}.$$

Pham Van Tuyen, Vietnam

Soluție

Cu substituția $(a,b,c)=\left(x,y,\frac{1}{z}\right)$ condiția din ipoteză $xy^2z^2+x^2z+y=3z^2$ se scrie:

$ab^2+bc^2+ca^2=3$ și $P=\frac{z^4}{1+z^4\left(x^4+y^4\right)}$ devine $P=\frac{1}{a^4+b^4+c^4}$.

Problema se reformulează.

If $a,b,c>0$, $ab^2+bc^2+ca^2=3$ then find the maximum value of

$$P=\frac{1}{a^4+b^4+c^4}.$$

$a^4+b^4+b^4+1\geq 4\sqrt[4]{a^4\cdot b^4\cdot b^4\cdot 1}=4ab^2$.

Se scriu și celelalte două inegalități analoage, se sumează și rezultă

$3\left(a^4+b^4+c^4\right)+3\geq 4\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)=4\cdot 3=12\Rightarrow 3\left(a^4+b^4+c^4\right)+3\geq 12\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4\geq 3$.

În final $P=\frac{1}{a^4+b^4+c^4}\leq\frac{1}{3}$.

Deducem că $\max P=\frac{1}{3}$ pentru $(a,b,c)=(1,1,1)\Leftrightarrow(x,y,z)=(1,1,1)$.

Problema se poate dezvolta.

If $x,y,z>0$, $xy^nz^n+x^nz^{n-1}+y=3z^n$, unde $n\in\mathbf{N}^*$, then find the maximum value of

$$P=\frac{z^{n+2}}{1+z^{n+2}\left(x^{n+2}+y^{n+2}\right)}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Cu substituția $(a,b,c)=\left(x,y,\frac{1}{z}\right)$ condiția din ipoteză $xy^nz^n+x^nz^{n-1}+y=3z^n$ se scrie:

$ab^n+bc^n+ca^n=3$ și $P=\frac{z^{n+2}}{1+z^{n+2}\left(x^{n+2}+y^{n+2}\right)}$ devine $P=\frac{1}{a^{n+2}+b^{n+2}+c^{n+2}}$.

Problema se reformulează.

If $a,b,c>0$, $ab^n+bc^n+ca^n=3$, unde $n\in\mathbf{N}^*$ then find the maximum value of

$$P=\frac{1}{a^{n+2}+b^{n+2}+c^{n+2}}.$$

Cu inegalitatea mediilor obținem:

$$a^{n+2}+\underbrace{b^{n+2}+\ldots+b^{n+2}}_{n}+1\geq(n+2)\sqrt[n+2]{a^{n+2}\cdot\underbrace{b^{n+2}\cdot\ldots\cdot b^{n+2}}_{n}\cdot 1}=(n+2)ab^{n}.$$

Se scriu și celelalte două inegalități analoage, se sumează și rezultă

$$(n+1)\left(a^{n+2}+b^{n+2}+c^{n+2}\right)+3\geq(n+2)\left(ab^{n}+bc^{n}+ca^{n}\right)+3=(n+2)\cdot 3\Rightarrow$$
$$(n+1)\left(a^{n+2}+b^{n+2}+c^{n+2}\right)+3\geq(n+2)\cdot 3\Leftrightarrow(n+1)\left(a^{n+2}+b^{n+2}+c^{n+2}\right)\geq 3(n+1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^{n+2}+b^{n+2}+c^{n+2}\geq 3.$$

În final $P=\dfrac{1}{a^{n+2}+b^{n+2}+c^{n+2}}\leq\dfrac{1}{3}$.

Deducem că $\max P=\dfrac{1}{3}$ pentru $(a,b,c)=(1,1,1)\Leftrightarrow(x,y,z)=(1,1,1)$.

Aplicația65.

If $x,y,z>0$ then find the minimum value of

$$P=\left(\frac{x}{y+z}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{y}{z+x}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{z}{x+y}+\frac{1}{2}\right).$$

Pham Van Tuyen, Vietnam

Soluție

Avem $P=\prod\left(\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\prod(2x+y+z)}{\prod(y+z)}=\dfrac{\prod(b+c)}{abc}\overset{Cesaro}{\geq}\dfrac{8abc}{abc}=8$.

Deducem că $\min P=8$ pentru $a=b=c$.

Lema

If $a>0$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\frac{a^{2}}{a+2\lambda+1}\geq\frac{(4\lambda+3)x-2\lambda-1}{4(\lambda+1)^{2}}.$$

Folosim Tangent Line Method pentru funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ $f(x)=\dfrac{x^{2}}{x+2\lambda+1}$ în $x_{0}=1$.

Ecuația tangentei în punctul $x_{0}=1$ este $y-f(x_{0})=f'(x_{0})(x-x_{0})$.

Avem $f'(x)=\dfrac{x^2+2x(2\lambda+1)}{(x+2\lambda+1)^2}$, $f'(1)=\dfrac{4\lambda+3}{4(\lambda+1)^2}$, $f(1)=\dfrac{1}{2(\lambda+1)}$.

Ecuația tangentei în punctul $x_0=1$ este $y-\dfrac{1}{2(\lambda+1)}=\dfrac{4\lambda+3}{4(\lambda+1)^2}(x-1)\Leftrightarrow$

$y=\dfrac{4\lambda+3}{4(\lambda+1)^2}x+\dfrac{-2\lambda-1}{4(\lambda+1)^2}$.

Avem $\dfrac{x^2}{x+2\lambda+1}\geq\dfrac{(4\lambda+3)x-2\lambda-1}{4(\lambda+1)^2}\Leftrightarrow(2\lambda+1)^2(x-1)^2\geq 0$, cu egalitate pentru $x=1$.

Folosind **Lema** obținem:

$$P=\sum\sqrt{\frac{a^3}{1+\lambda bc}}\overset{Lema}{\geq}2\sqrt{\lambda+1}\sum\frac{(4\lambda+3)a-2\lambda-1}{4(\lambda+1)^2}=2\sqrt{\lambda+1}\frac{\sum((4\lambda+3)a-2\lambda-1)}{4(\lambda+1)^2}=$$

$$=2\sqrt{\lambda+1}\frac{(4\lambda+3)\sum a-3(2\lambda+1)}{4(\lambda+1)^2}\overset{AGM}{\geq}2\sqrt{\lambda+1}\frac{(4\lambda+3)\cdot 3\sqrt[3]{abc}-3(2\lambda+1)}{4(\lambda+1)^2}=$$

$$=2\sqrt{\lambda+1}\frac{(4\lambda+3)\cdot 3-3(2\lambda+1)}{4(\lambda+1)^2}=2\sqrt{\lambda+1}\frac{6(\lambda+1)}{4(\lambda+1)^2}=\frac{3}{\sqrt{\lambda+1}}.$$

Deducem că $\min P=\dfrac{3}{\sqrt{\lambda+1}}$ pentru $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Aplicația66.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=xyz$ then find the maximum value of

$$P=\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Pham Van Tuyen, Vietnam

Soluție

Cu inegalitatea mediilor obținem:

$$P=\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{2}{\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}+z^2}}=$$

$$=2\sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}}+\sqrt{\frac{zx}{(y+x)(y+z)}}+\sqrt{\frac{xy}{(z+x)(z+y)}}=$$

$$=2\sqrt{\frac{y}{y+x}\cdot\frac{z}{z+x}}+\sqrt{\frac{x}{x+y}\cdot\frac{z}{z+y}}+\sqrt{\frac{x}{x+z}\cdot\frac{y}{y+z}}\overset{AGM}{\leq}$$

$$\overset{AGM}{\leq}\left(\frac{y}{y+x}+\frac{z}{z+x}\right)+\left(\frac{x}{x+y}+\frac{1}{4}\cdot\frac{z}{z+y}\right)+\left(\frac{x}{x+z}+\frac{1}{4}\cdot\frac{y}{y+z}\right)=$$

$$=\left(\frac{y}{y+x}+\frac{x}{x+y}\right)+\left(\frac{z}{z+x}+\frac{x}{x+z}\right)+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{z}{z+y}+\frac{y}{y+z}\right)=1+1+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$$, cu egalitate pentru:

$$\frac{y}{y+x}=\frac{x}{x+y},\frac{x}{x+y}=\frac{1}{4}\cdot\frac{z}{z+y},\frac{x}{x+z}=\frac{1}{4}\cdot\frac{y}{y+z}\Leftrightarrow y=z,3xy+4xz=yz,3xz+4xy=yz\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=z=7x.$$

Deducem că $\max P=\frac{9}{4}$ pentru $y=z=7x$.

Problema se poate dezvolta.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=xyz$ then find the maximum value of

$$P=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}.$$

<u>Soluție</u>

Cu inegalitatea mediilor obținem:

$$P=\sum\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\sum\frac{1}{\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}+x^2}}=\sum\frac{1}{\sqrt{\frac{xyz+x^2(x+y+z)}{x+y+z}}}=\sum\frac{1}{\sqrt{\frac{x(x+y)(x+z)}{x+y+z}}}=$$

$$=\sum\sqrt{\frac{y}{y+x}\cdot\frac{z}{z+x}}\overset{AGM}{\leq}\sum\frac{1}{2}\left(\frac{y}{y+x}+\frac{z}{z+x}\right)=\frac{3}{2}$$, cu egalitate pentru:

$$\frac{y}{y+x}=\frac{x}{x+y},\frac{z}{z+x}=\frac{x}{x+z},\frac{z}{z+y}=\frac{y}{y+z}\Leftrightarrow x=y=z.$$

Deducem că $\max P=\frac{3}{2}$ pentru $x=y=z=\sqrt{3}$.

