REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

MARTIE 2022

ISSN 2065-6432

www.mateinfo.ro

REVISTĂ DIN FEBRUARIE 2009

revista.mateinfo@yahoo.com

COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

ARTICOLE REVISTĂ:

1. pqr -Method.

Marin Chirciu[1]
Art 3261

Articolul își propune să prezinte o metodă unitară de rezolvare a unor inegalități algebrice folosind pqr -Method.

Prezentare generală a metodei pqr .

Teorema-p,q,r

$$\begin{cases} p=a+b+c \\ q=ab+bc+ca \\ r=abc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^5+b^5+c^5=p^5-5p^3q+5p^5r+5pq^2-5qr \\ a^3+b^3+c^3=p^3-3pq+3r \\ (a+b)(b+c)(c+a)=pq-r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^4+b^4+c^4=p^4-4p^2q+2q^2+4pr \\ a^2+b^2+c^2=p^2-2q \end{cases}$$

Folosim în rezolvarea inegalităților : $p^2\ge 3q$, $q^2\ge 3pr$, $p^3+9r\ge 4pq$ (Schur).

1). $p^2\ge 3q$

$(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca) \Leftrightarrow p^2\ge 3q$.

2). $q^2\ge 3pr$

$(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(ab+bc+ca) \Leftrightarrow q^2\ge 3pr$.

2). $p^3+9r\ge 4pq$ (Schur).

Demonstrație:

Folosim inegalitatea lui Schur:

$a^3+b^3+c^3+3abc\ge \sum bc(b+c) \Leftrightarrow p^3-3pq+3r+3r\ge pq-3r \Leftrightarrow p^3+9r\ge 4pq$.

În continuare vom propune inegalități algebrice care se pot rezolva cu metoda pqr .

Aplicația 1.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then

$$\frac{a}{ab+3c}+\frac{b}{bc+3a}+\frac{c}{ca+3b}\ge\frac{3}{4}$$

Matematika, 2/2022, Amir Sofi

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$.

Avem $p=3$, $p^2\ge 3q \Rightarrow q\le 3$.

Din inegalitatea lui Schur sub forma $(a+b+c)^3+9abc\ge 4(a+b+c)(ab+bc+ca) \Rightarrow$

$\Rightarrow p^3+9r\ge 4pq \Rightarrow 27+9r\ge 4\cdot 3q \Rightarrow 3r\ge 4q-9$.

Obținem:

$$LHS=\sum\frac{a}{ab+3c}=\sum\frac{a}{ab+(a+b+c)c}=\sum\frac{a}{(c+a)(c+b)}=\sum\frac{a(a+b)}{(a+b)(c+a)(c+b)}=$$

$$=\frac{\sum a(a+b)}{(a+b)(c+a)(c+b)}=\frac{\sum a^2+\sum ab}{\prod(a+b)}=\frac{p^2-2q+q}{pq-r}=\frac{9-q}{3q-r}\overset{(1)}{\ge}\frac{3}{4}=RHS,$$

[1] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești*

unde $(1)\Leftrightarrow \frac{9-q}{3q-r}\geq\frac{3}{4} \Leftrightarrow 4(9-q)\geq 3(3q-r) \Leftrightarrow 36+3r\geq 13q$, care rezultă din $3r\geq 4q-9$ şi $q\leq 3$.

Într-adevăr:

$36+3r \overset{3r\geq 4q-9}{\geq} 36+4q-9 \overset{q\leq 3}{\geq} 13q$.

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicaţia 2.

Fie $a,b,c>0$ astfel încât $a+b+c=1$. Arătaţi că

$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}\leq 2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right).$$

LinkedIn 12/2019

Soluţie.

Avem $\begin{cases} p=a+b+c=1 \\ q=ab+bc+ca \\ r=abc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p\geq 3q \\ q^2\geq 3r \\ 1\geq 3q \end{cases}$.

Obţinem

$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}=\frac{\sum(1+a)(1-b)(1-c)}{\prod(1-a)}=\frac{3-\sum a-\sum bc+3abc}{1-\sum a+\sum bc-abc}=\frac{2-q+3r}{q-r},(1).$$

Cu inegalitatea lui Bergström obţinem:

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}=\frac{b^2}{ab}+\frac{c^2}{bc}+\frac{a^2}{ca}\geq\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}=\frac{1}{q},(2).$$

Din (1) şi (2) este suficient să arătăm că:

$\frac{2-q+3r}{q-r}\leq 2\cdot\frac{1}{q} \Leftrightarrow \frac{2}{q}-\frac{2-q+3r}{q-r}\geq 0$, care rezultă din:

$$\frac{2}{q}-\frac{2-q+3r}{q-r}\geq\frac{2}{q}-\frac{2-q+3\cdot\frac{q^2}{3}}{q-\frac{q^2}{3}}=\frac{1-3q}{3-q}\geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Remarcă.

Problema se poate dezvolta.

Fie $a,b,c,n>0$ astfel încât $a+b+c=n$. Arătaţi că

$$\frac{n+a}{n-a}+\frac{n+b}{n-b}+\frac{n+c}{n-c}\leq 2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right).$$

Marin Chirciu

Soluţie.

Avem $\begin{cases} p=a+b+c=1 \\ q=ab+bc+ca \\ r=abc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p\geq 3q \\ q^2\geq 3r \\ 1\geq 3q \end{cases}$.

Obţinem

$$\frac{n+a}{n-a}+\frac{n+b}{n-b}+\frac{n+c}{n-c}=\frac{\sum(n+a)(n-b)(n-c)}{\prod(n-a)}=\frac{3n^3-n^2\sum a-n\sum bc+3abc}{n^3-n^2\sum a+n\sum bc-abc}=\frac{3n^3-n^2-nq+3r}{n^3-n^2+nq-r},(1).$$

Cu inegalitatea lui Bergström obţinem:

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}=\frac{b^2}{ab}+\frac{c^2}{bc}+\frac{a^2}{ca}\ge\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}=\frac{1}{q},(2).$$

Din (1) şi (2) este suficient să arătăm că:

$$\frac{3n^3-n^2-nq+3r}{n^3-n^2+nq-r}\le 2\cdot\frac{1}{q}\Leftrightarrow\frac{2}{q}-\frac{3n^3-n^2-nq+3r}{n^3-n^2+nq-r}\ge 0$$,care rezultă din:

$$\frac{2}{q}-\frac{3n^3-n^2-nq+3r}{n^3-n^2+nq-r}\ge\frac{2}{q}-\frac{3n^3-n^2-nq+3\cdot\frac{q^2}{3}}{n^3-n^2+nq-\frac{q^2}{3}}=\frac{2}{q}-\frac{9n^3-3n^2-3nq+3q^2}{3n^3-3n^2+3nq-q^2}=$$

$$=\frac{6n^3-6n^2(6n+3n^2-9n^3)q-(2+3n)q^2+q^3}{q(3n^3-3n^2+3nq-q^2)}\ge 0$$, adevărată din $q\le\frac{1}{3}$.

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c=\frac{n}{3}$.

<u>Aplicaţia 3.</u>

If $x,y,z>0$ such that $x+y+z=9xyz$ then

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+2yz+2}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+2zx+2}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+2xy+1}}\ge 1.$$

2018 Greece Team Selection Test

<u>Soluţie</u>.

Notând $p=x+y+z,q=xy+yz+zx$.

Ipoteza se scrie $\sum\frac{1}{yz}=9$.

Folosind inegalitatea mediilor obţinem:

$$M_s=\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+2yz+2}}\ge\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+2}}=\frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+2}}=\frac{p}{\sqrt{p^2-2q+2}}\overset{(1)}{\ge}1=M_d$$ un

de (1) $\Leftrightarrow\frac{p}{\sqrt{p^2-2q+2}}\ge 1\Leftrightarrow\frac{p^2}{p^2-2q+2}\ge 1\Leftrightarrow q\ge 1$,

care rezultă din:

$$\sum yz\sum\frac{1}{yz}\overset{CS}{\ge}(1+1+1)^2=9\Leftrightarrow q\cdot 9\ge 9\Leftrightarrow q\ge 1.$$

<u>Remarcă.</u>

Problema se poate dezvolta.

If $x,y,z>0$ such that $x+y+z=9xyz$ and $n\ge 2$ then

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+2yz+n}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+2zx+n}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+2xy+n}}\ge\sqrt{\frac{3}{n+1}}.$$

Marin Chirciu

<u>Soluţie</u>.

Notând $p=x+y+z,q=xy+yz+zx$, avem $p^2\ge 3q$

Ipoteza se scrie $\sum\frac{1}{yz}=9$.

Folosind inegalitatea mediilor obţinem:

$$M_s=\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+2yz+n}}\geq\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+n}}=\frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+n}}=\frac{p}{\sqrt{p^2-2q+n}}\overset{(1)}{\geq}\sqrt{\frac{3}{n+1}}=M_d$$

unde (1) $\Leftrightarrow\frac{p}{\sqrt{p^2-2q+n}}\geq\sqrt{\frac{3}{n+1}}\Leftrightarrow\frac{p^2}{p^2-2q+n}\geq\frac{3}{n+1}\Leftrightarrow(n-2)p^2+6q-3n\geq0$,

care rezultă din $p^2\geq3q$ și $n\geq2$.

Într-adevăr:

Avem $(n-2)p^2+6q-3n\geq(n-2)\cdot3q+6q-3n=3qn-3n=3n(q-1)\overset{(2)}{\geq}0$,

unde (2) $\Leftrightarrow q\geq1$, care rezultă din:

$\sum yz\sum\frac{1}{yz}\overset{CS}{\geq}(1+1+1)^2=9\Leftrightarrow q\cdot9\geq9\Leftrightarrow q\geq1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Notă.

Pentru $n=2$ se obține Problema propusă la 2018 Greece Team Selection Test.

Aplicația 4.

If $x,y,z\geq0$ such that $x+y+z=2$ then

$$\sqrt{\sum x^3y}+\sqrt{\sum xy^3}\leq2.$$

Imad Zak, Mathematical Inequalities/26/6/2020

Soluție.

Cu inegalitatea CBS

avem $(Ms)^2=\left(\sqrt{\sum x^3y}+\sqrt{\sum xy^3}\right)^2\leq(1+1)\left(\sum x^3y+\sum xy^3\right)=2\sum xy\left(x^2+y^2\right)\overset{(1)}{\leq}4=(Md)^2$,

unde (1) $\Leftrightarrow\sum xy\left(x^2+y^2\right)\leq2$,care rezultă din metoda pqr.

Notăm $p=x+y+z=2$, $q=xy+yz+zx$, $r=xyz$.

Obținem $\sum xy\left(x^2+y^2\right)=\sum xy\left(x^2+y^2+z^2-z^2\right)=\sum xy\sum x^2-xyz\sum x=q\left(p^2-2q\right)-rp=$

$=q(4-2q)-rp=4q-2q^2-2r=-2q^2+4q-2+2-2r=-2\left(q^2-2q+1\right)+2-2r=$

$=-2(q-1)^2+2-2r\leq2$, cu egalitate dacă $q=1$ și $r=0$.

Deducem că are loc inegalitatea din enunț cu egaliatate dacă și numai dacă $(x,y,z)=(1,1,0)$ și permutările sale.

Remarcă.

Problema se poate dezvolta.

If $x,y,z\geq0$ such that $(x+y+z)(xy+yz+zx)=2+3zyz$ then

$$\sqrt{\sum x^2y}+\sqrt{\sum xy^2}\leq2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Cu inegalitatea CBS

avem $(Ms)^2=\left(\sqrt{\sum x^2y}+\sqrt{\sum xy^2}\right)^2\leq(1+1)\left(\sum x^2y+\sum xy^2\right)=2\sum xy(x+y)\overset{(1)}{\leq}4=(Md)^2$,

unde (1) $\Leftrightarrow\sum xy(x+y)\leq2$,care rezultă din metoda pqr.

Notăm $p=x+y+z=2$, $q=xy+yz+zx$, $r=xyz$.