<u>Aplicația67.</u>

If $a,b,c>0$, $a+2b+3c\geq 11$ then

$$a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{1}{4c}\geq\frac{37}{4}.$$

Pham Van Tuyen, Vietnam

$$LHS=a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{1}{4c}=\left(\frac{3}{a}+\frac{3a}{4}\right)+\left(\frac{9}{2b}+\frac{b}{2}\right)+\left(\frac{1}{4c}+\frac{c}{4}\right)+\frac{1}{4}(a+2b+3c)\overset{AGM}{\geq}$$

$$\overset{AGM}{\geq} 2\sqrt{\frac{3}{a}\cdot\frac{3a}{4}}+2\sqrt{\frac{9}{2b}\cdot\frac{b}{2}}+2\sqrt{\frac{1}{4c}\cdot\frac{c}{4}}+\frac{1}{4}(a+2b+3c)=2\cdot\frac{3}{2}+2\cdot\frac{3}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot 11=\frac{37}{4},$$

cu egalitate pentru $\frac{3}{a}=\frac{3a}{4}, \frac{9}{2b}=\frac{b}{2}, \frac{1}{4c}=\frac{c}{4}, a+2b+3c=11 \Leftrightarrow (a,b,c)=(2,3,1)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda>\frac{1}{2}$ fixed. If $a,b,c>0$, $a+\lambda b+(2\lambda-1)c=2\lambda^2+2\lambda-1$ then find the minimum value of

$$P=\frac{2}{\lambda}(a+b+c)+\frac{2\lambda-1}{a}+\frac{(2\lambda-1)^2}{\lambda b}+\frac{1}{\lambda^2 c}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$P=\frac{2}{\lambda}(a+b+c)+\frac{2\lambda-1}{a}+\frac{(2\lambda-1)^2}{\lambda b}+\frac{1}{\lambda^2 c}=$$

$$=\left(\frac{2\lambda-1}{a}+\frac{(2\lambda-1)a}{\lambda^2}\right)+\left(\frac{(2\lambda-1)^2}{\lambda b}+\frac{b}{\lambda}\right)+\left(\frac{1}{\lambda^2 c}+\frac{c}{\lambda^2}\right)+\frac{1}{\lambda^2}\left(a+\lambda b+(2\lambda-1)c\right)\overset{AGM}{\geq}$$

$$\overset{AGM}{\geq} 2\sqrt{\frac{2\lambda-1}{a}\cdot\frac{(2\lambda-1)a}{\lambda^2}}+2\sqrt{\frac{(2\lambda-1)^2}{\lambda b}\cdot\frac{b}{\lambda}}+2\sqrt{\frac{1}{\lambda^2 c}\cdot\frac{c}{\lambda^2}}+\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda^2}\left(a+\lambda b+(2\lambda-1)c\right)=$$

$$=2\cdot\frac{2\lambda-1}{\lambda}+2\cdot\frac{2\lambda-1}{\lambda}+2\cdot\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}\cdot\left(2\lambda^2+2\lambda-1\right)=\frac{10\lambda^2-2\lambda+1}{4}$$, cu egalitate pentru:

$\frac{2\lambda-1}{a}=\frac{(2\lambda-1)a}{\lambda^2}, \frac{(2\lambda-1)^2}{\lambda b}=\frac{b}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^2 c}=\frac{c}{\lambda^2}, a+\lambda b+(2\lambda-1)c=2\lambda^2+2\lambda-1 \Leftrightarrow$
$(a,b,c)=(\lambda,2\lambda-1,1)$.

Deducem că $\min P=\frac{10\lambda^2-2\lambda+1}{4}$ pentru $(a,b,c)=(\lambda,2\lambda-1,1)$.

Aplicația68.

If $x,y>0$, $x^3+y^3=2$ then find the minimum value of

$$P=x^2+y^2+\frac{10}{x+y}.$$

Pham Van Tuyen, Vietnam

Soluție

Lema

If $x,y>0$, $x^3+y^3=2$ then

$$x+y\le 2.$$

Din: $2=x^3+y^3\overset{Holder}{\ge}\frac{(x+y)^3}{4}\Rightarrow 2\ge\frac{(x+y)^3}{4}\Rightarrow(x+y)^3\le 8\Rightarrow x+y\le 2$.

Folosind **Lema** obținem:

$$P=x^2+y^2+\frac{10}{x+y}\overset{CS}{\ge}\frac{(x+y)^2}{2}+\frac{10}{x+y}=\left[\frac{(x+y)^2}{2}+\frac{4}{x+y}+\frac{4}{x+y}\right]+\frac{2}{x+y}\overset{AGM}{\ge}$$

$$\overset{AGM}{\ge}3\sqrt[3]{\frac{(x+y)^2}{2}\cdot\frac{4}{x+y}\cdot\frac{4}{x+y}}+\frac{2}{x+y}=3\cdot 2+\frac{2}{x+y}\overset{AGM}{\ge}6+\frac{2}{2}=7.$$

Deducem că $\min P=7$ pentru $(x,y)=(1,1)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda\ge 4n$, $n\in\mathbf{N}$,fixed. If $x,y>0$, $x^{n+1}+y^{n+1}=2$ then find the minimum value of

$$P=x^n+y^n+\frac{\lambda}{x+y}.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție</u>

<u>Lema</u>

If $x,y>0$, $x^{n+1}+y^{n+1}=2$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$x+y\le 2.$$

Din: $2=x^{n+1}+y^{n+1}\overset{Holder}{\ge}\frac{(x+y)^{n+1}}{2^n}\Rightarrow 2\ge\frac{(x+y)^{n+1}}{2^n}\Rightarrow(x+y)^{n+1}\le 2^{n+1}\Rightarrow x+y\le 2$.

$$P=x^n+y^n+\frac{\lambda}{x+y}\overset{CS}{\ge}\frac{(x+y)^n}{2^{n-1}}+\frac{\lambda}{x+y}=\left[\frac{(x+y)^n}{2^{n-1}}+\underbrace{\frac{4}{x+y}+\frac{4}{x+y}+\ldots+\frac{4}{x+y}}_{n}\right]+\frac{\lambda-4n}{x+y}\overset{AGM}{\ge}$$

$$\overset{AGM}{\ge}(n+1)\sqrt[n+1]{\frac{(x+y)^n}{2^{n-1}}\cdot\underbrace{\frac{4}{x+y}\cdot\frac{4}{x+y}\cdot\ldots\cdot\frac{4}{x+y}}_{n}}+\frac{\lambda-4n}{x+y}=(n+1)\cdot 2+\frac{\lambda-4n}{x+y}\overset{Lema}{\ge}$$

$$=2n+2+\frac{\lambda-4n}{2}=\frac{\lambda+4}{2}.$$

Deducem că $\min P = \frac{\lambda+4}{2}$ pentru $(x,y)=(1,1)$.

Aplicația69.

If $a,b,c>0$, $ab+bc+ca+abc=4$ then find the minimum value of

$$P=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

Pham Van Tuyen, Vietnam

Soluție

Decondiționăm relația $ab+bc+ca+abc=4$ cu substituția $(a,b,c)=\left(\frac{2x}{y+z},\frac{2y}{z+x},\frac{2z}{x+y}\right)$.

Problema se reformulează.

If $x,y,z\geq 0$ then find the minimum value of

$$P=\sqrt{\frac{2x}{y+z}}+\sqrt{\frac{2y}{z+x}}+\sqrt{\frac{2z}{x+y}}.$$

Avem: $\sqrt{\frac{2x}{y+z}}=\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{x(y+z)}}\overset{AGM}{\geq}\frac{x\sqrt{2}}{\frac{x+(y+z)}{2}}=\frac{2\sqrt{2}x}{x+y+z}$, cu egalitate dacă $x=y+z$ sau $x=0$.

Obținem $P=\sum\sqrt{\frac{2x}{y+z}}\overset{Lema}{\geq}\sum\frac{2\sqrt{2}x}{x+y+z}=2\sqrt{2}\sum\frac{x}{x+y+z}=2\sqrt{2}\cdot 1=2\sqrt{2}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația70.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=1$ then find the minimum value of

$$P=\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}.$$

Pham Van Tuyen, Vietnam

Lema

If $a,b>0$ then

$$\sqrt{a^2+ab+b^2}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b).$$

Avem $\sqrt{a^2+ab+b^2}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)\Leftrightarrow a^2+ab+b^2\geq\frac{3}{4}(a+b)^2\Leftrightarrow(a-b)^2\geq 0$.

$$P=\sum\sqrt{a^2+ab+b^2}\overset{Lema}{\geq}\sum\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\sum a=\sqrt{3}\cdot 1=\sqrt{3}.$$

Deducem că $\min P=\sqrt{3}$ pentru $(a,b,c)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Problema se poate dezvolta.

Let $|\lambda|\leq 2$ fixed. If $a,b,c>0$, $a+b+c=1$ then find the minimum value of

$$P=\sqrt{a^2+\lambda ab+b^2}+\sqrt{b^2+\lambda bc+c^2}+\sqrt{c^2+\lambda ca+a^2}.$$

Marin Chirciu

Lema

If $a,b>0$ and $|\lambda|\leq 2$ then

$$\sqrt{a^2+\lambda ab+b^2}\geq\frac{\sqrt{\lambda+2}}{2}(a+b).$$

Avem $\sqrt{a^2+\lambda ab+b^2}\geq\frac{\sqrt{\lambda+2}}{4}(a+b)\Leftrightarrow a^2+\lambda ab+b^2\geq\frac{\lambda+2}{4}(a+b)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(2-\lambda)(a-b)^2\geq 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b$ sau $\lambda=2$.

Folosind **Lema** obținem:

$$P=\sum\sqrt{a^2+\lambda ab+b^2}\overset{Lema}{\geq}\sum\frac{\sqrt{\lambda+2}}{2}(a+b)=\frac{\sqrt{\lambda+2}}{2}\cdot 2\sum a=\sqrt{\lambda+2}\cdot 1=\sqrt{\lambda+2}.$$

Deducem că $\min P=\sqrt{\lambda+2}$ pentru $(a,b,c)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Bibliografie:

1. C.Năstăsescu, C.Niță, M.Brandiburu, D. Joița , Exerciții de algebră, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1992.
2. Rin Huynh, THCS 6/2022, Vietnam.
3. Hoanghai Nguyen, THCS 6/2022, Vietnam.
4. Neculai Stanciu, RMM 6/ 2022.
5. Quan Nguyen, THCS 6/2022, Vietnam.
6. Bui Xuan Truong, , THCS 6/2022, Vietnam.
7. Pham Van Tuyen, THCS 6/2022 ,Vietnam.
8. Amir Sofi, Matematika 6/2022, Kosovo.
9. Vinh Duy, THCS 5/2022, Vietnam.
10. Tranh Linh, THCS 5/2022, Vietnam.

11. Doan Movic, THCS 5/2022, Vietnam.
12. Ha Quoc Cuong, THCS 5/2022, Vietnam.
13. Tran Nam, THCS 5/2022, Vietnam.
14. Van Luan Nguyen, THCS 5/2022, Vietnam.
15. Biswajt Ghosh, Higher Secondary Mathematics 10/2021.
16. Hoang Le, THCS 5/2022, Vietnam.
17. Thu Hue, THCS 4/2022, Vietnam.
18. Hai Nguyen Tran, THCS 4/2022, Vietnam.
19. Thu Trang, THCS 4/2022, Vietnam.
20. Tien Dung, THCS 4/2022, Vietnam.
21. Huyen Dinh, THCS 4/2022, Vietnam.
22. Anibal Asperphys, Sensei del Algebra 4/2022.
23. Tran Ha, THCS 4/2022, Vietnam.
24. Dan Teo, THCS 4/2022, Vietnam.
25. Trai Tim Do, THCS 4/2022, Vietnam.
26. Daniel Sitaru, RMM Number 4, New Edition 2022.
27. Marin Chirciu, Inegalități algebrice 2, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2021.

Art 3888

23 August 2022

2. În legătură cu problemele IX.15-18 din RMM, nr. 28-spring edition 2021-paper variant

de Gheorghe Ghiţă, Buzău

Pornind de la problemele IX.15-18 din RMM, nr. 28-spring edition 2021-paper variant , articolul prezintă o generalizare a lor, precum şi alte inegalităţi de acelaşi tip în triunghi. Vom utiliza următoarele inegalităţi(cu notaţiile uzuale în triunghi):

$(H) - Hölder$: $a_i \geq 0, b_i > 0, p \geq 1, 0 \leq r \leq p-1, i = \overline{1,n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^p}{b_i^r} \geq \frac{(\sum a_i)^p}{n^{p-r-1}(\sum b_i)^r}$

$(B) -$ Bergström: $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0; x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{x_k} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} x_k}$;

(G) - Gerretsen: $16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$; (M)-Mitrinovic: $3\sqrt{3}r \leq p \leq \frac{3\sqrt{3}R}{2}$ (E) - Euler: $R \geq 2r$; (P) – Panaitopol: $m_a \leq \frac{pR}{a}$;$(D) - Doucet$: $4R + r \geq p\sqrt{3}$;

A1) Dacă $x \in R, m, k \geq 0, m + k \geq 2$ atunci în ΔABC are loc inegalitatea:

$$\frac{a^m}{(acos^2x+bsin^2x)h_a^k} + \frac{b^m}{(bcos^2x+csin^2x)h_b^k} + \frac{c^m}{(ccos^2x+asin^2x)h_c^k} \geq \frac{(2p)^{m-1}}{3^{m+k-2}r^k}. \qquad (1)$$

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Soluţie. $\sum \frac{a^m}{(acos^2x+bsin^2x)h_a^k} = \sum \frac{a^m}{(acos^2x+bsin^2x)\left(\frac{2S}{a}\right)^k} = \frac{1}{2^k S^k} \sum \frac{a^{m+k}}{acos^2x+bsin^2x} \overset{(H)}{\geq}$ $\frac{(\sum a)^{m+k}}{2^k 3^{m+k-2} S^k \sum(acos^2x+bsin^2x)} = \frac{(2p)^{m+k}}{2^k 3^{m+k-2} p^k r^k \sum(acos^2x+asin^2x)} = \frac{2^m p^m}{r^k 3^{m+k-2} \sum a} = \frac{2^m p^m}{r^k 3^{m+k-2} \cdot 2p} =$ $\frac{2^{m-1}p^{m-1}}{3^{m+k-2}r^k}$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Observaţii. 1) Pentru $m = 2, k = 1$ din (1)se obţine inegalitatea IX.15:

$$\frac{a^2}{(acos^2x+bsin^2x)h_a} + \frac{b^2}{(bcos^2x+csin^2x)h_b} + \frac{c^2}{(ccos^2x+asin^2x)h_c} \geq \frac{2p}{3r} \overset{(M)}{\geq} \frac{2 \cdot 3\sqrt{3}r}{3r} \geq 2\sqrt{3}.$$

propusă de D.M. Bătineţu-Giurgiu, Nicolae Muşuroia

2) Pentru $m = 1, k = 2$ din (1) se obţine inegalitatea IX.16:

$$\frac{a}{(acos^2x+bsin^2x)h_a^2} + \frac{b}{(bcos^2x+csin^2x)h_b^2} + \frac{c}{(ccos^2x+asin^2x)h_a^2} \geq \frac{1}{3r^2} = \frac{p}{3pr^2} = \frac{p}{3Sr} \overset{(M)}{\geq} \frac{3\sqrt{3}r}{3Sr} = \frac{\sqrt{3}}{S}$$

propusă de D.M. Bătineţu-Giurgiu, Gheorghe Stoica

3) Pentru $m = 0, k = 3$ din (1) se obţine inegalitatea IX.17:

$$\frac{1}{(acos^2x+bsin^2x)h_a^3}+\frac{1}{(bcos^2x+csin^2x)h_b^3}+\frac{1}{(ccos^2x+asin^2x)h_b^3}\geq\frac{(2p)^{-1}}{3r^3}=\frac{1}{6pr^3}=$$

$$\frac{p}{6p^2r^3}\overset{S=pr}{\cong}\frac{p}{6S^2r}\overset{(M)}{\geq}\frac{3\sqrt{3}r}{6S^2r}=\frac{\sqrt{3}}{2S^2}$$

propusă de D.M. Bătineţu-Giurgiu,Cătălin Pană

A2) Dacă $m,k\geq 0; m+k\geq 2, x$,y,z> 0 atunci în ΔABC are loc inegalitatea:

$$\frac{x^{m+k}a^{2m}}{(y+z)^{m+k}h_a^{2k}}+\frac{y^{m+k}b^{2m}}{(z+x)^{m+k}h_b^{2k}}+\frac{z^{m+k}b^{2m}}{(z+x)^{m+k}h_c^{2k}}\geq 2^{m-k}\left(\sqrt{3}\right)^{2-m-k}S^{m-k}. \quad (2)$$

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Soluţie. $\sum\frac{x^{m+k}a^{2m}}{(y+z)^{m+k}h_a^{2k}}=\frac{1}{2^{2k}S^{2k}}\sum\frac{x^{m+k}a^{2m+2k}}{(y+z)^{m+k}}=\frac{1}{2^{2k}S^{2k}}\sum\left(\frac{x}{y+z}a^2\right)^{m+k}\overset{(H)}{\geq}\frac{1}{2^{2k}S^{2k}}\cdot$

$\frac{\left(\sum\frac{x}{y+z}a^2\right)^{m+k}}{3^{m+k-1}}=\frac{\left(\sum\left(\frac{x}{y+z}+1-1\right)a^2\right)^{m+k}}{2^{2k}S^{2k}.3^{m+k-1}}=\frac{\left(\sum x\sum\frac{a^2}{y+z}-\sum a^2\right)^{m+k}}{2^{2k}S^{2k}.3^{m+k-1}}\overset{(B)}{\geq}\frac{\left(\sum x\frac{(\sum a)^2}{2\sum x}-\sum a^2\right)^{m+k}}{2^{2k}S^{2k}.3^{m+k-1}}=$

$\frac{\left(\frac{(\sum a)^2-2\sum a^2}{2}\right)^{m+k}}{2^{2k}S^{2k}.3^{m+k-1}}=\frac{\left(\frac{2\sum ab-\sum a^2}{2}\right)^{m+k}}{2^{2k}S^{2k}.3^{m+k-1}}=$

$\frac{\left(\frac{4r^2+16Rr}{2}\right)^{m+k}}{2^{2k}S^{2k}.3^{m+k-1}}=\frac{(2r(4R+r))^{m+k}}{2^{2k}S^{2k}.3^{m+k-1}}\overset{(D)}{\geq}\frac{(2r\cdot p\sqrt{3})^{m+k}}{2^{2k}S^{2k}.3^{m+k-1}}=\frac{2^{m+k}(\sqrt{3})^{m+k}S^{m+k}}{2^{2k}S^{2k}.3^{m+k-1}}=$

$2^{m-k}\left(\sqrt{3}\right)^{2-m-k}S^{m-k}$; unde $\sum ab=p^2+r^2+4Rr$ şi $\sum a^2=2p^2-2r^2-8Rr$.

Observaţie. Pentru $k=1$ din (2) se obţine inegalitatea IX.18:

$$\frac{x^{m+1}a^{2m}}{(y+z)^{m+1}h_a^2}+\frac{y^{m+1}b^{2m}}{(z+x)^{m+1}h_b^2}+\frac{z^{m+1}c^{2m}}{(x+y)^{m+1}h_c^2}\geq 2^{m-1}\left(\sqrt{3}\right)^{1-m}S^{m-1}$$

propusă de D.M. Bătineţu-Giurgiu, Claudiu Ciulcu

A3) Dezvoltare A1: Dacă $m,k\geq 0; m+k\geq 2, t$,u> 0 atunci în ΔABC are loc inegalitatea:

$$\frac{a^m}{(at+bu)h_a^k}+\frac{b^m}{(bt+cu)h_b^k}+\frac{a^m}{(ct+au)h_c^k}\geq\frac{(2p)^{m-1}}{3^{m+k-2}(t+u)r^k}.$$

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Soluţie. $\sum\frac{a^m}{(at+bu)h_a^k}=\frac{1}{2^kS^k}\sum\frac{a^{m+k}}{at+bu}\overset{(H)}{\geq}\frac{(\sum a)^{m+k}}{2^k.3^{m+k-2}S^k\sum(at+bu)}=\frac{(\sum a)^{m+k}}{2^k.3^{m+k-2}S^k(t+u)\sum a}=$

$\frac{(\sum a)^{m+k-1}}{2^k.3^{m+k-2}S^k(t+u)}=\frac{2^{m+k-1}p^{m+k-1}}{2^k.3^{m+k-2}2^kS^k(t+u)}=\frac{(2p)^{m-1}}{3^{m+k-2}(t+u)r^k}$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Observaţie. Pentru $t=cos^2x, u=sin^2x$ se obţine inegalitatea A1.