Obținem $\sum xy(x+y)=\sum xy(x+y+z-z)=\sum xy\sum x-3xyz=qp-3r\overset{ipoteza}{=}2$.
Deducem că are loc inegalitatea din enunț cu egaliatate dacă și numai dacă $(x,y,z)=(1,1,0)$ și permutările sale.

Aplicația 5.

If $0<a,b,c<2$ such that $abc=1$ then

$$\sum\frac{14+bc}{4a-a^3}\geq 15.$$

Imad Zak, Mathematical Inequalities/26/6/2020

Soluție.
Avem:

$$Ms=\sum\frac{14+bc}{4a-a^3}\overset{(1)}{\geq}\sum\frac{14+\frac{1}{a}}{a+2}=\sum\frac{14}{a+2}+\sum\frac{1}{a(a+2)}=\sum\frac{14}{a+2}+\frac{1}{2}\sum\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\sum\frac{1}{a+2}=$$

$=\frac{1}{2}\sum\frac{27}{a+2}+\frac{1}{2}\sum\frac{1}{a}\overset{(2)}{\geq}15=Md$, unde(1) rezultă din $abc=1$și din $0<a<2$ avem

$4a-a^3\leq a+2\Leftrightarrow a^3-3a+2\geq 0\Leftrightarrow (a-1)^2(a+2)\geq 0$, evident cu egalitate pentru $a=1$.

Inegalitatea (2) $\Leftrightarrow \sum\frac{27}{a+2}+\sum\frac{1}{a}\geq 30$, care rezultă din metoda pqr.

Fie $p=a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}=3$, $q=ab+bc+ca\geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}=3$.

Inegalitatea $\sum\frac{27}{a+2}+\sum\frac{1}{a}\geq 30$ se scrie:

$27\cdot\frac{4p+q+12}{4p+2q+9}+q\geq 30\Leftrightarrow q^2+2pq+27\geq 12q+6p$, care rezultă din:

$q^2+9\geq 6q$ și $2pq+18\geq 6p+6q\Leftrightarrow 2(p-3)(q-3)\geq 0$.

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitatea dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.
Problema se poate dezvolta.

If $0<a,b,c<2$ such that $abc=1$ and $0\leq n\leq 14$ then

$$\sum\frac{n+bc}{4a-a^3}\geq n+1.$$

Marin Chirciu

Soluție.
Avem:

$$Ms=\sum\frac{n+bc}{4a-a^3}\overset{(1)}{\geq}\sum\frac{n+\frac{1}{a}}{a+2}=\sum\frac{n}{a+2}+\sum\frac{1}{a(a+2)}=\sum\frac{n}{a+2}+\frac{1}{2}\sum\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\sum\frac{1}{a+2}=$$

$=\frac{1}{2}\sum\frac{2n-1}{a+2}+\frac{1}{2}\sum\frac{1}{a}\overset{(2)}{\geq}n+1=Md$, unde(1) rezultă din $abc=1$și și din $0<a<2$ avem

$4a-a^3\leq a+2\Leftrightarrow a^3-3a+2\geq 0\Leftrightarrow (a-1)^2(a+2)\geq 0$, evident cu egalitate pentru $a=1$.

Inegalitatea (2) $\Leftrightarrow \sum\frac{2n-1}{a+2}+\sum\frac{1}{a}\geq 2(n+1)$, care rezultă din metoda pqr.

Fie $p=a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}=3$, $q=ab+bc+ca\geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}=3$.

Inegalitatea $\sum\frac{2n-1}{a+2}+\sum\frac{1}{a}\geq 2(n+1)$ se scrie:

$(2n-1)\cdot\frac{4p+q+12}{4p+2q+9}+q\geq 2(n+1)\Leftrightarrow q^2+2pq+3n-15\geq(n-2)q+6p$, care rezultă din:

$q^2+9\geq 6q$ și $2pq+3n-24\geq(n-8)q+6p\Leftrightarrow 2(p-3)(q-3)+(14-n)(q-3)\geq 0$,

adevărată din $(p-3)\geq 0,(q-3)\geq 0,(14-n)\geq 0$.

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitatea dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Notă.

Pentru $n=14$ se obține problema propusă de Imad Zak în Mathematical Inequalities 6/2020.

Aplicația 6.

If $a,b,c\geq 0$ such that $ab+bc+ca=1$ then

$$\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}+\frac{64}{a+b+c}\geq 34.$$

Mathematical Olimpiads 10/2020, Elton P.

Soluție.

Notăm $p=a+b+c,q=ab+bc+ca=1,r=abc$.

Avem

$$\sum\frac{a^3}{b+c}=\frac{\sum a^3(a+b)(a+c)}{\prod(b+c)}=\frac{\sum a^5+\sum a^3}{\sum a\sum bc-abc}=\frac{\left(p^5-5p^3+5p+5rp^2-5r\right)+p^3-3p+3r}{p-r}=$$

$$=\frac{p^5+p^3-5p^2(p-r)+2(p-r)}{p-r}=\frac{p^5+p^3}{p-r}-5p^2+2.$$

Din inegalitatea mediilor obținem:

$1=ab+bc+ca\geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}=3\sqrt[3]{r^2}$, de unde $r\leq\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Apoi: $p^2=(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)=3$, de unde $p\geq\sqrt{3}$.

Deoarece funcția $r\to\frac{p^5+p^3}{p-r}$ este strict crescătoare pe $[0,p)$ rezultă că $\frac{p^5+p^3}{p-r}\geq\frac{p^5+p^3}{p-0}$,

(1).

Obținem:

$$Ms=\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}+\frac{64}{a+b+c}=\frac{p^5+p^3}{p-r}-5p^2+2\overset{(1)}{\geq}\frac{p^5+p^3}{p}-5p^2+2\overset{(2)}{\geq}34=Md,$$

unde(2) $\Leftrightarrow\frac{p^5+p^3}{p}-5p^2+2\geq 34\Leftrightarrow p^5-4p^3-32p+64\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p^5-4p^3-32p+64\geq 0\Leftrightarrow(p-2)^2\left(p^3+4p^2+8p+16\right)\geq 0$.

Egalitatea are loc pentru $q=0,p=2$.

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate pentru:

$(a,b,c)\in\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$.

Remarcă.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c\geq 0$ such that $ab+bc+ca=1$ then find the minimum value of expression

$$P=\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+\frac{20}{a+b+c}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Notând $a+b+c=p, ab+bc+ca=q, abc=r$ avem $a^3+b^3+c^3=p^3-3pq+3r \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3=p^3-3p+3r$, (1).

Avem $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+\frac{20}{a+b+c}-12=\frac{a^3}{ab+ac}+\frac{b^3}{bc+ab}+\frac{c^3}{ac+bc}+\frac{20}{a+b+c}-12=$

$=\frac{a^3}{1-bc}+\frac{b^3}{1-ac}+\frac{c^3}{1-ab}+\frac{20}{a+b+c}-12\overset{(2)}{\geq}\frac{a^3}{1-0}+\frac{b^3}{1-0}+\frac{c^3}{1-0}+\frac{20}{a+b+c}-12=$

$=a^3+b^3+c^3+\frac{20}{a+b+c}-12\overset{(1)}{=}p^3-3p+3r+\frac{20}{a+b+c}-12\overset{(3)}{\geq}$

$\overset{(3)}{\geq}p^3-3p+0+\frac{20}{a+b+c}-12=p^3-3p+\frac{20}{p}-12=\frac{p^4-3p^2-12p+20}{p}=$

$=\frac{(p-2)^2\left(p^2+4p+5\right)}{p}\geq 0$, evident cu egalitate pentru $p=2$.

Inegalitatea (2) rezultă din $ab\geq 0, bc\geq 0, ac\geq 0$, iar inegalitatea (3) rezultă din $abc\geq 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a+b+c=2, abc=0, ab+bc+ca=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a,b,c)\in\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$.

Rezultă că $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+\frac{20}{a+b+c}-12\geq 0 \Leftrightarrow P\geq 12$.

Din $P\geq 12$, cu egalitate dacă și numai dacă $(a,b,c)\in\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$, deducem că minimum value of expression $P=\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+\frac{20}{a+b+c}$ este12 și minimul este atins pentru $(a,b,c)\in\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$.

Notă.

Problema este în legătură cu Problema postată de Elton P. în Mathematical Olimpiads 10/2020.

If $a,b,c\geq 0$ such that $ab+bc+ca=1$ then find the minimum value of expression

$$P=\frac{a^4}{b+c}+\frac{b^4}{c+a}+\frac{c^4}{a+b}+\frac{80}{a+b+c}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Notând $p=a+b+c, q=ab+bc+ca=1, r=abc$ avem:

$a^5+b^5+c^5=\sum a^3\sum a^2-\sum a\sum b^2c^2+abc\sum bc=\left(p^3-3p+3r\right)\left(p^2-2\right)-p(1-2pr)+r=$

$=p^5-5p^3+5p^2r+5p-5r$, care rezultă din:

$\sum a^3=p^3-3p+3r$, $\sum a^2=p^2-2$, $\sum a=p$, $\sum b^2c^2=1-2pr$, $\sum bc=1, abc=r$, (1).

Avem $\frac{a^4}{b+c}+\frac{b^4}{c+a}+\frac{c^4}{a+b}+\frac{80}{a+b+c}-32=\frac{a^5}{ab+ac}+\frac{b^5}{bc+ab}+\frac{c^5}{ac+bc}+\frac{80}{a+b+c}-32=$

$=\frac{a^5}{1-bc}+\frac{b^5}{1-ac}+\frac{c^5}{1-ab}+\frac{80}{a+b+c}-32\overset{(2)}{\geq}\frac{a^5}{1-0}+\frac{b^5}{1-0}+\frac{c^5}{1-0}+\frac{80}{a+b+c}-32=$

$=a^5+b^5+c^5+\frac{80}{a+b+c}-32\overset{(1)}{=}p^5-5p^3+5p^2r+5p-5r+\frac{80}{a+b+c}-32\overset{(3)}{\geq}$

$$\overset{(3)}{\geq} p^5-5p^3+\frac{80}{p}-32=\frac{p^6-5p^4-32p+80}{p}=\frac{(p-2)^2\left(p^4+4p^3+7p^2+12p+20\right)}{p}\geq 0,$$

evident cu egalitate pentru $p=2$.

Inegalitatea (2) rezultă din $ab\geq 0, bc\geq 0, ac\geq 0$, iar inegalitatea (3) rezultă din $r=abc\geq 0$ și $p\geq r$, adevărat din:

Folosind inegalitatea mediilor obținem:

$1=ab+bc+ca\geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}=3\sqrt[3]{r^2}$, de unde $r\leq\frac{1}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}\Rightarrow\sqrt{3}\geq 9r$.

Apoi: $p^2=(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)=3$, de unde $p\geq\sqrt{3}$.

Obținem $p\geq\sqrt{3}\geq 9r\geq r\Rightarrow p\geq r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a+b+c=2, abc=0, ab+bc+ca=1\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(a,b,c)\in\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$.

Rezultă că $\frac{a^4}{b+c}+\frac{b^4}{c+a}+\frac{c^4}{a+b}+\frac{80}{a+b+c}-32\geq 0\Leftrightarrow P\geq 32$.

Din $P\geq 12$, cu egalitate dacă și numai dacă $(a,b,c)\in\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$, deducem că minimum value of expression $P=\frac{a^4}{b+c}+\frac{b^4}{c+a}+\frac{c^4}{a+b}+\frac{80}{a+b+c}$ este 32 și minimul este atins pentru $(a,b,c)\in\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$.

Notă.

Problema este în legătură cu Problema postată de Elton P. în Mathematical Olimpiads 10/2020.

Aplicația 7.

If $x,y,z>0$ then

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\left[\frac{8xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}\right]^3\geq 4.$$

Mathematical Inequality 12/2020

Soluție.

Inegalitatea se scrie echivalent:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\left[\frac{8}{\left(\frac{x}{y}+1\right)\left(\frac{y}{z}+1\right)\left(\frac{z}{x}+1\right)}\right]^3\geq 4.$$

Notând $\frac{x}{y}=a, \frac{y}{z}=b, \frac{z}{x}=c$ avem $a,b,c>0$, $abc=1$, iar problema se reformulează:

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$a+b+c+\left[\frac{8abc}{(a+1)(b+1)(c+1)}\right]^3\geq 4.$$

Notăm $a+b+c=p, ab+bc+ca=q, abc=r=1$.