A4) Dacă $m,k\geq 0; m+k\geq 2; t$,u> 0 atunci în ΔABC are loc inegalitatea:

$$\frac{a^m}{(at+bu)(bc)^k}+\frac{b^m}{(bt+cu)(ca)^k}+\frac{c^m}{(ct+au)(ab)^k}\geq\frac{(2r)^{m-k-1}\left(\sqrt{3}\right)^{m-2k+1}}{R^k(t+u)}$$

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Soluţie.$\sum\frac{a^m}{(at+bu)(bc)^k}=\sum\frac{a^{m+k}}{(at+bu)(abc)^k}=\frac{1}{(4RS)^k}\sum\frac{a^{m+k}}{at+bu}\overset{(H)}{\geq}\frac{(\sum a)^{m+k}}{3^{m+k-2}(4RS)^k\sum(at+bu)}=$
$\frac{2^{m+k}p^{m+k}}{2^{2k}3^{m+k-2}R^kp^kr^k\sum(at+au)}=\frac{2^{m+k}p^{m+k}}{2^{2k}3^{m+k-2}R^kp^kr^k(t+u)\sum a}=\frac{2^{m-k-1}p^{m-1}}{3^{m+k-2}R^kr^k(t+u)}\overset{(M)}{\geq}$
$\frac{2^{m-k-1}(\sqrt{3})^{3m-3}r^{m-1}}{3^{m+k-2}R^kr^k(t+u)}=\frac{2^{m-k-1}(\sqrt{3})^{m-2k+1}r^{m-k-1}}{R^k(t+u)}=\frac{(2r)^{m-k-1}(\sqrt{3})^{m-2k+1}}{R^k(t+u)}$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

A5) Dacă $m\geq 2$ atunci în ΔABC are loc inegalitatea:

$$\frac{a^m}{(b+c)r_a^m}+\frac{b^m}{(c+a)r_b^m}+\frac{c^m}{(a+b)r_c^m}\geq\frac{1}{R}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{m-1}$$

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Soluţie. $\sum\frac{a^m}{(b+c)r_a^m}=\sum\frac{a^m}{(b+c)\left(\frac{S}{p-a}\right)^m}=\frac{1}{S^m}\sum\frac{(ap-a^2)^m}{b+c}\overset{(H)}{\geq}\frac{(\sum(ap-a^2))^m}{3^{m-2}S^m\sum(b+c)}=\frac{(p\sum a-\sum a^2)^m}{2\cdot 3^{m-2}S^m\sum a}=$
$\frac{(2p^2-2p^2+2r^2+8Rr)^m}{2\cdot 3^{m-2}S^m\sum a}=\frac{(2r(4R+r))^m}{2\cdot 3^{m-2}S^m\sum a}=\frac{2^{m-2}r^m(4R+r)^m}{3^{m-2}p^{m+1}r^m}=\frac{2^{m-2}(4R+r)^m}{3^{m-2}p^{m+1}}\overset{(D)}{\geq}\frac{2^{m-2}(p\sqrt{3})^m}{3^{m-2}p^{m+1}}=$
$\frac{2^{m-2}}{(\sqrt{3})^{m-4}p}\overset{(M)}{\geq}\frac{1}{R}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{m-1}$,unde $\sum a^2=2p^2-2r^2-8Rr$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

A6) Dacă $m\geq 2$ atunci în ΔABC are loc inegalitatea:

$$\frac{m_a^{2m}}{(2p-a)a^m}+\frac{m_b^{2m}}{(2p-b)b^m}+\frac{m_c^{2m}}{(2p-c)c^m}\geq\frac{9p^{m-1}}{2^{m+2}}.$$

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Soluţie. Utilizăm inegalităţile:

a) $m_a\geq\sqrt{p(p-a)}$, adevărată, din $\sqrt{\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}}\geq\sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{4}}\Leftrightarrow 2b^2+2c^2-a^2\geq(b+c)^2-a^2\Leftrightarrow(b+c)^2\geq 0$;

b) $p^2+r^2-8Rr\geq 6Rr\Leftrightarrow p^2\geq 14Rr-r^2$, adevărată, din $p^2\overset{(G)}{\geq}16Rr-5r^2$ şi $16Rr-5r^2\geq 14Rr-r^2\Leftrightarrow R\overset{(E)}{\geq}2r$.

Avem: $\sum\frac{m_a^{2m}}{(2p-a)a^m}\geq\sum\frac{\left(\sqrt{p(p-a)}\right)^{2m}}{(b+c)a^m}=p^m\sum\frac{\left(\frac{p-a}{a}\right)^m}{b+c}\overset{(H)}{\geq}p^m\frac{\left(\sum\frac{p-a}{a}\right)^m}{3^{m-2}\sum(b+c)}=$
$p^m\frac{\left(\frac{p^2+r^2-8Rr}{4Rr}\right)^m}{2\cdot 3^{m-2}\sum a}\overset{b)}{\geq}\frac{p^{m-1}\left(\frac{6Rr}{4Rr}\right)^m}{4\cdot 3^{m-2}}=\frac{9p^{m-1}}{2^{m+2}}$, unde $\sum\frac{p-a}{a}=\frac{p^2+r^2-8Rr}{4Rr}$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

A7) Dacă $m\geq 2$ atunci în ΔABC are loc inegalitatea:

$$\frac{m_a^m}{m_b m_c}+\frac{m_b^m}{m_c m_a}+\frac{m_c^m}{m_a m_b}\geq\frac{4\cdot 3^{m-1}r^m}{R^2}.$$

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Soluţie. Utilizăm inegalităţile:

a) $m_b m_c\leq\frac{2a^2+bc}{4}$, adevărată, deoarece inegalitatea se scrie echivalent: $m_b^2 m_c^2\leq\frac{(2a^2+bc)^2}{16}$ $\Leftrightarrow (2a^2+2c^2-b^2)(2a^2+2b^2-c^2)\leq(2a^2+bc)^2 \Leftrightarrow 2(b-c)^2(a+b+c)(-a+b+c)\geq 0$;

b) $5p^2-12Rr-3r^2\leq 27R^2 \Leftrightarrow 5p^2\leq 27R^2+12Rr+3r^2$, adevărată din $5p^2\overset{(G)}{\leqq} 20R^2+20Rr+15r^2$ şi $20R^2+20Rr+15r^2\leq 27R^2+12Rr+3r^2\Leftrightarrow 7R^2-8Rr-12r^2\geq 0\Leftrightarrow(R-2r)(7R+6r)\overset{(E)}{\geqq}0$;

c) $\sum m_b m_c\leq\frac{27R^2}{4}$, adevărată din faptul că $\sum m_b m_c\overset{a)}{\leqq}\sum\frac{2a^2+bc}{4}=\frac{2\sum a^2+\sum bc}{4}=\frac{2(2p^2-2r^2-8Rr)+p^2+r^2+4Rr}{4}=\frac{5p^2-12Rr-3r^2}{4}\overset{b)}{\leqq}\frac{27R^2}{4}$, unde $\sum a^2=2p^2-2r^2-8Rr$, $\sum bc=p^2+r^2+4Rr$.

Avem $\sum\frac{m_a^m}{m_b m_c}\overset{(H)}{\geqq}\frac{(\sum m_a)^m}{3^{n-2}\sum m_b m_c}\overset{c)}{\geqq}\frac{(\sum m_a)^m}{3^{n-2}\frac{27R^2}{4}}=\frac{4(\sum m_a)^m}{3^{n+1}R^2}\overset{(*)}{\geqq}\frac{4(9r)^m}{3^{n+1}R^2}=\frac{4\cdot 3^{m-1}r^m}{R^2}$, unde $(*)$: $\sum m_a\geq 9r$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

A8) Dacă $m\geq 2$ atunci în ΔABC are loc inegalitatea:

$$\frac{m_a^m}{am_b m_c}+\frac{m_b^m}{bm_c m_a}+\frac{m_a^m}{cm_a m_b}\geq\frac{4\cdot 3^{m-2}\sqrt{3}r^m}{R^3}.$$

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Soluţie. Utilizăm inegalităţile:

a) $p^2-3r^2-3Rr\leq\frac{9R^2}{2}\Leftrightarrow 2p^2\leq 9R^2+6Rr+6r^2$, adevărată din $2p^2\overset{(G)}{\leqq}8R^2+8Rr+6r^2$, $8R^2+8Rr+6r^2\leq 9R^2+6Rr+6r^2\Leftrightarrow R(R-2r)\overset{(E)}{\geqq}0$;

b) $\sum am_b m_c\leq\frac{27\sqrt{3}R^3}{4}$, adevărată , deoarece $\sum am_b m_c\overset{(A7a)}{\leqq}\sum a\frac{2a^2+bc}{4}=\frac{1}{4}(2\sum a^3+3abc)\overset{(*)}{\leqq}\frac{1}{4}(4p(p^2-3r^2-6Rr)+12pRr)=p(p^2-3r^2-3Rr)\leq\frac{27\sqrt{3}R^3}{4}$, unde $(*)$: $\sum a^3\geq 2p(p^2-3r^2-6Rr)$.

Ave m: $\sum\frac{m_a^m}{am_b m_c}\overset{(H)}{\geqq}\frac{(\sum m_a)^m}{3^{n-2}\sum am_b m_c}\overset{b)}{\geqq}\frac{(\sum m_a)^m}{3^{n-2}\frac{27\sqrt{3}R^3}{4}}\geq\frac{4(9r)^m}{3^{n+1}\sqrt{3}R^3}=\frac{4\cdot 3^{m-2}\sqrt{3}r^m}{R^3}$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

A9) Dacă $m \geq 2$ atunci în ΔABC are loc inegalitatea:

$$\frac{r_a^m}{ar_br_c} + \frac{r_b^m}{br_cr_a} + \frac{r_c^m}{cr_cr_a} \geq \frac{4\cdot 3^{m-2}\sqrt{3}r^m}{R^3}.$$

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Soluţie. Utilizând inegalitatea:

$\sum ar_br_c \leq \frac{27\sqrt{3}R^3}{4}$, adevărată, pentru că $\sum ar_br_c = \sum a\frac{S^2}{(p-b)(p-c)} = S^2\frac{\sum a(p-a)}{(p-a)(p-b)(p-c)} =$ $pS^2\frac{\sum a(p-a)}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pS^2\frac{p\sum a - \sum a^2}{S^2} = p\left(2p^2 - (2p^2 - 2r^2 - 8Rr)\right) = 2pr(4R+r) \overset{(M)}{\leq}$ $3\sqrt{3}Rr(4R+r) \overset{(E)}{\leq} \frac{27\sqrt{3}R^3}{4}$, unde $\sum a^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr$, avem:

$\sum\frac{r_a^m}{ar_br_c} \overset{(H)}{\geq} \frac{(\sum r_a)^m}{3^{n-2}\sum ar_br_c} \geq \frac{(\sum r_a)^m}{3^{n-2}\frac{27\sqrt{3}R^3}{4}} = \frac{4\sqrt{3}(\sum r_a)^m}{3^{n+2}R^3} \overset{(*)}{\geq} \frac{4\sqrt{3}(9r)^m}{3^{n+2}R^3} = \frac{4\cdot 3^{m-2}\sqrt{3}r^m}{R^3}$, unde $(*)\colon \sum r_a \geq$ $9r$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

A10) Dacă $m \geq 2$ atunci în ΔABC are loc inegalitatea:

$$\frac{h_a^m}{ah_bh_c} + \frac{h_a^m}{ah_bh_c} + \frac{h_a^m}{ah_bh_c} \geq \frac{4\cdot 3^{m-2}\sqrt{3}r^m}{R^3}.$$

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Soluţie . Utilizăm inegalităţile:

a) $p^2 - r^2 - 4Rr \leq \frac{9R^2}{2} \Leftrightarrow 2p^2 \leq 9R^2 + 8Rr + 2r^2$, advărată din $2p^2 \overset{(G)}{\leq} 8R^2 + 8Rr +$ $6r^2$ şi $8R^2 + 8Rr + 6r^2 \leq 9R^2 + 8Rr + 2r^2 \Leftrightarrow (R-2r)(R+2r) \overset{(E)}{\geq} 0$

b) $\sum ah_bh_c \leq \frac{27\sqrt{3}R^3}{4}$, adevărată din $\sum ah_bh_c = \sum a\frac{4S^2}{bc} = 4S^2\sum\frac{a}{bc} = \quad 4S^2\frac{\sum a^2}{abc} =$ $4S^2\frac{2(p^2-r^2-4Rr)}{4RS} = \frac{2pr(p^2-r^2-4Rr)}{R} \overset{a)}{\leq} 9pRr \overset{(M)}{\leq} \frac{27\sqrt{3}R^2r}{2} \overset{(E)}{\leq} \frac{27\sqrt{3}R^3}{4}$, unde $\sum a^2 = 2p^2 -$ $2r^2 - 8Rr$.

Avem: $\sum\frac{h_a^m}{ah_bh_c} \overset{(H)}{\geq} \frac{(\sum h_a)^m}{3^{m-2}\sum ah_bh_c} \geq \frac{(\sum h_a)^m}{3^{m-2}\frac{27\sqrt{3}R^3}{4}} = \frac{4(\sum h_a)^m}{3^{m+1}\sqrt{3}R^3} \overset{(*)}{\geq} \frac{4(9r)^m}{3^{m+1}\sqrt{3}R^3} = \frac{4\cdot 3^{n-2}\sqrt{3}r^m}{R^3}$, unde $(*)\colon \sum h_a \geq 9r$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

A11) Dacă $m \geq 2$ atunci în ΔABC are loc inegalitatea:

$$\frac{w_a^m}{aw_bw_c} + \frac{w_a^m}{aw_bw_c} + \frac{w_a^m}{aw_bw_c} \geq \frac{4\cdot 3^{m-2}\sqrt{3}r^m}{R^3},$$

unde w_a este bisectoarea unghiului A.

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Solţie. Utilizăm inegalităţile:

a) $w_a \leq \sqrt{p(p-a)} \Leftrightarrow \frac{2bc}{b+c} \cos\frac{A}{2} \leq \sqrt{p(p-a)} \Leftrightarrow \frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \leq \sqrt{p(p-a)} \Leftrightarrow \left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2 \geq 0$

b) $\sum aw_bw_c \leq \sum a\sqrt{p(p-b)}\sqrt{p(p-c)} = p\sum a\sqrt{(p-b)(p-c)} \overset{MG\leq MA}{\leqq}$ $p\sum a\frac{p-b+p-c}{2} = \frac{p}{2}\sum a^2 = \frac{p}{2}(p^2-r^2-4Rr) \overset{(A10a)}{\leqq} \frac{27\sqrt{3}R^3}{4}$, unde $\sum a^2 = 2p^2-2r^2-8Rr$.

Avem: $\sum\frac{w_a^m}{aw_bw_c} \overset{(H)}{\geqq} \frac{(\sum w_a)^m}{3^{n-2}\sum aw_bw_c} \geq \frac{(\sum w_a)^m}{3^{n-2}\frac{27\sqrt{3}R^3}{4}} = \frac{4(\sum w_a)^m}{3^{n+1}\sqrt{3}R^3} \overset{(*)}{\geqq} \frac{4(9r)^m}{3^{n+1}\sqrt{3}R^3} = \frac{4\cdot 3^n\sqrt{3}r^m}{R^3}$, unde $(*)\colon \sum w_a \geq 9r$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

A12) Dacă $m \geq 2$ atunci în ΔABC are loc inegalitatea:

$$\frac{s_a^m}{as_bs_c} + \frac{s_a^m}{as_bs_c} + \frac{s_a^m}{as_bs_c} \geq \frac{4\cdot 3^{m-2}\sqrt{3}r^m}{R^3},$$

unde $s_a$este simediana din A.

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Soluţie.; Utilizând inegalitatea:

$\sum as_bs_c \leq \sum a\sqrt{p(p-b)}\sqrt{p(p-c)} = p\sum a\frac{p-b+p-c}{2} = \frac{p}{2}\sum a^2 = \frac{p}{2}(p^2-r^2-4Rr) \overset{(A10a)}{\leqq} \frac{9pR^2}{4} \leq \frac{27\sqrt{3}R^3}{4}$, avem:

$\sum\frac{s_a}{as_bs_c} \overset{(H)}{\geqq} \frac{(\sum s_a)^m}{3^{n-2}\sum as_bs_c} \geq \frac{(\sum s_a)^m}{3^{n-2}\frac{27\sqrt{3}R^3}{4}} = \frac{4(\sum s_a)^m}{3^{n+1}\sqrt{3}R^3} \overset{(*)}{\geqq} \frac{4(9r)^m}{3^{n+1}\sqrt{3}R^3} = \frac{4\cdot 3^{n-2}\sqrt{3}r^m}{R^3}$, unde $(*)\colon \sum s_a \geq 9r$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

A13) Dacă $n \geq 2$ atunci în ΔABC are loc inegalitatea:

$$\frac{m_a^m}{ar_br_c} + \frac{m_a^m}{ar_br_c} + \frac{m_a^m}{ar_br_c} \geq \frac{4\cdot 3^{m-2}\sqrt{3}r^m}{R^3}.$$

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Soluţie. $\sum\frac{m_a^m}{ar_br_c} \overset{(H)}{\geqq} \frac{(\sum m_a)^m}{3^{n-2}\sum ar_br_c} \overset{(A9)}{\geqq} \frac{(\sum m_a)^m}{3^{n-2}\frac{27\sqrt{3}R^3}{4}} = \frac{4\sqrt{3}(\sum m_a)^m}{3^{n+2}R^3} \overset{(*)}{\geqq} \frac{4\sqrt{3}(\sum 9r)^m}{3^{n+2}R^3} = \frac{4\cdot 3^{m-2}\sqrt{3}r^m}{R^3}$, unde $(*)\sum m_a \geq 9r$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

A14) Dacă $m \geq 2$ atunci în ΔABC are loc inegalitatea:

$$\frac{h_a^m}{2r_a+h_a} + \frac{h_a^m}{2r_a+h_a} + \frac{h_a^m}{2r_a+h_a} \geq \frac{2\cdot 3^{m-1}r^m}{R}.$$

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Soluţie. Utilizând inegalităţile:

a) $p^2+(4R+r)^2 \leq 27R^2 \Leftrightarrow p^2 \leq 11R^2-8Rr-r^2$, adevărată din $p^2 \overset{(G)}{\leq} 4R^2+3Rr+3r^2$ şi $4R^2+3Rr+3r^2 \leq 11R^2-8Rr-r^2 \Leftrightarrow (R-2r)(7R+2r) \overset{(E)}{\geq} 0$;

b) $\sum(2r_a+h_a)=\sum\left(\frac{2S}{p-a}+\frac{2S}{a}\right)=2pS\sum\frac{1}{a(p-a)}=2p^2r\frac{p^2+(4R+r)^2}{4p^2Rr} \overset{a)}{\leq} \frac{27R^2}{2R}=\frac{27R}{2}$, unde $\sum\frac{1}{a(p-a)}=\frac{p^2+(4R+r)^2}{4p^2Rr}$,

avem: $\sum\frac{h_a^m}{2r_a+h_a} \overset{(H)}{\geq} \frac{(\sum h_a)^m}{3^{n-2}\sum(2r_a+h_a)} \overset{(*)}{\geq} \frac{(9r)^m}{3^{n-2}\sum(2r_a+h_a)} \overset{b)}{\geq} \frac{(9r)^m}{3^{n-2}\frac{27R}{2}}=\frac{2\cdot 3^{2m}r^m}{3^{n+1}R}=\frac{2\cdot 3^{m-1}r^m}{R}$, unde $(*)$: $\sum h_a \geq 9r$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Bibliografie

1. Romanian Mathematical Magazine, nr. 28-spring edition 2021-paper variant
2. Revista Electronică de Matematică MateInfo 2019
3. Revista de Matematică Sclipirea Minţii 2020

3. Punctele de maxim şi de minim în programa şcolară. Consideraţii metodice

Profesor: Ungureanu Angelica-Mihaela
Liceul "Alexandru cel Bun" Botoșani

Importanţa practică a problemelor de maximşi minim este de necontestat. În gimnaziu se studiază foarte puţin asemenea probleme, deoarece ele solicită procedee mai deosebite pentru rezolvare. Problemele de maxim şi de minim le regăsim în programa Olimpiadei de Matematică şi a Centrelor de Excelenţa pentru clasele a VII-a, nefiind accesibile tuturor elevilor. Problemele din această categorie nu sunt uşor de abordat fără a stăpâni anumite tehnici de rezolvare. Iată câteva dintre acestea:

- Folosirea unor teoreme care ne ajută la determinarea maximului şi minimului:

Teoremă

Dacă suma mai multor variabile pozitive este constantă, maximul produsului are loc când variabilele sunt egale.