Avem de demonstrat:

$p+\left(\frac{8r}{p+q+r+1}\right)^3\ge 4\overset{r=1}{\Leftrightarrow} p+\left(\frac{8}{p+q+2}\right)^3\ge 4$,(1), care rezultă din inegalitatea lui Schur în format $p,q,r: p^3+9r\ge 4pq$.

Demonstrație:

$a^3+b^3+c^3+3abc\ge\sum bc(b+c)\Leftrightarrow p^3-3pq+3r+3r\ge pq-3r\Leftrightarrow p^3+9r\ge 4pq$.

Punând $r=1$ în $p^3+9r\ge 4pq$, avem $q\le\frac{p^3+9}{4p}$ și pentru demonstrarea inegalității (1) este suficient să arătăm că:

$$p+\left(\frac{8}{p+\frac{p^3+9}{4p}+2}\right)^3\ge 4\Leftrightarrow p+\left(\frac{8}{\frac{p^3+4p^2+8p+9}{4p}}\right)^3\ge 4\Leftrightarrow p+\left(\frac{32p}{p^3+4p^2+8p+9}\right)^3\ge 4$$

$$\Leftrightarrow p\left(p^3+4p^2+8p+9\right)^3+(32p)^3\ge 4\left(p^3+4p^2+8p+9\right)^3\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (p-4)\left(p^3+4p^2+8p+9\right)^3+(32p)^3\ge 0$, care rezultă din $p\ge 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1\Leftrightarrow x=y=z$.

Remarcă.

Problema se poate dezvolta.

If $x,y,z>0$ then

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{8xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}\ge 4.$$

Soluție.

Inegalitatea se scrie echivalent:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{8}{\left(\frac{x}{y}+1\right)\left(\frac{y}{z}+1\right)\left(\frac{z}{x}+1\right)}\ge 4.$$

Notând $\frac{x}{y}=a,\frac{y}{z}=b,\frac{z}{x}=c$ avem $a,b,c>0$, $abc=1$, iar problema se reformulează:

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$a+b+c+\frac{8abc}{(a+1)(b+1)(c+1)}\ge 4.$$

Notăm $a+b+c=p, ab+bc+ca=q, abc=r=1$.

Avem de demonstrat:

$p+\frac{8r}{p+q+r+1}\ge 4\overset{r=1}{\Leftrightarrow} p+\frac{8}{p+q+2}\ge 4$,(1), care rezultă din inegalitatea lui Schur în format $p,q,r: p^3+9r\ge 4pq$.

Demonstrație:

$a^3+b^3+c^3+3abc\ge\sum bc(b+c)\Leftrightarrow p^3-3pq+3r+3r\ge pq-3r\Leftrightarrow p^3+9r\ge 4pq$.

Punând $r=1$ în $p^3+9r\ge 4pq$, avem $q\le\frac{p^3+9}{4p}$ și pentru demonstrarea inegalității (1) este suficient să arătăm că:

$$p+\frac{8}{p+\frac{p^3+9}{4p}+2}\geq 4 \Leftrightarrow p+\frac{8}{\frac{p^3+4p^2+8p+9}{4p}}\geq 4 \Leftrightarrow p+\frac{32p}{p^3+4p^2+8p+9}\geq 4$$

$$\Leftrightarrow p\left(p^3+4p^2+8p+9\right)+32p\geq 4\left(p^3+4p^2+8p+9\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p-4)\left(p^3+4p^2+8p+9\right)+32p\geq 0 \Leftrightarrow p^4-8p^2+9p-36\geq 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (p-3)\left(p^3+3p^2+p+12\right)\geq 0$, care rezultă din $p\geq 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1 \Leftrightarrow x=y=z$.

Remarcă.

Problema se poate dezvolta.

If $x,y,z>0$ $\lambda\geq\frac{7}{8}$ then then

$$\lambda\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)+\frac{8xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}\geq 3\lambda+1.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Inegalitatea se scrie echivalent:

$$\lambda\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)+\frac{8}{\left(\frac{x}{y}+1\right)\left(\frac{y}{z}+1\right)\left(\frac{z}{x}+1\right)}\geq 3\lambda+1.$$

Notând $\frac{x}{y}=a,\frac{y}{z}=b,\frac{z}{x}=c$ avem $a,b,c>0$, $abc=1$, iar problema se reformulează:

If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $\lambda\geq\frac{7}{8}$ then

$$\lambda(a+b+c)+\frac{8abc}{(a+1)(b+1)(c+1)}\geq 3\lambda+1.$$

Notăm $a+b+c=p, ab+bc+ca=q, abc=r=1$.

Avem de demonstrat:

$\lambda p+\frac{8r}{p+q+r+1}\geq 3\lambda+1 \overset{r=1}{\Leftrightarrow} \lambda p+\frac{8}{p+q+2}\geq 3\lambda+1$,(1), care rezultă din inegalitatea lui Schur în format p,q,r: $p^3+9r\geq 4pq$.

Demonstrație:

$a^3+b^3+c^3+3abc\geq\sum bc(b+c) \Leftrightarrow p^3-3pq+3r+3r\geq pq-3r \Leftrightarrow p^3+9r\geq 4pq$.

Punând $r=1$ în $p^3+9r\geq 4pq$, avem $q\leq\frac{p^3+9}{4p}$ și pentru demonstrarea inegalității (1) este suficient să arătăm că:

$$\lambda p+\frac{8}{p+\frac{p^3+9}{4p}+2}\geq 3\lambda+1 \Leftrightarrow \lambda p+\frac{8}{\frac{p^3+4p^2+8p+9}{4p}}\geq 3\lambda+1 \Leftrightarrow$$

$$\lambda p+\frac{32p}{p^3+4p^2+8p+9}\geq 3\lambda+1$$

$$\Leftrightarrow \lambda p\left(p^3+4p^2+8p+9\right)+32p \ge (3\lambda+1)\left(p^3+4p^2+8p+9\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda p-3\lambda-1)\left(p^3+4p^2+8p+9\right)+32p \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\lambda p^4+(\lambda-1)p^3-4(\lambda+1)p^2+(24-15\lambda)p-9(3\lambda+1)\ge 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (p-3)\left[3p^3+(4\lambda-1)p^2+(8\lambda-7)p+3(\lambda+1)\right]\ge 0$, care rezultă din $p\ge 3$ și condiția din ipoteză $\lambda \ge \frac{7}{8}$, care asigură $\left[3p^3+(4\lambda-1)p^2+(8\lambda-7)p+3(\lambda+1)\right]>0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1 \Leftrightarrow x=y=z$.

Aplicația 8.

If $a,b,c>0$ then

$$3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)+\frac{64abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 17.$$

RMM 12/2020, Nguyen Van Canh, Vietnam

Soluție.

Inegalitatea se scrie echivalent:

$$3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)+\frac{64}{\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{b}{c}+1\right)\left(\frac{c}{a}+1\right)}\ge 17.$$

Notând $\frac{a}{b}=x, \frac{b}{c}=y, \frac{c}{a}=z$ avem $x,y,z>0$, $xyz=1$, iar problema se reformulează:

1) If $x,y,z>0$, $xyz=1$,then

$$3\left(x^2+y^2+z^2\right)+\frac{64}{(x+1)(y+1)(z+1)}\ge 17.$$

Notăm $x+y+z=p, xy+yz+zx=q, xyz=r=1$.

Avem de demonstrat:

$3\left(p^2-2q\right)+\frac{64}{p+q+r+1}\ge 17 \overset{r=1}{\Leftrightarrow} 3\left(p^2-2q\right)+\frac{64}{p+q+2}\ge 17$,(1), care rezultă din:

$p^2\ge 3q \Leftrightarrow 3\left(p^2-2q\right)\ge p^2$, (2).

Pentru demonstrarea inegalității (1) , folosind (2), este suficient să arătăm că:

$$p^2+\frac{64}{p+\frac{p^2}{3}}\ge 17 \Leftrightarrow p^4+3p^3-11p^2-51p+90\ge 0 \Leftrightarrow (p-3)\left(p^3+6p^2+7p-30\right)\ge 0,$$

care rezultă din $p\ge 3$, adevărată din $p=x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}=3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1 \Leftrightarrow a=b=c$.

Remarcă.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c>0$ then

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\lambda\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge \lambda+3, \text{ unde } 0\le\lambda\le 5.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Inegalitatea se scrie echivalent:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{8\lambda}{\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{b}{c}+1\right)\left(\frac{c}{a}+1\right)}\geq\lambda+3.$$

Notând $\frac{a}{b}=x,\frac{b}{c}=y,\frac{c}{a}=z$ avem $x,y,z>0$, $xyz=1$, iar problema se reformulează:

If $x,y,z>0$, $xyz=1$,then

$$x^2+y^2+z^2+\frac{8\lambda}{(x+1)(y+1)(z+1)}\geq\lambda+3, \text{ unde } 0\leq\lambda\leq5.$$

Notăm $x+y+z=p, xy+yz+zx=q, xyz=r=1$.

Avem de demonstrat:

$p^2-2q+\frac{8\lambda}{p+q+r+1}\geq\lambda+3\overset{r=1}{\Leftrightarrow} p^2-2q+\frac{8\lambda}{p+q+2}\geq\lambda+3$,(1), care rezultă din:

$p^2\geq3q\Leftrightarrow p^2-2q\geq\frac{p^2}{3}$, (2).

Pentru demonstrarea inegalității (1) , folosind (2), este suficient să arătăm că:

$$\frac{p^2}{3}+\frac{8\lambda}{p+\frac{p^2}{3}+2}\geq\lambda+3\Leftrightarrow p^4+3p^3-3(\lambda+1)p^2-9(\lambda+3)p+54(\lambda-1)\geq0\Leftrightarrow$$

$(p-3)\left[p^3+6p^2+3(5-\lambda)p+18(1-\lambda)\right]\geq0$, care rezultă din $p\geq3$,

adevărată din $p=x+y+z\geq3\sqrt[3]{xyz}=3$ și condiția din ipoteză $\lambda\leq5$,

care asigură $\left[p^3+6p^2+3(5-\lambda)p+18(1-\lambda)\right]>0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1\Leftrightarrow a=b=c$.

Notă.

Pentru $\lambda=\frac{8}{3}$ se obține Problema propusă de Nguyen Van Canh în RMM 12/2020.

If $a,b,c>0$ then

$$3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)+\frac{64abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq17.$$

Nguyen Van Canh

Aplicația 9.

If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=3$ then

$$9\left(a^2+b^2+c^2\right)-2\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq21.$$

JP.375-RMM-nr.25-Summer 2022, George Apostolopoulos, Greece

Soluție.

Notând $p=\sum a=3$, $q=\sum bc$ și $r=abc$, obținem:

$a^2+b^2+c^2=p^2-2q=9-2q$, $a^3+b^3+c^3=p^3-3pq+3r=27-9q+3r$.

Inegalitatea se scrie:

$9(9-2q)-2(27-9q+3r)\geq21\Leftrightarrow r\leq1$, care rezultă din inegalitatea mediilor:

$3=a+b+c\geq3\sqrt[3]{abc}=3\sqrt[3]{r}$, de unde $r\leq1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=3$ and $\lambda\geq\frac{9}{2}$ then

$$\lambda\left(a^2+b^2+c^2\right)-\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq 3(\lambda-1).$$

Marin Chirciu

Soluție.

Notând $p=\sum a=3$, $q=\sum bc$ și $r=abc$, obținem:

$a^2+b^2+c^2=p^2-2q=9-2q$, $a^3+b^3+c^3=p^3-3pq+3r=27-9q+3r$.

Inegalitatea se scrie:

$\lambda(9-2q)-(27-9q+3r)\geq 3(\lambda-1)\Leftrightarrow(9-2\lambda)q\geq 24-6\lambda+3r$, care rezultă din inegalitatea mediilor:

$3=a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}=3\sqrt[3]{r}$, de unde $r\leq 1$.

Este suficient să arătăm că:

$(9-2\lambda)q\geq 24-6\lambda+3\cdot 1\Leftrightarrow(9-2\lambda)q\geq 24-6\lambda+3\cdot 1\Leftrightarrow(9-2\lambda)q\geq 3(9-2\lambda)$, adevărată din $(9-2\lambda)\leq 0$ și $q\leq 3$,care rezultă din $9=(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)\geq 3q$, de unde $q\leq 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Notă.

Pentru $\lambda=\frac{9}{2}$ se obține Problema JP.375 din Nr.25 RMM, Summer 2022, propusă de George Apostolopoulos, Greece.

Sol2.

Inegalitatea se scrie echivalent:

$\lambda\left(a^2+b^2+c^2\right)-\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq 3(\lambda-1)\Leftrightarrow\lambda\left(a^2+b^2+c^2-3\right)\geq a^3+b^3+c^3-3$.

Deoarece $a^2+b^2+c^2\geq 3$ și $\lambda\geq\frac{9}{2}$ este suficient să arătăm că:

$\frac{9}{2}\left(a^2+b^2+c^2-3\right)\geq a^3+b^3+c^3-3\Leftrightarrow 9\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 2\left(a^3+b^3+c^3\right)+21.$

Notând $p=\sum a=3$, $q=\sum bc$ și $r=abc$, obținem:

$a^2+b^2+c^2=p^2-2q=9-2q$, $a^3+b^3+c^3=p^3-3pq+3r=27-9q+3r$.

Inegalitatea se scrie:

$9(9-2q)\geq 2(27-9q+3r)+21\Leftrightarrow r\leq 1$, care rezultă din inegalitatea mediilor:

$3=a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}=3\sqrt[3]{r}$, de unde $r\leq 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Notă.

Pentru $\lambda=\frac{9}{2}$ se obține Problema JP.375 din Nr.25 RMM, Summer 2022, propusă de George Apostolopoulos, Greece.

Aplicația 10.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{(b+c)^4}{3a^3+13abc}\geq 3\sqrt[3]{abc}.$$

RMM1/2021, Lazaros Zachariadis

Soluție.

Datorită omogenității se poate considera $abc=1$.

Problema se reformulează.

Lema

If $a,b,c>0$ and $abc=1$ then

$$\sum\frac{(b+c)^4}{3a^3+13}\geq 3.$$

Demonstrație.

Folosind inegalitatea lui Bergstrom obținem:

$$Ms=\sum\frac{(b+c)^4}{3a^3+13}\geq\frac{\left[\sum(b+c)^2\right]^2}{\sum\left(3a^3+13\right)}=\frac{\left[\sum(b+c)^2\right]^2}{3\sum a^3+39}\overset{(1)}{\geq}3=Md,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \dfrac{\left[\sum(b+c)^2\right]^2}{3\sum a^3+39}\geq 3\Leftrightarrow\dfrac{\left[\sum(b+c)^2\right]^2}{\sum a^3+13}\geq 9$, care rezultă din metoda pqr.

Notăm $\sum a=p,\sum bc=q, abc=r=1$.

Avem $\sum a^2=p^2-2q$, $\sum a^3=p^3-3pq+3r=p^3-3pq+3$, $p^2\geq 3q$, $p\geq 3$, $q\geq 3$.

Obținem:

$$\frac{\left[\sum(b+c)^2\right]^2}{\sum a^3+13}=\frac{\left[\sum\left(b^2+c^2+2bc\right)\right]^2}{\sum a^3+13}=\frac{\left(2\sum a^2+2\sum bc\right)^2}{\sum a^3+13}=\frac{4\left(\sum a^2+\sum bc\right)^2}{\sum a^3+13}=$$

$$=\frac{4\left(p^2-2q+q\right)^2}{\left(p^3-3pq+3\right)+13}=\frac{4\left(p^2-q\right)^2}{p^3-3pq+16}\overset{(2)}{\geq}9,$$

unde (2) $\Leftrightarrow\dfrac{4\left(p^2-q\right)^2}{p^3-3pq+16}\geq 9\Leftrightarrow 4p^4-9p^3-8p^2q+27pq+4q^2-144\geq 0$.

Considerăm funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(p)=4p^4-9p^3-8p^2q+27pq+4q^2-144$.

Să arătăm că $f(p)\geq 0$, $p>0$.

Calculăm $f'(p)=16p^3-27p^2-16pq+27q+4q^2$.

Rezultă: $f'(p)=16p^3-27p^2-16pq+27q+4q^2=16p\left(p^2-q\right)-27\left(p^2-q\right)+4q^2=$

$=\left(p^2-q\right)(16p-27)+4q^2>0$, care rezultă din $\left(p^2-q\right)>0$, $(16p-27)>0$ și $4q^2>0$.

Din $f'(p)>0$, $p>0$ rezultă că funcția f este strict crescătoare pe $(0,\infty)$.

Cum $p\geq 3$ și funcția f este strict crescătoare pe $(0,\infty)$ rezultă că: $f(p)\geq f(3)$.

Să calculăm $f(3)=4\cdot 3^4-9\cdot 3^3-8\cdot 3^2q+27\cdot 3q+4q^2-144=4q^2+9q-63$.

Deoarece $q\geq 3$ obținem că $f(3)=4q^2+9q-63\geq 4\cdot 3^2+9\cdot 3-63=0$.

Am obținut că $f(p)\geq f(3)\geq 0$ și astfel problema este încheiată.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{(b+c)^4}{a^3+\lambda abc}\geq\frac{48}{\lambda+1}\sqrt[3]{abc},\text{ unde } 2\leq\lambda\leq 5.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Datorită omogenității se poate considera $abc=1$.

Problema se reformulează.

Lema

If $a,b,c>0$ and $abc=1$ then

$$\sum\frac{(b+c)^4}{a^3+\lambda}\geq\frac{48}{\lambda+1},\text{ unde } 2\leq\lambda\leq 5.$$

Demonstrație.

Folosind inegalitatea lui Bergstrom obținem:

$$Ms=\sum\frac{(b+c)^4}{a^3+\lambda}\geq\frac{\left[\sum(b+c)^2\right]^2}{\sum\left(a^3+\lambda\right)}=\frac{\left[\sum(b+c)^2\right]^2}{\sum a^3+3\lambda}\overset{(1)}{\geq}\frac{48}{\lambda+1}=Md,$$

unde (1) $\Leftrightarrow\dfrac{\left[\sum(b+c)^2\right]^2}{\sum a^3+3\lambda}\geq\dfrac{48}{\lambda+1}\Leftrightarrow\dfrac{\left[\sum(b+c)^2\right]^2}{\sum a^3+3\lambda}\geq\dfrac{48}{\lambda+1}$, care rezultă din metoda pqr.

Notăm $\sum a=p,\sum bc=q,abc=r=1$.

Avem $\sum a^2=p^2-2q$, $\sum a^3=p^3-3pq+3r=p^3-3pq+3$, $p^2\geq 3q$, $p\geq 3$, $q\geq 3$.

Obținem:

$$\frac{\left[\sum(b+c)^2\right]^2}{\sum a^3+3\lambda}=\frac{\left[\sum\left(b^2+c^2+2bc\right)\right]^2}{\sum a^3+3\lambda}=\frac{\left(2\sum a^2+2\sum bc\right)^2}{\sum a^3+3\lambda}=\frac{4\left(\sum a^2+\sum bc\right)^2}{\sum a^3+3\lambda}=$$

$$=\frac{4\left(p^2-2q+q\right)^2}{\left(p^3-3pq+3\right)+3\lambda}=\frac{4\left(p^2-q\right)^2}{p^3-3pq+3\lambda+3}\overset{(2)}{\geq}\frac{48}{\lambda+1},$$

unde (2) $\Leftrightarrow\dfrac{4\left(p^2-q\right)^2}{p^3-3pq+3\lambda+3}\geq\dfrac{48}{\lambda+1}\Leftrightarrow\dfrac{\left(p^2-q\right)^2}{p^3-3pq+3\lambda+3}\geq\dfrac{12}{\lambda+1}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(\lambda+1)p^4-12p^3-2(\lambda+1)p^2q+36pq+(\lambda+1)q^2-36(\lambda+1)\geq 0$.

Considerăm funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$,

$f(p)=(\lambda+1)p^4-12p^3-2(\lambda+1)p^2q+36pq+(\lambda+1)q^2-36(\lambda+1)$.

Să arătăm că $f(p)\geq 0$, $p>0$.

Calculăm $f'(p)=4(\lambda+1)p^3-36p^2-4(\lambda+1)pq+36q+(\lambda+1)q^2$.

Rezultă: $f'(p)=4(\lambda+1)p^3-36p^2-4(\lambda+1)pq+36q+(\lambda+1)q^2$

$=4(\lambda+1)p\left(p^2-q\right)-36\left(p^2-q\right)+(\lambda+1)q^2=$

$=4\left(p^2-q\right)\left((\lambda+1)p-9\right)+(\lambda+1)q^2>0$,

care rezultă din $\left(p^2-q\right)>0$, $\left((\lambda+1)p-9\right)\geq 0$, din $\lambda\geq 2$ și $(\lambda+1)q^2>0$.

Din $f'(p)>0$, $p>0$ rezultă că funcția f este strict crescătoare pe $(0,\infty)$.

Cum $p\geq 3$ și funcția f este strict crescătoare pe $(0,\infty)$ rezultă că: $f(p)\geq f(3)$.

Să calculăm $f(3)=(\lambda+1)\cdot 3^4-12\cdot 3^3-2(\lambda+1)\cdot 3^2q+36\cdot 3q+(\lambda+1)q^2-36(\lambda+1)=$

$=(\lambda+1)q^2+18(5-\lambda)q+9(5\lambda-31)$.

Deoarece $q \geq 3$ și $\lambda \leq 5$ obținem

că $f(3) = (\lambda+1)q^2 + 18(5-\lambda)q + 9(5\lambda-31) \geq (\lambda+1)\cdot 3^2 + 18(5-\lambda)\cdot 3 + 9(5\lambda-31) = 0$.

Am obținut că $f(p) \geq f(3) \geq 0$ și astfel problema este încheiată.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Notă.

Pentru $\lambda = \dfrac{13}{3}$ se obține Problema propusă de Lazaros Zachariadis în RMM 1/2020.

Remarcă.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c > 0$ such that $abc = 1$ and $n \in \mathbf{N}, n \geq 3$ then

$$\sum \frac{(b+c)^n}{a^3+\lambda} \geq \frac{3\cdot 2^n}{\lambda+1}, \text{ unde } \lambda \geq 2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Holder obținem:

$$Ms \overset{abc=1}{=} \sum \frac{(b+c)^n}{a^3+\lambda abc} = \sum \frac{(b+c)^n}{a(a^2+\lambda bc)} \overset{Holder}{\geq} \frac{\left[\sum(b+c)\right]^n}{3^{n-3}\sum a \sum(a^2+\lambda bc)} = \frac{\left[2\sum a\right]^n}{3^{n-3}\sum a \sum(a^2+\lambda bc)} =$$

$$= \frac{2^n\left(\sum a\right)^n}{3^{n-3}\sum a\left[\left(\sum a\right)^2 - 2\sum bc + \lambda\sum bc\right]} = \frac{2^n\left(\sum a\right)^{n-1}}{3^{n-3}\left[\left(\sum a\right)^2 + (\lambda-2)\sum bc\right]} \underset{\lambda\geq 2}{\overset{\left(\sum a\right)^2\geq 3\sum bc}{\geq}}$$

$$\underset{\lambda\geq 2}{\overset{\left(\sum a\right)^2\geq 3\sum bc}{\geq}} \frac{2^n\left(\sum a\right)^{n-1}}{3^{n-3}\left[\left(\sum a\right)^2 + (\lambda-2)\frac{\left(\sum a\right)^2}{3}\right]} = \frac{2^n\left(\sum a\right)^{n-1}}{3^{n-3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[3+(\lambda-2)\right]\left(\sum a\right)^2} = \frac{2^n\left(\sum a\right)^{n-3}}{3^{n-4}\cdot(\lambda+1)} \overset{AM-GM}{\geq}$$

$$\overset{AM-GM}{\geq} \frac{2^n\left(3\sqrt[3]{abc}\right)^{n-3}}{3^{n-4}\cdot(\lambda+1)} \overset{abc=1}{=} \frac{2^n(3\cdot 1)^{n-3}}{3^{n-4}\cdot(\lambda+1)} = \frac{2^n\cdot 3}{\lambda+1}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Aplicația 11.