Dacă $x_1, x_2, \dots, x_n, \in \mathbb{R}_+^*$ cu suma $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ constantă, atunci produsul lor $P = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$ este maxim dacă $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Dacă $P = {x_1}^{\alpha_1}{x_2}^{\alpha_2} \dots {x_n}^{\alpha_n}$, cu $\alpha_i \in \mathbb{N}^*, (\forall) i = \overline{1, n}$, maximul lui P are loc atuci când $\frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{x_2}{\alpha_2} = \dots = \frac{x_n}{\alpha_n}$

Teoremă

Dacă produsul mai multor variabile pozitive este constant, atunci suma lor este minimă dacă variabilele sunt egale.

Dacă $x_1, x_2, \dots, x_n, \in \mathbb{R}_+^*$ cu produsul $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$ constant, atunci suma lor $S = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ este maximă dacă $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

- Folosirea unor inegalităţi remarcabile (a mediilor, a lui Cauchy- Buniakovschi-Schwarz, a lui Minkovski, etc);
- În geometrie, printre altele, se folosesc:
  - metoda reflexiei (completarea figurii iniţiale cu simetrica ei în raport cu o dreaptă);

– metoda liniei frânte (minimul sumei lungimilor unor segmente ce formează o linie frâtă cu extremităţile fixe A, B este lungimea segmentului A, B.

În programa şcolară pentru clasele de gimnaziu, noţiunile de puncte de minim şi maxim nu sunt prevăzute explicit ci sunt percepute prin raportul lor cu alte noţiuni matematice. Ele sunt corelate iniţial cu problemele de comparare a numerelor (cel mai mare sau cel mai mic dintre două numere scrise în forme diverse: numere subunitare/ supraunutare, puteri, radicali, iraţionale, etc.) şi de ordonare a numerelor reale (ordonare crescătoare/descrescătoare, reprezentare pe axa numerelor, etc), în mulţimile de numere în care se lucrează

Apoi problemele de minim şi maxim sunt în strânsă legătură cu stabilirea semnului unui număr în mulţimile de numere în care se lucrează (numărul natural, puterea cu exponent par, radicalul unui număr real pozitiv, modulul unui număr real reprezintă numere pozitive).

În clasa a VII-a programa şcolară conţine capitolul *Calcul algebric* în cadrul căruia elevii învaţă:

– calcule cu numere reale reprezentate prin litere: adunare/scădere, înmulţire, împărţire, ridicare la putere, reducerea termenilor asemenea;

– formule de calcul prescurtat $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

În clasa a VIII-a, în primul capitol al Algebrei, intitulat *Numere reale*, printre conţinuturile specificate de programă regăsim:

– calcule cu numere reale reprezentate prin litere şi cele două formule de calcul prescurtat învăţate în clasa a VII-a la care se adaugă $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;

– rapoarte de numere reale reprezentate prin litere; operaţii cu acestea (adunare, scădere, înmulţire, împărţire, ridicare la putere).

Printre competenţele specifice prevăzute la acest capitol se regăsesc:

– identificarea în exemple, în exerciţii sau în probleme a numerelor reale şi a formulelor de calcul prescurtat;

– folosirea terminologiei aferente noţiunii de număr real (semn, modul, opus, invers, parte întreagă, parte fracţionară) în contexte variate;

– deducerea şi aplicarea formulelor de calcul prescurtat pentru optimizarea unor calcule.

Elevii învaţă să transpună cerinţa unei probleme în limbajul de minim/maxim: valoarea minimă a unei expresii pozitive este 0, suma a două expresii pozitive este minimă când fiecare dintre ele este minimă, suma a două numere pozitive este zero dacă ambele numere sunt nule, etc.

Exemple

1) Fie expresia $E(x) = x^2 - 8x + 18$. Arătaţi că expresia este pozitivă, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Aflaţi minimul ei şi valoarea lui x pentru care se realizează acest minim.

Soluţie

Expresia se scrie $E(x) = (x-4)^2 + 2 \geq 2 > 0, (\forall) x \in \mathbb{R}$. Atunci $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} E(x) = 2$ şi se obţine pentru $x = 4$.

2) Aflaţi valoarea maximă a expresiei $E(x) = -2\sqrt{x^4 + 8x^3 + 42x^2 + 104x + 16}$.

Soluţie

Expresia se scrie $E(x) = -2\sqrt{(x^2+4x+13)^2} = -2|x^2+4x+13| = -2(x^2+4x+13)$, deoarece $x^2 + 4x + 13 = (x+2)^2 + 9 \geq 9 > 0, (\forall) x \in \mathbb{R}$. Cum $\min\limits_{x\in\mathbb{R}}(x^2+4x+13) = 9$, atunci $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} E(x) = -18$, obţinut pentru $x = -2$.

3) Determinaţi numerele reale x şi y pentru care $\sqrt{x^2+2x+26} + \sqrt{y^2-8y+25} = 8$.

Soluţie

Deoarece $\sqrt{x^2+2x+26} = \sqrt{(x+1)^2+25} \geq 5$ şi $\sqrt{y^2-8y+25} = \sqrt{(y-4)^2+9} \geq 3$, atunci $\min\limits_{x,y\in\mathbb{R}}\left(\sqrt{x^2+2x+26} + \sqrt{y^2-8y+25}\right) = 8$ şi se obţine pentru $x = -1$ şi $y = 4$.

Trebuie precizat că aceste tipuri de probleme sunt pentru “nota 10”, deci sunt adresatate elevilor cu aptitudine pentru matematică, doritori şi capabili să aprofundeze şi să completeze cunoştinţele învăţate în şcoală.

Noţiunea de punct de extrem apare specificată în programa şcolară pentru clasa a IX-a, în capitolul *Funcţia de gradul al doilea*, la studiul funcţiei de gradul al doilea.

Printre competenţele specifice ale acestui capitol, se numără şi:

– recunoaşterea corespondenţei dintre seturi de date şi reprezentări grafice;

– utilizarea lecturii grafice pentru rezolvarea unor ecuaţii, inecuaţii şi sisteme de ecuaţii;

– reprezentarea grafică a unor date diverse în vederea comparării variaţiei lor;

– exprimarea prin reprezentări grafice a unor condiţii algebrice; exprimarea prin condiţii algebrice a unor reprezentări grafice;

– utilizarea lecturilor grafice în vederea optimizării rezolvării unor probleme practice.

Dată funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, s-au stabilit următoarele rezultate:

1) Dacă $a > 0$, funcția $f(x) = ax^2 + bx + c$ are o *valoare minimă* (*un minim*) $f_{min} = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\triangle}{4a}$, care se obține pentru $x_{min} = -\frac{b}{2a}$ (*punctul de minim*), iar punctul $\mathrm{V}\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\triangle}{4a}\right)$ este *punctul de minim al graficului* funcției.

Interpretarea geometrică: parabola funcţiei $f(x) = ax^2 + bx + c$ are ramurile îndreptate în sus (spre y pozitiv), minimul funcţiei este egal cu ordonata vârfului parabolei iar punctul de minim este abscisa vârfului graficului.

2) Dacă $a < 0$, funcția $f(x) = ax^2 + bx + c$ are o *valoare maximă* (*un maxim*) $f_{max} = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\triangle}{4a}$, care se obține pentru $x_{max} = -\frac{b}{2a}$ (*punctul de maxim*), iar punctul $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\triangle}{4a}\right)$ este *punctul de maxim al graficului* funcției.

Interpretarea geometrică: parabola funcţiei $f(x) = ax^2 + bx + c$ are ramurile îndreptate în jos (spre y negativ), maximull funcţiei este egal cu ordonata vârfului parabolei iar punctul de maxim este abscisa vârfului graficului.

Valoarea minimă/maximă a funcției se numește *valoare extremă* sau *extremul funcției*, iar punctul $x = -\frac{b}{2a}$ pentru care se realizează extremul se numește *punct de extrem* al funcției.

Trebuie specificat şi faptul că stabilirea punctului de extrem pentru funcţia de gradul al doilea dă posibilitatea determinării imediate a imaginii funcţiei, şi anume:

1) Dacă $a > 0$, imaginea funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ este $\text{Imf} = \left[-\frac{\triangle}{4a}, +\infty\right)$;

2) Dacă $a < 0$, imaginea funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ este $\text{Imf} = \left(-\infty, -\frac{\triangle}{4a}\right]$.

Se pot prezenta exemple practice din diferite domenii care justifică necesitatea studiul acestor funcţii şi a proprietăţilor lor.

Exemple

1) Dintr-un turn de înălţime h_0 se aruncă o piatră pe verticală în sus cu viteza iniţială v_0. Să se afle la ce înălţime maximă ajunge piatra.

Soluţie

Înălţimea $h(t)$ la care ajunge piatra la momentul t este dată de $h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{g}{2}t^2$, unde $g = \frac{9{,}8m}{s^2}$. Pentru a calcula înălţimea maximă h_{max} la care ajunge piatra determinăm maximul funcţiei $h(t)$ care este $h_{max} = h_0 + \frac{v_0^2}{2g}$ iar timpul în care ajunge la această înălţime este $t_{max} = \frac{v_0}{g}$.

2) Dintr-o sârmă cu lungimea de $10m$ se confecţionează un dreptunghi. Care trebuie să fie dimensiunile dreptunghiului pentru ca aria sa să fie maximă?

Soluţie

Dacă x şi y sunt laturile dreptunghiului, atunci $2x + 2y = 10$, de unde $x + y = 5$. Aria dreptunghiului va fi $S(x) = xy = x(5 - x) = -x^2 + 5x$. Pentru a determina maximul ariei vom determina maximul funcţiei $S(x)$ care este $S_{max} = \frac{25}{4}$ şi se realizează pentru $x_{max} = \frac{5}{2}$.

Deci dreptunghiul trebuie să fie pătrat, cu latura de $2{,}5m$, aria maximă fiind $S_{max} = 6{,}25m^2$.

În clasa a X-a programa şcolară conţine capitolul *Funcţii şi ecuaţii* în cadrul căruia elevii studiază pentru toate tipurile de funcţii elementare intersecţia cu axele de coordonate, ecuaţia $f(x) = 0$, reprezentarea grafică prin puncte, puncte particulare, simetrie, lectura grafică a proprietăţilor algebrice ale funcţiilor: monotonie, bijectivitate, inversabilitate, semn, concavitate/convexitate. Este indicat să se menţioneze pentru fiecare funcţie în parte dacă admite sau nu puncte de extrem local sau global, fiind un moment favorabil de a actualiza aceste noţiuni.