If $a,b,c > 0$ such that $a+b+c = 3$ then

$$9\left(a^2+b^2+c^2\right) - 2\left(a^3+b^3+c^3\right) \geq 21.$$

JP.375 RMM-Summer Edition 2022, George Apostolopoulos, Greece

Soluție.

Folosim metoda pqr.

Notăm $p = a+b+c = 3$, $q = ab+bc+ca$ și $r = abc$.

Avem:

$$\sum a^2 = p^2 - 2q = 9 - 2q, \sum a^3 = p^3 - 3pq + 3r = 27 - 9q + 3r, r = abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = 1.$$

Inegalitatea se scrie $9(9-2q) - 2(27-9q+3r) \geq 21 \Leftrightarrow 27 - 6r \geq 21 \Leftrightarrow r \leq 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Remarcă.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c > 0$ such that $a+b+c = 3$ then

$$\lambda\left(a^2+b^2+c^2\right)-\mu\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq 3(\lambda-\mu), \text{ unde } 0\leq 37\mu\leq 12\lambda\leq 54\mu .$$

Marin Chirciu

Soluție.
Folosim metoda pqr.
Notăm $p=a+b+c=3$, $q=ab+bc+ca$ și $r=abc$.
Avem:

$$\sum a^2=p^2-2q=9-2q, \sum a^3=p^3-3pq+3r=27-9q+3r, r=abc\leq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=1.$$

Inegalitatea se scrie:
$\lambda(9-2q)-\mu(27-9q+3r)\geq 3(\lambda-\mu) \Leftrightarrow (9\mu-2\lambda)q+6\lambda-24\mu\geq 3\mu r$, (1),
care rezultă din:
$q=ab+bc+ca\geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}=3\sqrt[3]{r^2}$; notăm $\sqrt[3]{r}=t$;
Pentru demonstrarea inegalității (1) este suficient să arătăm că:
$(9\mu-2\lambda)\cdot 3t^2+6\lambda-24\mu\geq 3\mu\cdot t^3 \Leftrightarrow (9\mu-2\lambda)\cdot t^2+2\lambda-8\mu\geq \mu\cdot t^3 \Leftrightarrow$
$\mu\cdot t^3+(2\lambda-9\mu)\cdot t^2+8\mu-2\lambda\leq 0 \Leftrightarrow (t-1)\left[\mu t^2+\mu t+3(\lambda-3\mu)\right]\leq 0$, care rezultă din
$(t-1)\leq 0 \Leftrightarrow r\leq 1$ și $\left[\mu t^2+\mu t+3(\lambda-3\mu)\right]\geq 0$, adevărată din $\mu>0$ și $\Delta\leq 0$, unde
$\Delta=\mu^2-4\mu\cdot 3(\lambda-3\mu)\leq 0 \Leftrightarrow 12\lambda\geq 37\mu$
Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.
Notă.
Pentru $\lambda=9$ și $\mu=2$ se obține Problema JP.375 din RMM-Summer Edition 2022 propusă de George Apostolopoulos, Greece.
Remarcă.
Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=3$ then

$$\lambda\left(a^2+b^2+c^2\right)-\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq 3(\lambda-1), \text{ unde } 37\leq 12\lambda\leq 54.$$

Marin Chirciu

Soluție.
Folosim metoda pqr.
Notăm $p=a+b+c=3$, $q=ab+bc+ca$ și $r=abc$.
Avem:

$$\sum a^2=p^2-2q=9-2q, \sum a^3=p^3-3pq+3r=27-9q+3r, r=abc\leq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=1.$$

Inegalitatea se scrie:
$\lambda(9-2q)-\mu(27-9q+3r)\geq 3(\lambda-\mu) \Leftrightarrow (9\mu-2\lambda)q+6\lambda-24\mu\geq 3\mu r$, (1),
care rezultă din:
$q=ab+bc+ca\geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}=3\sqrt[3]{r^2}$; notăm $\sqrt[3]{r}=t$;
Pentru demonstrarea inegalității (1) este suficient să arătăm că:
$(9-2\lambda)\cdot 3t^2+6\lambda-24\geq 3\cdot t^3 \Leftrightarrow (9-2\lambda)\cdot t^2+2\lambda-8\geq t^3 \Leftrightarrow t^3+(2\lambda-9)\cdot t^2+8-2\lambda\leq 0 \Leftrightarrow$
$(t-1)\left[t^2+t+3(\lambda-3)\right]\leq 0$, care rezultă din
$(t-1)\leq 0 \Leftrightarrow r\leq 1$ și $\left[t^2+t+3(\lambda-3)\right]\geq 0$, adevărată din $\Delta\leq 0$, unde

$\Delta = 1^2 - 4\cdot 3(\lambda - 3) \le 0 \Leftrightarrow 12\lambda \ge 37$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Notă.

Pentru $\lambda = \frac{9}{2}$ se obține Problema JP.375 din RMM-Summer Edition 2022 propusă de George Apostolopoulos, Greece.

Aplicația 12.

If $a,b,c>0$ such that $a+b+c\ge 3$ then

$$\frac{a}{\sqrt{1+2b}}+\frac{b}{\sqrt{1+2c}}+\frac{c}{\sqrt{1+2a}}\ge\frac{3}{2}.$$

Problem(548), Kostas Geronikolas

Soluție.

Folosim metoda pqr.

Notăm $p = a+b+c$, $q = ab+bc+ca$, $r = abc$.

Avem $p\ge 3$ și $p^2\ge 3q$.

Folosind inegalitatea lui Bergstrőm obținem:

$$Ms=\sum\frac{a}{\sqrt{1+2b}}=\sum\frac{a^2}{a\sqrt{1+2b}}\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum a\sqrt{1+2b}}=\frac{p^2}{\sum\sqrt{a(a+2ab)}}\overset{AGM}{\ge}\frac{p^2}{\sum\frac{a+(a+2ab)}{2}}=$$

$$=\frac{p^2}{\sum(a+ab)}=\frac{p^2}{p+q}\overset{(1)}{\ge}\frac{3}{2}=Md\text{, unde }(1)\Leftrightarrow\frac{p^2}{p+q}\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2p^2\ge 3p+3q\text{, care rezultă din}$$

$p^2\ge 3q \Leftrightarrow 3q\le p^2$.

Rămâne să arătăm că:

$2p^2\ge 3p+p^2 \Leftrightarrow p^2\ge 3p \Leftrightarrow p\ge 3$.

În inegalitatea mediilor de mai sus(AGM) egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=(a+2ab)$ și analoagele, imposibil deoarece $a,b,c>0$.

Deducem că inegalitatea este strictă.

Remarca.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c>0$ such that $a+b+c\ge 3$ and $\lambda\ge 0$ then

$$\frac{a}{\sqrt{1+\lambda b}}+\frac{b}{\sqrt{1+\lambda c}}+\frac{c}{\sqrt{1+\lambda a}}\ge\frac{3}{\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim metoda pqr.

Notăm $p = a+b+c$, $q = ab+bc+ca$, $r = abc$.

Avem $p\ge 3$ și $p^2\ge 3q$.

Folosind inegalitatea lui Bergstrőm obținem:

$$Ms=\sum\frac{a}{\sqrt{1+\lambda b}}=\sum\frac{a^2}{a\sqrt{1+\lambda b}}\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum a\sqrt{1+\lambda b}}=\frac{p^2}{\sum\sqrt{a(a+\lambda ab)}}\overset{AGM}{\ge}\frac{p^2}{\sum\frac{a+(a+\lambda ab)}{2}}=$$

$$=\frac{2p^2}{\sum(2a+\lambda ab)}=\frac{2p^2}{2p+\lambda q}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{\lambda+1}=Md \text{ , unde } (1)\Leftrightarrow \frac{2p^2}{2p+\lambda q}\geq\frac{3}{\lambda+1}$$

$\Leftrightarrow 2(\lambda+1)p^2\geq 6p+3\lambda q$,

care rezultă din

$p^2\geq 3q \Leftrightarrow 3q\leq p^2$.

Rămâne să arătăm că:

$2(\lambda+1)p^2\geq 6p+\lambda p^2 \Leftrightarrow 2p^2\geq 6p \Leftrightarrow p\geq 3$.

În inegalitatea mediilor de mai sus(AGM) egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=(a+\lambda ab)$ și analoagele, adevărat numai pentru $\lambda=0$.

Notă.

Pentru $\lambda=2$ se obține Problema(548) propusă de Kostas Geronikolas în RMM 2/2021.

If $a,b,c>0$ such that $a+b+c\geq 3$ then

$$\frac{a}{\sqrt{1+2b}}+\frac{b}{\sqrt{1+2c}}+\frac{c}{\sqrt{1+2a}}\geq\frac{3}{2}.$$

Problem(548), Kostas Geronikolas

Aplicația 13.

If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=1$ find maximum of

$$E=(ab+bc+ca)(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2).$$

Mathematical Olympiads, 2/2021, Elton P

Soluție.

Folosim metoda pqr.

Notăm $p=a+b+c=1, q=ab+bc+ca$ și $r=abc$.

Din $p^2=(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)=3q$ obținem $q\leq\frac{p^2}{3}$.

Din inegalitatea lui Schur avem $p^3+9r\geq 4pq$ (Schur).

Demonstrație:

$a^3+b^3+c^3+3abc\geq\sum bc(b+c) \Leftrightarrow p^3-3pq+3r+3r\geq pq-3r \Leftrightarrow p^3+9r\geq 4pq$.

În cazul nostru: $q\leq\frac{1}{3}$ și $1+9r\geq 4q \Leftrightarrow r\geq\frac{4q-1}{9}$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Arătăm că:

$$\max E(a,b,c)=\sum ab\cdot\sum a^2b\cdot\sum ab^2=E\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{243}.$$

Folosind inegalitatea mediilor $xy\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ pntru $x=\sum a^2b$ și $y=\sum ab^2$ obținem:

$$xy=\sum a^2b\cdot\sum ab^2\leq\left(\frac{\sum a^2b+\sum ab^2}{2}\right)^2=\left(\frac{\sum ab(a+b)}{2}\right)^2=\left(\frac{\sum a\sum ab-3abc}{2}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{pq-3r}{2}\right)^2=\left(\frac{q-3r}{2}\right)^2.$$

Obținem $E\leq q\left(\frac{q-3r}{2}\right)^2$.

Deoarece $q \le \frac{1}{3}$ și $r \ge \frac{4q-1}{9}$ obținem:

$$E \le q\left(\frac{q-3r}{2}\right)^2 \le q\left(\frac{q-3\cdot\frac{4q-1}{9}}{2}\right)^2 = q\left(\frac{1-q}{6}\right)^2 = q\left(\frac{q-1}{6}\right)^2 \overset{(1)}{\le} \frac{1}{243},$$

unde (1) $\Leftrightarrow q\left(\frac{q-1}{6}\right)^2 \le \frac{1}{243} \Leftrightarrow 27q(q-1)^2 \le 4 \Leftrightarrow 27q^3 - 54q^2 + 27q - 4 \le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3q-1)^2(3q-4) \le 0$, care rezultă din $q \le \frac{1}{3}$, cu egalitate pentru $q = \frac{1}{3}$.

Din $E \le \frac{1}{243}$, cu egalitate pentru $a=b=c=\frac{1}{3}$ deducem că $\max E = \frac{1}{243}$ și maximul este atins pentru $a=b=c=\frac{1}{3}$.

În final maximul expresiei $E=(ab+bc+ca)(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)$ este $\frac{1}{243}$, pentru $(a,b,c)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Aplicația 14.

If $a,b,c>0$ such that $a+b+c\ge 3$ then

$$\sum\frac{a}{\sqrt{1+kb}} \ge \frac{3}{\sqrt{1+k}}.$$

RMM 3/2021, Kostas Geronikolas, Greece

Soluție

Folosind metoda *pqr* avem $p=a+b+c\ge 3$, $q=ab+bc+ca\le\frac{p^2}{3}$, (1).