Printre competenţele specifice ale acestui capitol, se numără şi:

– trasarea prin puncte a graficelor unor funcţii;

– prelucrarea informaţiilor ilustrate prin graficul unei funcţii în scopul deducerii unor proprietăţi ale acesteia (monotonie, semn, bijectivitate, inversabilitate, continuitate, convexitate);

– utilizarea de proprietăţi ale funcţiilor în trasarea graficelor şi rezolvarea de ecuaţii;

– exprimarea în limbaj matematic a unor situaţii concrete şi reprezentarea prin grafice a unor funcţii care descriu situaţii practice;

– interpretarea, pe baza lecturii grafice, a proprietăţilor algebrice ale funcţiilor.

În programa şcolară pentru clasa a XI-a a Analizei matematice, în capitolul *Funcţii continue*, printre proprietăţile funcţiilor continue definite pe un inteval închis şi mărginit, teorema lui Weierstrass pregăteşte terenul pentru studiul extremelor funcţiilor, asigurând existenţa acestora. Prin exemple şi grafice sugestive se identifică diferite situaţii: punctele în care se ating marginile inferioară şi superioară pot fi în interiorul sau pot fi marginile intervalului, pot fi unice sau nu. Prin dialog, se verifică necesitatea condiţiilor din enunţ şi se probează că dacă o condiţie din ipoteză nu este îndeplinită, teorema nu mai este adevărată: dacă funcţia nu este continuă sau dacă domeniul de definiţie nu este inteval compact se poate ca funcţia să nu fie mărginită sau să nu-şi atingă marginile.

Cu punctele de extrem elevii se întâlnesc în clasa a XI-a, la Analiza matematică, în capitolul *Funcţii derivabile*.

După reactualizarea noţiunilor de punct de extrem, valoare extremă şi punct de extrem al graficului unei funcţii, este util (utilizând instrumentele TIC, dacă este posibil) să se prezinte reprezentări grafice de funcţii prin care să se exempifice puncte de extrem local sau global şi din care elevii să se înţeleagă clar, fără pericol de confuzie, următoarele aspecte:

– o funcţie poate avea mai multe puncte de extrem (de exemplu, funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x^2-3x-4|$ are punctele de minim (global) $x_1=-1$ şi $x_2=4$ iar $x_3=\frac{3}{2}$ este punct de maxim);

– o funcţie poate să nu admită extreme (de exemplu, funcţia exponenţială $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $f(x)=e^x$);

– o funcţie poate avea maxime dar nu şi minime, sau invers (de exemplu, funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x^2+2x-1}$ admite punctul de maxim (global) $x_1=1$, iar funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+5x$ admite punctul de minim (global) $x=-2{,}5$);

– valoarea unui maxim local poate fi mai mică dacât a unui minim local (de exemplu, pentru funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x+3}{x^2+x-2}$punctul $x_1=-5$ este de minim local, cu minimul $f(-5)=-\frac{1}{9}$ iar punctul $x_2=-1$ este de maxim local, cu maximul $f(-1)=-1$ şi $f(-5)>f(-1)$);

– restricţiile unei funcţii la diferite submulţimi ale domeniului de definiţie pot prezenta rezultate diferite în ceea ce priveşte existenţa punctelor de extrem. De exemplu, dată funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+5x$, restricţiile la intervalele $(-\infty,-5)$ şi $(0,+\infty)$ nu admit puncte de extrem dar restricţia la $(-5,0)$ admite punctul da minim absolut $x=-2{,}5$.

După identificarea punctelor de extremem, este util să remarcăm (din punct de vedere geometric) dacă în asemenea puncte funcţia este continuă şi derivabilă, analizând posibile situaţii: tangenta paralelă cu Ox, puncte unghiulare, puncte de întoarcere, etc. Aceste situaţii ilustrate prin desen, prin dialog cu elevii, elimină eventualele neclarităţi ulterioare (cum ar fi derivabilitatea unei funcţii într-un punct de extrem).

După definirea şi "vizualizarea" prin exemple a punctelor de extrem, profesorul trebuie să atragă atenţia asupra următorului aspect: punctul de extrem este un element din domeniul de definiţie al funcţiei, extremul este un element din codomeniu, reprezentând valoarea funcţiei în punctul de extrem, iar punctul de extrem al graficului reprezintă imaginea geometrică, fiind punctul de pe graficul funcţiei cu coordonatele (x_{min}, f_{min}) respectiv (x_{max}, f_{max}).

Abordarea acestor noţiuni prin prisma funcţiilor derivabile constituie o etapă fundamentală în definitivarea capacităţii de abstractizare a elevilor. Printre competenţele specifice ale acestui capitol întâlnim:

– caracterizarea unor funcţii utilizând reprezentarea geometrică a unor cazuri particulare;

– interpretarea unor proprietăţi ale funcţiilor cu ajutorul reprezentărilor grafice;

– aplicarea unor algoritmi specifici calculului diferenţial în rezolvarea unor probleme şi modelarea unor procese;

– exprimarea cu ajutorul noţiunilor de limită, continuitate, derivabilitate, monotonie, a unor proprietăţi cantitative şi calitative ale unei funcţii;

– studierea unor funcţii din punct de vedere cantitativ şi calitativ utilizând diverse procedee: majorări, minorări pe un interval dat, proprietăţile algebrice şi de ordine ale mulţimii numerelor reale în studiul calitativ local, utilizarea reprezentării grafice a unei funcţii pentru verificarea unor rezultate şi pentru identificarea unor proprietăţi;

– explorarea unor proprietăţi cu caracter local şi/ sau global ale unor funcţii utilizând continuitatea, derivabilitatea sau reprezentarea grafică.

Determinarea puntelor de extrem nu este simplă. Teorama lui Fermat arată clar forţa derivatelor ca instrument de lucru în studiul funcţiilor, oferind un criteriu suficient de extrem.

În primă fază, mai importantă decât demonstraţia teoremei lui Fermat este ilustrarea ei utilizând interpretarea geometrică a derivatei unei funcţii într-un punct. Elevii trebuie să conştientizeze indiciile clare oferite de interpretarea geometrică a teoremei referitoare la proprietăţile concrete utile în trasarea graficelor unor funcţii.

Este foarte important să se analizeze împreună cu elevii necesitatea fiecărei condiţii din enunţul teoremei, construind în acest sens exemple şi contraexemple prin care se va puna accent pe următoarele aspecte:

– Teorema lui Fermat dă numai o condiţie necesară nu şi suficientă pentru existenţa punctelor de extrem. Se poate întâmpla ca într-un punct derivata să se anuleze fără ca punctul respectiv să fie punct de extrem. Într-adevăr, dacă se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3$, derivabilă pe $\mathbb{R}$, cu $f'(x)=3x^2, (\forall)x\in\mathbb{R}$, se observă că $f'(0)=0$ dar punctul $x_0=0$ nu este punct de extrem al funcţiei. Deci, reciproca teoremei lui Fermat nu este, în general, adevărată.

– Teorema lui Fermat are caracter local, vizând comportarea funcţiei în vecinătatea unui punct.

– condiţia ca x_0 să fie din interiorul intervalului este esenţială. Astfel, dacă x_0 coincide cu una din extremităţile intervalului I, s-ar putea ca funcţia să aibă derivată în x_0, dar derivata funcţiei să nu se anulezeîn acest punct. Spre exemplu, funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x$, este derivabilă pe $[0,1]$, cu $f'(x)=1, (\forall)x\in[0,1]$. Punctul $x_0=0$ este punct minim al funcţiei, dar $f'(0)\neq 0$.

– în teorema lui Fermat, condiţia ca domeniul de definiţie să fie interval nu este esenţială. Funcţia poate fi definită, de exemplu, şi pe o reuniune de intervale disjuncte, este esenţial însă ca x_0 (pentru care $f'(x_0)=0$) să fie punct din interiorul unui interval .

– un punct $x_0 \in I$ poate fi un punct de extrem pentru o funcţie f fără să existe $f'(x_0)$. Spre exemplu, funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, pentru care $x_0 = 0$ este punct de minim dar f nu este derivabilă în $x_0 = 0$.

– Teorema lui Fermat afirmă că punctele de extrem relativ ale unei funcţii derivabile pe un interval, care sunt interioare acelui interval, se găsesc printre punctele sale critice.

Următorul pas în studiul punctelor de extrem îl constituie utilizarea derivatei a doua, mai exact studiul semnului derivatei a doua într-un punct de extrem. Dacă nu cunoaştem semnul derivatei intr-o vecinătate a lui x_0, putem preciza dacă un punct de extrem este de maxim sau de minim studiind semnul derivatei a doua în punctul de extrem.

Şi aici trebuie punctat asupra aspectului următor: condiţia (sau $f''(x_0) < 0$) pentru un punct critic este suficientă, dar nu şi necesară pentru ca x_0 să fie punct de minim (respectiv maxim) local. Într-adevăr, punctul $x_0 = 0$ este punct de minim global (deci şi local) pentru funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$, dar $f''(x) = 12x^2$, deci $f''(0) = 0$.

În pratică, pentru determinarea punctelor de extremale unei funcţii f derivabile pe un interval sau pe o reuniune de intervale, se parcurg următoarele etape de lucru:

1. se determină domeniul de definiţie al funcţiei D. Dacă domeniul de definiţie nu este specificat, se subânţelege că este domeniul maxim de definiţie;
2. se determină mulţimea $D_{f'} \subset D$ pe care funcţia f este derivabilă şi se calculează derivata întâi f';
3. se rezolvă în $D_{f'}$ ecuaţia $f'(x) = 0$. Rădăcinile derivatei întâi pot fi puncte de extrem ale funcţiei;
4. se determină intervalele pe care derivata întâi păstrează acelaşi semn şi se determină semnul derivatei întâi pe aceste intervale;
5. se alcătuiaşte tabelul de variaţie al funcţiei unde se indică concret domeniul de definiţie, valorile remarcabile ale argumentului, semnul derivatei şi se stabileşte care dintre punctele critice sunt puncte extrem. Trebuie accentuat şi faptul că tabelul de variaţi oferă posibilitatea de a controla corectitudinea calculelor efectuate, existând consens între elementele componente. Dacă suntem în situaţia în care nu putem decide natura punctului critic, putem studia semnul derivatei a doua în aceste puncte.