Obținem:

$$Ms=\sum\frac{a}{\sqrt{1+kb}}=\sum\frac{a^2}{a\sqrt{1+kb}}=\sum\frac{a^2}{\sqrt{a}\sqrt{a+kab}} \overset{CS}{\ge} \frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum\sqrt{a}\sqrt{a+kab}} \overset{CBS}{\ge} \frac{p^2}{\sqrt{\sum a\sum(a+kab)}}=$$

$$=\frac{p^2}{\sqrt{\sum a}\cdot\sqrt{\sum(a+kab)}}=\frac{p^2}{\sqrt{p}\cdot\sqrt{p+kq}} \overset{(1)}{\ge} \frac{p^2}{\sqrt{p}\cdot\sqrt{p+k\cdot\frac{p^2}{3}}}=\frac{p^2}{p\sqrt{1+k\cdot\frac{p}{3}}}=\frac{p}{\sqrt{1+k\cdot\frac{p}{3}}} \overset{(2)}{\ge}$$

$\overset{(2)}{\ge}\frac{3}{\sqrt{1+k}}=Md$, unde (2) $\Leftrightarrow \frac{p}{\sqrt{1+k\cdot\frac{p}{3}}} \ge \frac{3}{\sqrt{1+k}} \Leftrightarrow p^2(1+k)\ge 9\left(1+k\cdot\frac{p}{3}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p^2(1+k)-3kp-9\ge 0 \Leftrightarrow (p-3)(kp+p+3)\ge 0$, care rezultă din condiția din ipoteză: $p=a+b+c\ge 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația 15.

If $a,b,c>0$ such that $abc=1$ then

$$\sum a^2+9\ge\frac{3}{2}\prod(a+1).$$

Mathematical Inequality 3/2021,Hoang Duc Hung

Soluție

Folosim metoda *pqr* avem $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca \overset{Schur}{\leq} \frac{p^3+9}{4p}$, (1), $abc=1$.

Inegalitatea se scrie:

$p^2-2q+9 \geq \frac{3}{2}(1+p+q+1) \Leftrightarrow 2p^2-3p-7q+12 \geq 0$, care rezultă din (1): $q \leq \frac{p^3+9}{4p}$.

Este suficient să arătăm că:

$2p^2-3p-7\cdot\frac{p^3+9}{4p}+12 \geq 0 \Leftrightarrow p^3-12p^2+48p-63 \geq 0 \Leftrightarrow (p-3)\left(p^2-9p+21\right) \geq 0$,

care rezultă din $p \geq 3$, adevărată din inegalitatea mediilor și condiția din ipoteză $abc=1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c>0$ such that $abc=1$ and $n,\lambda>0$, $n\lambda<2$ and

$16n^2\lambda^4+24n^2\lambda^3+\left(21n^2-48n\right)\lambda^2-36n\lambda-12<0$ then

$$\sum a^2+n(\lambda+1)^3 \geq 3+n\prod(a+\lambda).$$

Marin Chirciu

Soluție

Folosim metoda *pqr* avem $p=a+b+c \overset{AGM}{\geq} 3$, $q=ab+bc+ca \overset{Schur}{\leq} \frac{p^3+9}{4p}$, (1), $abc=1$.

Inegalitatea se scrie:

$p^2-2q+n(\lambda+1)^3 \geq 3+n\left(1+\lambda^2p+\lambda q+\lambda^3\right) \Leftrightarrow p^2-n\lambda^2p-(2+n\lambda)q+3\left(n\lambda^2+n\lambda-1\right) \geq 0$,

care rezultă din (1): $q \leq \frac{p^3+9}{4p}$.

Este suficient să arătăm că:

$p^2-n\lambda^2p-(2+n\lambda)\cdot\frac{p^3+9}{4p}+3\left(n\lambda^2+n\lambda-1\right) \geq 0 \Leftrightarrow$

$(2-n\lambda)p^3-4n\lambda^2p^2+12\left(n\lambda^2+n\lambda-1\right)p-9(2+n\lambda) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (p-3)\left[(2-n\lambda)p^2+\left(6-3n\lambda-4n\lambda^2\right)p+3(2+n\lambda)\right] \geq 0$,

care rezultă din $p \geq 3$ și condiția din ipoteză, care asigură

$\left[(2-n\lambda)p^2+\left(6-3n\lambda-4n\lambda^2\right)p+3(2+n\lambda)\right]>0$, deaoarece $(2-n\lambda)>0$ și

$\Delta=16n^2\lambda^4+24n^2\lambda^3+\left(21n^2-48n\right)-36n\lambda-12<0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Notă.

Pentru $n=\frac{3}{2}, \lambda=1$ se obține Problema propusă de Hoang Duc Hung în Mathematical Inequality 3/2021.

Remarcă.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c>0$ such that $abc=1$ and $n,\lambda>0$, $n\lambda=\frac{3}{2}$ and $25n^2+36n-108>0$ then

$$\sum a^2+n(\lambda+1)^3\geq 3+n\prod(a+\lambda).$$

Marin Chirciu

Soluție

Folosim metoda *pqr* avem $p=a+b+c\overset{AGM}{\geq}3$, $q=ab+bc+ca\overset{Schur}{\leq}\dfrac{p^3+9}{4p}$, (1), $abc=1$.

Inegalitatea se scrie:

$p^2-2q+n(\lambda+1)^3\geq 3+n\left(1+\lambda^2 p+\lambda q+\lambda^3\right)\Leftrightarrow p^2-n\lambda^2 p-(2+n\lambda)q+3\left(n\lambda^2+n\lambda-1\right)\geq 0$,

care rezultă din (1): $q\leq\dfrac{p^3+9}{4p}$.

Este suficient să arătăm că:

$p^2-n\lambda^2 p-(2+n\lambda)\cdot\dfrac{p^3+9}{4p}+3\left(n\lambda^2+n\lambda-1\right)\geq 0\Leftrightarrow$

$(2-n\lambda)p^3-4n\lambda^2 p^2+12\left(n\lambda^2+n\lambda-1\right)p-9(2+n\lambda)\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(p-3)\left[(2-n\lambda)p^2+\left(6-3n\lambda-4n\lambda^2\right)p+3(2+n\lambda)\right]\geq 0$,

care rezultă din $p\geq 3$ și condiția din ipoteză, care asigură

$\left[(2-n\lambda)p^2+\left(6-3n\lambda-4n\lambda^2\right)p+3(2+n\lambda)\right]>0$, deaoarece $(2-n\lambda)>0$ și

$\Delta=16n^2\lambda^4+24n^2\lambda^3+\left(21n^2-48n\right)-36n\lambda-12<0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Notă.

Pentru $n=\dfrac{3}{2},\lambda=1$ se obține Problema propusă de Hoang Duc Hung în Mathematical Inequality 3/2021.

Aplicația 16.

If $x,y,z>0$ then

$$\sqrt{\frac{x}{x+y}}+\sqrt{\frac{y}{y+z}}+\sqrt{\frac{z}{z+x}}\leq\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Pure Inequalities 2/2021, Boris Colakovic

Soluție

Avem:

$$Ms=\sum\sqrt{\frac{x}{x+y}}=\sum\sqrt{\frac{x(y+z)(z+x)}{\prod(x+y)}}\leq\frac{\sqrt{\sum x(y+z)\sum(z+x)}}{\sqrt{\prod(x+y)}}=\frac{\sqrt{2\sum xy\cdot 2\sum x}}{\sqrt{\prod(x+y)}}=$$

$$=2\frac{\sqrt{\sum xy\cdot\sum x}}{\sqrt{\prod(x+y)}}=2\frac{\sqrt{\prod(x+y)+xyz}}{\sqrt{\prod(x+y)}}=2\sqrt{1+\frac{xyz}{\prod(x+y)}}\overset{Cesaro}{\leq}2\sqrt{1+\frac{1}{8}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z$.

Aplicația 17.

If $a,b,c>0$ with $(a+1)(b+1)(c+1)=8$ then

$$3+4\sum\frac{a+bc}{1+a}\geq 5(ab+bc+ca).$$

Mathematical Inequalities 4/2021,Philip CC

Soluție.
Folosind metoda pqr notăm $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$.
Relația din ipoteză $(a+1)(b+1)(c+1)=8$ se scrie $p+q+r=7$.
Cu inegalitatea mediilor obținem:
$8=(a+1)(b+1)(c+1)\geq 2\sqrt{a}\cdot 2\sqrt{b}\cdot 2\sqrt{c}=8\sqrt{r}\Rightarrow r\leq 1$.
$$8=(a+1)(b+1)(c+1)\overset{AGM}{\leq}\left[\frac{(a+1)+(b+1)+(c+1)}{3}\right]^3=\left(\frac{p+3}{3}\right)^3\Rightarrow p\geq 3.$$
Inegalitatea se scrie echivalent:
$$3+4\frac{\sum(a+bc)(1+b)(1+c)}{\prod(1+a)}\geq 5\sum bc\Leftrightarrow 3+4\cdot\frac{q^2-2pr+pq+p+3q}{8}\geq 5q\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow q^2-2p(7-p-q)+pq+p-7q+6\geq 0\Leftrightarrow 2p^2+q^2+3pq-13p-7q+6\geq 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2p^2+p(3q-13)+q^2-7q+6\geq 0\Leftrightarrow(2p+q-1)(p+q-6)\geq 0,$$
care rezultă din: $p+q+r=7$, $p\geq 3$ și $r\leq 1$.
Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația 18.
If $a,b,c>0$ with $abc=1$ then
$$(a+b)(b+c)(c+a)-2(a+b+c)\geq 2.$$
RMM 4/2021, D.M.Bătinețu-Giurgiu și Neculai Stanciu

Soluție.
Folosind metoda pqr notăm $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$.
Avem $(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=pq-r=pq-1$.
Inegalitatea se scrie:
$pq-1-2p\geq 2\Leftrightarrow pq-2p\geq 3\Leftrightarrow p(q-2)\geq 3$,
care rezultă din: $p\geq 3$ și $q\geq 3$, adevărate din inegalitatea mediilor și $abc=1$.
Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.
Problema se poate dezvolta.
If $a,b,c>0$ with $abc=1$ then
$$(a+b)(b+c)(c+a)-2(ab+bc+ca)\geq 2.$$
Marin Chirciu

Soluție.
Folosind metoda pqr notăm $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$.
Avem $(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=pq-r=pq-1$.
Inegalitatea se scrie:
$pq-1-2q\geq 2\Leftrightarrow pq-2q\geq 3\Leftrightarrow q(p-2)\geq 3$,
care rezultă din: $p\geq 3$ și $q\geq 3$, adevărate din inegalitatea mediilor și $abc=1$.
Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.
Problema se poate dezvolta.
If $a,b,c>0$ with $abc=1$ and $\lambda\leq 3$ then
$$(a+b)(b+c)(c+a)-\lambda(ab+bc+ca)\geq 8-3\lambda.$$
Marin Chirciu

Soluție.

Folosind metoda pqr notăm $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$.

Avem $(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=pq-r=pq-1$.

Inegalitatea se scrie:

$pq-1-\lambda q\geq 8-3\lambda \Leftrightarrow pq-\lambda q\geq 9-3\lambda \Leftrightarrow q(p-\lambda)\geq 3(3-\lambda)$,

care rezultă din: $p\geq 3$ și $q\geq 3$, adevărate din inegalitatea mediilor și $abc=1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c>0$ with $abc=1$ and $\lambda\leq 3$ then

$$(a+b)(b+c)(c+a)-\lambda(a+b+c)\geq 8-3\lambda.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind metoda pqr notăm $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$.

Avem $(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=pq-r=pq-1$.

Inegalitatea se scrie:

$pq-1-\lambda p\geq 8-3\lambda \Leftrightarrow pq-\lambda p\geq 9-3\lambda \Leftrightarrow p(q-\lambda)\geq 3(3-\lambda)$,

care rezultă din: $p\geq 3$ și $q\geq 3$, adevărate din inegalitatea mediilor și $abc=1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Notă.