În cazul funcţiilor continue definite pe un inteval închis şi mărginit, teorema lui Weierstrass pregăteşte terenul pentru studiul extremelor funcţiilor, asigurând existenţa acestora. De aceea ipoteza de derivabilitate pe un interval închis asigură implicit faptul că funcţia este mărginită şi îşi atinge marginile, adică admite extreme globale.

Dacă derivata f'este continuă pe $[a,b]$ şi nu se anulează pe (a,b), adică păstrează semn constant, atunci singurele puncte de extrem global ale lui f sunt extremităţile a şi b:

- dacă $f_d'(a) \geq 0$ (respectiv $f_s'(b) \leq 0$), atunci $f(a)$ (respectiv $f(b)$) este minimul lui f;
- dacă $f_d'(a) \leq 0$ (respectiv $f_s'(b) \geq 0$), atunci $f(a)$ (respectiv $f(b)$) este maximul lui f.

În concluzie, dacă $f: D \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe D şi derivabilă pe interiorul lui D, excepţie făcând cel mult un număr finit de puncte, atunci punctele de extrem (locale şi globale) ale lui f se află printre: punctele în care f nu este derivabilă, punctele critice şi eventual extremităţile lui D (dacă D are capete finite şi închise).

Exemple:

1) Fie funcţia $f: [-3\,,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2$.

Funcţia este derivabilă pe $[-3\,,3]$, derivata fiind dată de $f'(x) = 3x^2 - 2x$, $(\forall)x \in [-3\,,3]$. Ecuaţia $f'(x) = 0$ are în $[-3\,,3]$ soluţiile $x_0 = 0, x_1 = \frac{2}{3}$. Tabelul de variaţie al funcţiei f este:

x	-3			0			$\frac{2}{3}$		3
$f'(x)$		+	+	0	-	-	0	+ +	
$f(x)$	-36		$\nearrow$	0 (M)	$\searrow$		$-\frac{4}{27}$ (m)	$\nearrow$	18

Din tabel, rezultă că extremităţile intervalului sunt puncte de extrem global, adică $x = -3$ este punct de minim global, $x = 3$ este punct de maxim global, în timp ce punctele critice din interiorul intervalului sunt puncte de extrem local şi anume $x_0 = 0$ este punct de maxim local iar $x_1 = \frac{2}{3}$ este punct de minim local.

2) Fie funcţia $f: [-1\,,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - x^{\frac{2}{3}}$.

Funcţia nu este derivabilă în $x_0 = 0$, derivata funcţiei fiind dată de $f'(x) = -\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$, $(\forall)x \in [-1\,,1] \setminus \{0\}$. Tabelul de variaţie al funcţiei f este:

x	-1	0	1

$f'(x)$		$+$	$+$	$\mid$	$-$	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$		2	$\searrow$		1
				(M)			

Din tabel, rezultă că extremităţile intervalului $x = -1$ şi $x = 1$ sunt puncte de minim global. Punctul $x_0 = 0$, deşi nu este punct critic, este punct de maxim global al lui f pe $[-1\,,1]$.

Trebuie atrasă atenţia elevilor asupra faptului că un punct de extrem global poate fi şi punct de discontinuitate. De exemplu, funcţia

$f: [0\,,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3-e^{\frac{1}{x-1}}}, & x \in [0,1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$ are un punct de minim global în $x = 1$, care este punct de discontinuitate de speţa întâi.

Mulţi elevi întâmpină dificultăţi în determinarea punctelor de extrem ale unei funcţii. Acest lucru se datorează gradului sporit de complexitate, etapele de lucru necesitând aplicarea multor cunoştinţe studiate anterior, cum ar fi:

– identificarea şi rezolvarea condiţiilor de existenţă pentru a determina domeniul maxim de definiţie al unei funcţii;

– cunoşterea derivatelor funcţiilor elementare, a funcţiilor compuse, a funcţiilor inverse şi a regulilor de derivare;

– determinarea semnului unei funcţii;

– studierea derivabilităţii unei funcţii într-un punct;

– calculul limitelor de funcţii;

– calcule numerice;

– cunoşterea noţiunilor teoretice referitoare la rolul derivatelor în studiul funcţiilor.

Este foarte important să se precizeze elevilor că determinarea punctelor de extrem sau a intervalelor de monotonie reprezintă o modalitate utilă şi încurajatoare de a reactualiza noţiunile studiate anterior.

Un punct dificil în finalizarea exerciţiilor îl reprezintă şi interpretarea datelor din tabelul de variaţie (completat) al unei funcţii. O soluţie ar fi ca înainte de a trece la rezolvări de probleme, (prin intermediul instrumentelor TIC) alături de tabelul de variaţie să fie prezentat şi graficul funcţiei, astfel încât, intuiţia să devină un instrument util în înţelegerea noţiunilor. Avantajul didactic al utilizării desenului este de necontestat, acesta concentrând informaţia şi eliminând exprimările greoaie din limbajul de specialitate. Prin această asociere se verifică faptul că proiecţa graficului pe axa Ox este domeniul maxim de definiţie, prezent şi pe prima linie a tabelului, iar proiecţia pe axa Oy reprezintă imaginea funcţiei, conţinută în intervalul mărginit de extremele globale. Doar după depăşirea acestui obstacol profesorul poate trece la rezolvări de exerciţii şi probleme.

Este esenţial ca profesorul să propună exerciţiile gradat în ceea ce priveşte nivelul de dificultate, pornind cu studiul funcţiilor elementare (polinomiale, raţionale de diferite tipuri, etc), ale căror tabele se completează uşor, pot fi „citite" şi „traduse" lesne în: intervale de monotonie, puncte şi valori extreme, mărginire, imagine, inegalităţi, semn, etc.

Foarte instructivă este reluarea studiului funcţiilor elementare, pentru ca proprietăţile acestora demonstrate cu instrumentele algebrei să fie evidenţiate şi cu ajutorul derivatelor.

Se impune un număr suficient de mare de exerciţii lucrate în clasă, prin care să se evidenţieze avantajele metodelor oferite de derivate, astfel încât elevii să le înţeleagă şi să le stăpânească.

Se pot prezenta exemple practice din diferite domenii care justifică necesitatea studiul acestor funcţii şi a proprietăţilor lor, aplicaţii directe ale rezultatelor teoretice privind determinarea punctelor de extrem ale unor funcţii reale de o variabilă reală:

– rezultate imediate în studiul unei funcţii: puncte şi valori extreme, mărginire, imagine, grafic, inegalităţi, semn, obţinerea unor inegalităţi;

– cu ajutorul funcţiei ataşate unui şir de numere reale putem rezolva mai uşor problemele de monotonie, mărginire şi convergenţă a şirurilor. Utilizarea unei funcţii pentru studiul unui şir oferă avantajul utilizării derivatei şi a tabelului de variaţie;

– proprietatea de medie a unei integrale definite oferă o modalitate prin care putem determina valorile minime şi maxime ale unei integrale definite fără a o calcula: se determină valorile minime şi maxime ale funcţiei (continue) de sub integrală pe intervalul de integrare: $m \leq f(x) \leq M, (\forall)x \in [a,b]$ şi prin integrare inegalitatea se păstrează, adică $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$;

– unele inegalităţi din algebră, trigonometrie, care cu ajutorul metodelor elementare ar fi fost greu de probat, se pot obţine din studiul unor funcţii;

– determinarea valorilor optime (adică minime sau maxime) sunt deosebit de importante şi în diferite sectoare ale economiei;

– unele probleme din geometria plană, geometria în spaţiu sau cea analitică ce vizează studiul unor distanţelor, arii, volume, în condiţii date se reduc la determinarea (construcţia) şi studierea unei funcţii;

– numeroase probleme din fizică operează cu mărimi variabile pentru care este util de cunoscut anumite valori de maxim sau de minim (optime) în condiţii impuse;

– în aproape toate activităţile noastre problemele de optimizare au devenit de uz curent, deci regăsim probleme din viaţa cotidiană rezolvate cu ajutorul funcţiilor derivabile.

Analiza matematică este o o ramură a matematicii mai greu accesibilă elevilor, datorită faptului că aprofundarea noţiunilor specifice necesită un intelect ridicat şi exersarea unor algoritmi speciali (care, în genereal, au un grad ridicat de dificultate). Această abordare poate oferi o perspectivă nouă elevilor, mai atractivă.

Asemenea exemple pot contribui la o mai buna înţelegere a noţiunilor prevăzute în programa şcolară. Astfel vom oferi elevilor posibilitatea de a aprofunda şi clarifica anumite noţiuni matematice, asigurând astfel o mai bună pregătire în vederea susţinerii examenului de bacalaureat şi a admiterii în învaţământul superior.

Această abordare interdisciplinară de rezolvare a unor tipuri de exerciţii şi probleme oferă posibilităţi metodice multiple în efortul de formare a gândirii matematice la elevi.

Totodată, rezolvarea problemelor de extrem constituie momentul propice pentru ca elevii să înţeleagă că rezultatele oferite de analiza matematică sunt solide, captivante şi oferă metode de lucru elegante, simplificând rezolvarea.

Nu în ultimul rând, acestă abordare interdisciplinară se materializează într-un răspuns la întrebările (rostite sau nu, dar sigur ridicate) de genul „La ce foloseşte matematica?”, „Este matematica atât de importantă?”, „Voi putea utiliza practic noţiunile din programă?”.

BIBLIOGRAFIE

1. Banea, H. – *Metodica predării matematicii*, Editura Paralele 45, Piteşti, 1998.
2. Burtea, M., Burtea, G. – *Matematică. Manual pentru clasa a XI-a M1,* Editura Carminis, Piteşti, 2006.
3. Catană, A., Săcuiu, M., Stănăşilă, O. – *Metodica predării analizei matematice*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.
4. Ganga, M. – *Elemente de analiză matematică pentru clasa a XI-a, partea I,* Editura Mathpress, Ploieşti, 1999.
5. Ganga, M. – *Elemente de analiză matematică pentru clasa a XI-a, partea a II-a,* Editura Mathpress, Ploieşti, 1999.

6. Udrişte, C., Tănăsescu, E. – *Minime şi maxime ale funcţiilor reale de variabile reale*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1980.
7. Udrişte, C., Bucur, C. – *Probleme de matematici şi observaţii metodologice*, Editura Facla, Timişoara, 1980.
8. **https://www.edu.ro/etichete/programe-%C8%99colare**