Pentru $\lambda=2$ se obține Problema propusă de D.M.Bătinețu-Giurgiu și Neculai Stanciu în RMM 4/2021.

Aplicația 19.

If $a,b,c>0$ with $a+b+c=2$ then

$$\sqrt{\frac{ab}{3a+2b+c}}+\sqrt{\frac{bc}{3b+2c+a}}+\sqrt{\frac{ca}{3c+2a+b}}\leq 1.$$

Mathematical Inequalities,Nguyen Viet Hung, April 28, 2021

Soluție.

Folosind inegalitatea CBS obținem:

$$M^2s=\left(\sum\sqrt{\frac{ab}{3a+2b+c}}\right)^2\leq\sum ab\sum\frac{1}{3a+2b+c}\overset{(1)}{\leq}1=M^2d,$$

unde(1) $\Leftrightarrow \sum ab\sum\frac{1}{3a+2b+c}\leq 1$ rezultă din metoda pqr.

Notăm $p=\sum a=2, q=\sum bc\leq\frac{\left(\sum a\right)^2}{3}=\frac{2^2}{3}=\frac{4}{3}, r=abc\leq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$.

Avem $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\overset{CS}{\geq}\frac{(1+1+1)^2}{(a+b)+(a+b)+(a+c)}=\frac{9}{3a+2b+c}$.

Rezultă $\sum\frac{1}{3a+2b+c}=\sum\frac{1}{(a+b)+(a+b)+(a+c)}\overset{CS}{\leq}\frac{1}{9}\sum\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)=$

$$=\frac{1}{9}\left(\frac{3}{a+b}+\frac{3}{b+c}+\frac{3}{c+a}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)=\frac{1}{3}\frac{\sum(a+b)(a+c)}{\prod(b+c)}\overset{AGM}{\leq}$$

$$\overset{AGM}{\leq}\frac{1}{3}\frac{\sum a^2+3\sum bc}{\left[\frac{\sum(b+c)}{3}\right]^3}=\frac{1}{3}\frac{\left(\sum a\right)^2+\sum bc}{\left(\frac{2\sum a}{3}\right)^3}=\frac{1}{3}\frac{4+q}{\left(\frac{4}{3}\right)^3}=\frac{9}{64}(4+q)\leq\frac{9}{64}\left(4+\frac{4}{3}\right)=\frac{3}{4}.$$

Din $\sum ab\leq\frac{4}{3}$ și $\sum\frac{1}{3a+2b+c}\leq\frac{3}{4}$ rezultă $\sum ab\sum\frac{1}{3a+2b+c}\leq 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{2}{3}$.

Remarcă.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c>0$ with $a+b+c=2$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\sqrt{\frac{ab}{(n+1)a+nb+c}}+\sqrt{\frac{bc}{(n+1)b+nc+a}}+\sqrt{\frac{ca}{(n+1)c+na+b}}\leq\sqrt{\frac{3}{n+1}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind inegalitatea CBS obținem:

$$M^2s=\left(\sqrt{\frac{ab}{(n+1)a+nb+c}}\right)^2\leq\sum ab\sum\frac{1}{(n+1)a+nb+c}\overset{(1)}{\leq}\frac{3}{n+1}=M^2d,$$

unde(1) $\Leftrightarrow\sum ab\sum\frac{1}{(n+1)a+nb+c}\leq\frac{3}{n+1}$ rezultă din metoda pqr.

Notăm $p=\sum a=2$, $q=\sum bc\leq\frac{\left(\sum a\right)^2}{3}=\frac{2^2}{3}=\frac{4}{3}$, $r=abc\leq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$.

Avem $\frac{1}{a+b}+\ldots+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\overset{CS}{\geq}\frac{(1+1+\ldots+1)^2}{(a+b)+\ldots+(a+b)+(a+c)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)a+nb+c}$.

Rezultă $\sum\frac{1}{(n+1)a+nb+c}=\sum\frac{1}{(a+b)+\ldots+(a+b)+(a+c)}\overset{CS}{\leq}\frac{1}{(n+1)^2}\sum\left(\frac{n}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)=$

$$=\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)=\frac{1}{n+1}\frac{\sum(a+b)(a+c)}{\prod(b+c)}\overset{AGM}{\leq}$$

$$\overset{AGM}{\leq}\frac{1}{n+1}\frac{\sum a^2+3\sum bc}{\left[\frac{\sum(b+c)}{3}\right]^3}=\frac{1}{n+1}\frac{\left(\sum a\right)^2+\sum bc}{\left(\frac{2\sum a}{3}\right)^3}=\frac{1}{n+1}\frac{4+q}{\left(\frac{4}{3}\right)^3}=\frac{27}{64(n+1)}(4+q)\leq$$

$$\leq\frac{27}{64(n+1)}\left(4+\frac{4}{3}\right)=\frac{9}{4(n+1)}.$$

Din $\sum ab\leq\frac{4}{3}$ și $\sum\frac{1}{3a+2b+c}\leq\frac{9}{4(n+1)}$ rezultă $\sum ab\sum\frac{1}{(n+1)a+nb+c}\leq\frac{3}{n+1}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{2}{3}$.

Notă.

Pentru $n=2$ se obține Problema propusă de Nguyen Viet Hung în Mathematical Inequalities 4/2021.

Aplicația 20.

O542. If $x,y,z>0$ and $x+y+z=1$ then

$$\frac{1}{x^3+y^3+z^3}+\frac{24}{xy+yz+zx}\geq 81.$$

O542,Mathematical Reflections,1/2021,
Nguyen Viet Hung, Hanoi University of Science, Vietnam

Soluție.
Folosim metoda pqr.
Notăm: $p=x+y+z=1, q=xy+yz+xz, r=xyz$.
Avem: $x^3+y^3+z^3=p^3-3pq+3r=1-3q+3r$.
Inegalitatea se scrie: $\frac{1}{1-3q+3r}+\frac{24}{q}\geq 81$.
Deoarece $3r=3xyz=3xyz(x+y+z)\leq(xy+yz+zx)^2=q^2$, este suficient să arătăm că:

$$\frac{1}{1-3q+q^2}+\frac{24}{q}\geq 81 \Leftrightarrow 81q^3-267q^2+152q-24\leq 0 \Leftrightarrow (3q-1)(27q^2-80q+24)\leq 0,$$

care rezultă din $q\leq\frac{1}{3}$, adevărată din $1=(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)=3q$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Remarca
Problema se poate dezvolta.
If $x,y,z>0$ with $x+y+z=1$ and $\lambda\geq 21$ then

$$\frac{1}{x^3+y^3+z^3}+\frac{\lambda}{xy+yz+zx}\geq 3(\lambda+3).$$

Marin Chirciu

Soluție.
Folosim metoda pqr.
Notăm: $p=x+y+z=1, q=xy+yz+xz, r=xyz$.
Avem: $x^3+y^3+z^3=p^3-3pq+3r=1-3q+3r$.
Inegalitatea se scrie: $\frac{1}{1-3q+3r}+\frac{\lambda}{q}\geq 3(\lambda+3)$.
Deoarece $3r=3xyz=3xyz(x+y+z)\leq(xy+yz+zx)^2=q^2$, este suficient să arătăm că:

$$\frac{1}{1-3q+q^2}+\frac{\lambda}{q}\geq 3(\lambda+3) \Leftrightarrow 3(\lambda+3)q^3-(10\lambda+27)q^2+(6\lambda+8)q-\lambda\leq 0 \Leftrightarrow$$
$$(3q-1)\left[(\lambda+3)q^2-(3\lambda+8)q+\lambda\right]\leq 0,$$

care rezultă din $q\leq\frac{1}{3}$, adevărată din $1=(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)=3q$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Remarca
Cea mai bună inegalitate se obține pentru $\lambda=21$.
Cazul $\lambda=21$
If $x,y,z>0$ with $x+y+z=1$ then

$$\frac{1}{x^3+y^3+z^3}+\frac{21}{xy+yz+zx}\geq 72.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim metoda pqr.

Notăm: $p = x+y+z = 1$, $q = xy+yz+xz$, $r = xyz$.

Avem: $x^3+y^3+z^3 = p^3-3pq+3r = 1-3q+3r$.

Inegalitatea se scrie: $\frac{1}{1-3q+3r}+\frac{21}{q}\ge 72$.

Deoarece $3r = 3xyz = 3xyz(x+y+z)\le(xy+yz+zx)^2 = q^2$, este suficient să arătăm că:

$$\frac{1}{1-3q+q^2}+\frac{21}{q}\ge 72 \Leftrightarrow 72q^3-237q^2+134q-21\le 0 \Leftrightarrow (3q-1)^2(8q-21)\le 0,$$

care rezultă din $q\le\frac{1}{3}$, adevărată din $1=(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)=3q$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Notă

Pentru $\lambda = 24$ se obține Problema O542 din Mathematical Reflections, No.1/2021, propusă de Nguyen Viet Hung, Hanoi, Vietnam.

O542. If $x,y,z>0$ and $x+y+z=1$ then

$$\frac{1}{x^3+y^3+z^3}+\frac{24}{xy+yz+zx}\ge 81.$$

Mathematical Reflections, No.1/2021Nguyen Viet Hung, Hanoi University of Science, Vietnam

Aplicația 21.

If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=3$, then

$$\left(1+\frac{1}{a+b}\right)\left(1+\frac{1}{b+c}\right)\left(1+\frac{1}{c+a}\right)\ge\frac{27}{8}.$$

Mathematical Inequalities5/2021, Kostas Geronikolas, Greece

Soluție.

Notând $b+c=x, c+a=y, a+b=z$, problema se reformulează:

If $x,y,z>0$ such that $x+y+z=6$, then

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)\ge\frac{27}{8}.$$

Demonstrație.

Folosind metoda pqr, notăm $p=x+y+z=6$, $q=xy+yz+zx$ și $r=xyz$.

Cu inegalitatea mediilor avem:

$6=x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}=3\sqrt[3]{r}$, de unde $r\le 8$.

Apoi $6q = pq = (x+y+z)(xy+yz+zx)\ge 3\sqrt[3]{xyz}\cdot 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} = 9xyz = 9r$,

de unde $6q\ge 9r \Leftrightarrow 2q\ge 3r$.

Inegalitatea $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)\ge\frac{27}{8}$ se scrie:

$8(p+q+r+1)\ge 27r \Leftrightarrow 8(q+7)\ge 19r$, care rezultă din $2q\ge 3r$ și $r\le 8$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=2$.

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.
Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=3$ and $\lambda\ge 0$, then

$$\left(\lambda+\frac{1}{a+b}\right)\left(\lambda+\frac{1}{b+c}\right)\left(\lambda+\frac{1}{c+a}\right)\ge\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^3.$$

Marin Chirciu

Soluție.
Notând $b+c=x, c+a=y, a+b=z$, problema se reformulează:

If $x,y,z>0$ such that $x+y+z=6$ and $\lambda\ge 0$, then

$$\left(\lambda+\frac{1}{x}\right)\left(\lambda+\frac{1}{y}\right)\left(\lambda+\frac{1}{z}\right)\ge\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^3.$$

Demonstrație.
Folosind metoda pqr, notăm $p=x+y+z=6$, $q=xy+yz+zx$ și $r=xyz$.
Cu inegalitatea mediilor avem:
$6=x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}=3\sqrt[3]{r}$, de unde $r\le 8$.

Apoi $6q=pq=(x+y+z)(xy+yz+zx)\ge 3\sqrt[3]{xyz}\cdot 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}=9xyz=9r$,
de unde $6q\ge 9r \Leftrightarrow 2q\ge 3r$.

Inegalitatea $\left(\lambda+\frac{1}{x}\right)\left(\lambda+\frac{1}{y}\right)\left(\lambda+\frac{1}{z}\right)\ge\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^3$ se scrie:

$8\left(\lambda p+\lambda^2q+\lambda^3r+1\right)\ge(2\lambda+1)^3r \Leftrightarrow 8\left(\lambda^2q+6\lambda+1\right)\ge\left(12\lambda^2+6\lambda+1\right)r$, care rezultă din condiția din ipoteză $\lambda\ge 0$ și $2q\ge 3r$, $r\le 8$.

Într-adevăr:

Din $q\ge\frac{3r}{2}$ rămâne să arătăm că:

$8\left(\lambda^2\cdot\frac{3r}{2}+6\lambda+1\right)\ge\left(12\lambda^2+6\lambda+1\right)r \Leftrightarrow 8(6\lambda+1)\ge(6\lambda+1)r \Leftrightarrow r\le 8$, adevărat.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=2$.
Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Notă.
Pentru $\lambda=1$ se obține Problema propusă de Kostas Geronikolas în RMM 5/2021.

If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=3$, then

$$\left(1+\frac{1}{a+b}\right)\left(1+\frac{1}{b+c}\right)\left(1+\frac{1}{c+a}\right)\ge\frac{27}{8}.$$

Kostas Geronikolas, Greece

Aplicația 22.

If $a,b,c>0$ such that $abc=1$ then

$$\frac{3}{a+b+c}+ab+bc+ca\ge 4.$$

Mathematical Inequalities5/2021, Imad Zak, Lebanon

Soluție.
Folosind metoda pqr notăm:
$p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$, $r=abc=1$.
Avem $p\ge 3$, care rezultă din $p=a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}=3$.

Analog $q \geq \sqrt{3p}$, care rezultă din $q^2 = (ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c) = 3p$.

Obținem $Ms = \dfrac{3}{p} + q \geq \dfrac{3}{p} + \sqrt{3p} \overset{(1)}{\geq} 4 = Md$,

unde (1) $\Leftrightarrow \sqrt{3p} \geq 4 - \dfrac{3}{p} \Leftrightarrow 3p \geq \left(4 - \dfrac{3}{p}\right)^2 \Leftrightarrow 3p^3 - 16p^2 + 24p - 9 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (p-3)(3p^2 - 7p + 3) \geq 0$, care rezultă din $p \geq 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Remarcă.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c > 0$ such that $abc = 1$ and $\lambda \geq \dfrac{2}{3}$ then

$$\frac{3}{a+b+c} + \lambda(ab+bc+ca) \geq 3\lambda + 1.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind metoda pqr notăm:

$p = a+b+c$, $q = ab+bc+ca$, $r = abc = 1$.

Avem $p \geq 3$, care rezultă din $p = a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$.

Analog $q \geq \sqrt{3p}$, care rezultă din $q^2 = (ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c) = 3p$.

Obținem $Ms = \dfrac{3}{p} + \lambda q \geq \dfrac{3}{p} + \lambda\sqrt{3p} \overset{(1)}{\geq} 3\lambda + 1 = Md$, unde (1) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda\sqrt{3p} \geq 3\lambda + 1 - \dfrac{3}{p} \Leftrightarrow 3\lambda^2 p \geq \left(3\lambda + 1 - \dfrac{3}{p}\right)^2 \Leftrightarrow 3\lambda^2 p^3 - (3\lambda+1)^2 p^2 + 6(3\lambda+1)p - 9 \geq 0$

$\Leftrightarrow (p-3)\left[3\lambda^2 p^2 - (6\lambda+1)p + 3\right] \geq 0$, care rezultă din $p \geq 3$ și condiția din ipoteză $\lambda \geq \dfrac{2}{3}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Notă.

Cea mai bună inegalitate de forma din enunț se obține pentru $\lambda = \dfrac{2}{3}$.

Cazul $\lambda = \dfrac{2}{3}$.

If $a,b,c > 0$ such that $abc = 1$ and $\lambda \geq \dfrac{2}{3}$ then

$$\frac{3}{a+b+c} + \frac{2}{3}(ab+bc+ca) \geq 3.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind metoda pqr notăm:

$p = a+b+c$, $q = ab+bc+ca$, $r = abc = 1$.

Avem $p \geq 3$, care rezultă din $p = a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$.

Analog $q \geq \sqrt{3p}$, care rezultă din $q^2 = (ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c) = 3p$.

Obținem $Ms = \dfrac{3}{p} + \dfrac{2}{3}q \geq \dfrac{3}{p} + \dfrac{2}{3}\sqrt{3p} \overset{(1)}{\geq} 3 = Md$, unde (1) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\sqrt{3p} \geq 3-\frac{3}{p} \Leftrightarrow \frac{4}{3}p \geq \left(3-\frac{3}{p}\right)^2 \Leftrightarrow 4p^3-27p^2+54p-9\geq 0 \Leftrightarrow (p-3)^2(4p-3)\geq 0,$$

care rezultă din $p\geq 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Notă.

Pentru $\lambda=1$ se obține Problema propusă de Imad Zak în Mathematical Inequalities 5/2021.

If $a,b,c>0$ such that $abc=1$ then

$$\frac{3}{a+b+c}+ab+bc+ca\geq 4.$$

Imad Zak

Aplicația 23.

If $a,b,c>0$ such that $abc=1$ and $k\geq 0$ then

$$\frac{a^2b}{b+k}+\frac{b^2c}{c+k}+\frac{c^2a}{a+k}\geq \frac{3}{k+1}.$$

Problem 629/5/2021, Kostas Geronikolas, Greece

Soluție.

Folosind metoda p,q,r notăm $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc=1$.

Avem $p\geq 3$, adevărată dinAM-GM și $abc=1$.

Analog $p^2\geq 3q$, adevărată din $p^2=(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)=3q$.

Folosind inegalitatea lui Bergstrőm obținem:

$$Ms=\sum\frac{a^2b}{b+k}=\sum\frac{a^2}{1+\frac{k}{b}} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum\left(1+\frac{k}{b}\right)}=\frac{p^2}{3+\frac{kq}{r}} \overset{r=1}{=} \frac{p^2}{3+kq} \overset{(1)}{\geq} \frac{3}{k+1}=Md,$$

unde(1) $\Leftrightarrow \frac{p^2}{3+kq}\geq\frac{3}{k+1} \Leftrightarrow k\left(p^2-3q\right)+\left(p^2-9\right)\geq 0$, care rezultă din $p^2\geq 3q$ și $p\geq 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c>0$ such that $abc=1$ and $n\in\mathbf{N}, n\geq 2$, $\lambda\geq 0$ then

$$\frac{a^nb}{b+\lambda}+\frac{b^nc}{c+\lambda}+\frac{c^na}{a+\lambda}\geq\frac{3^{3-n}}{\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind metoda p,q,r notăm $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc=1$.

Avem $p\geq 3$, adevărată dinAM-GM și $abc=1$.

Analog $p^2\geq 3q$, adevărată din $p^2=(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)=3q$.

Folosind inegalitatea lui Hőlder obținem:

$$Ms=\sum\frac{a^nb}{b+\lambda}=\sum\frac{a^n}{1+\frac{\lambda}{b}} \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^n}{3^{n-2}\sum\left(1+\frac{\lambda}{b}\right)}=\frac{p^n}{3^{n-2}\left(3+\frac{\lambda q}{r}\right)} \overset{r=1}{=} \frac{p^2}{3^{n-2}(3+\lambda q)} \overset{(1)}{\geq} \frac{3}{3^{n-2}(\lambda+1)}=Md$$

unde(1) $\Leftrightarrow \frac{p^2}{3+\lambda q}\geq\frac{3}{\lambda+1} \Leftrightarrow \lambda\left(p^2-3q\right)+\left(p^2-9\right)\geq 0$, care rezultă din $p^2\geq 3q$ și $p\geq 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Notă.
Pentru $n=2$ se obține Problema (629) propusă de Kostas Geronikolas în RMM 5/2021.

If $a,b,c>0$ such that $abc=1$ and $k\geq 0$ then

$$\frac{a^2b}{b+k}+\frac{b^2c}{c+k}+\frac{c^2a}{a+k}\geq\frac{3}{k+1}.$$

Kostas Geronikolas, Greece

Aplicația 24.

If $a,b,c>0$ then

$$3\left(a+b+c+\frac{3abc}{ab+bc+ca}\right)^4\geq 256abc(a+b+c).$$

RMM6/2021,Daniel Sitaru

Soluție.
Folosim metoda pqr.
Notăm $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$.
Inegalitatea de demonstrat se scrie:

$3\left(p+\frac{3r}{q}\right)^4\geq 256rp$,(1).

Din inegalitatea $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$ obținem $p^2\geq 3q$.

Pentru a demonstra (1) este suficient ,folosind $q\leq\frac{p^2}{3}$,(2) , să arătăm că:

$3\left(p+\frac{3r}{\frac{p^2}{3}}\right)^4\geq 256rp\Leftrightarrow 3\left(p+\frac{9r}{p^2}\right)^4\geq 256rp$, care rezultă din inegalitatea mediilor:

$$3\left(p+\frac{9r}{p^2}\right)^4=3\left(\frac{p}{3}+\frac{p}{3}+\frac{p}{3}+\frac{9r}{p^2}\right)^4\overset{AGM}{\geq}3\left(4\sqrt[4]{\frac{p}{3}\cdot\frac{p}{3}\cdot\frac{p}{3}\cdot\frac{9r}{p^2}}\right)^4=256rp.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Aplicația 25.

If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=1$ then

$$\sum\frac{1+a}{1-a}\leq\sum\frac{2a}{b}.$$

Mathematika 7/2021,Myp Mry

Soluție.
Avem $\sum\frac{1+a}{1-a}\leq\sum\frac{2a}{b}\Leftrightarrow\sum\left(1+\frac{2a}{1-a}\right)\leq\sum\frac{2a}{b}\Leftrightarrow\sum\left(1+\frac{2a}{b+c}\right)\leq\sum\frac{2a}{b}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3+\sum\frac{2a}{b+c}\leq\sum\frac{2a}{b}\Leftrightarrow 3\leq\sum\left(\frac{2a}{b}-\frac{2a}{b+c}\right)\Leftrightarrow\frac{3}{2}\leq\sum\left(\frac{a}{b}-\frac{a}{b+c}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sum\left(\frac{a}{b}-\frac{a}{b+c}\right)\geq\frac{3}{2}\Leftrightarrow\sum\frac{ac}{b(b+c)}\geq\frac{3}{2}$, care rezultă din pqr -Method.

Notăm $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$.

Avem $q^2=(ab+bc+ca)^2\geq 3abc(a+b+c)=3pr$, deci $q^2\geq 3pr$,(1).

Obținem:

$$Ms=\sum\frac{ac}{b(b+c)}=\frac{1}{abc}\sum\frac{(ac)^2}{b+c}\overset{CS}{\geq}\frac{1}{abc}\frac{\left(\sum ac\right)^2}{\sum(b+c)}=\frac{1}{abc}\frac{\left(\sum bc\right)^2}{2\sum a}=\frac{1}{r}\cdot\frac{q^2}{2p}\overset{(1)}{\geq}\frac{1}{r}\cdot\frac{3pr}{2p}=\frac{3}{2}=Md$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Remarca.
Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=\lambda$ and $\lambda>0$ then

$$\sum\frac{\lambda+a}{\lambda-a}\leq\sum\frac{2a}{b}.$$

Marin Chirciu

Soluție.
Avem $\sum\frac{\lambda+a}{\lambda-a}\leq\sum\frac{2a}{b}\Leftrightarrow\sum\left(1+\frac{2a}{\lambda-a}\right)\leq\sum\frac{2a}{b}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3+\sum\frac{2a}{b+c}\leq\sum\frac{2a}{b}\Leftrightarrow\sum\left(\frac{a}{b}-\frac{a}{b+c}\right)\geq\frac{3}{2}\Leftrightarrow\sum\frac{ac}{b(b+c)}\geq\frac{3}{2}$,

care rezultă din pqr -Method.

Notăm $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$.

Avem $q^2=(ab+bc+ca)^2\geq 3abc(a+b+c)=3pr$, deci $q^2\geq 3pr$,(1).

Obținem:

$$Ms=\sum\frac{ac}{b(b+c)}=\frac{1}{abc}\sum\frac{(ac)^2}{b+c}\overset{CS}{\geq}\frac{1}{abc}\frac{\left(\sum ac\right)^2}{\sum(b+c)}=\frac{1}{abc}\frac{\left(\sum bc\right)^2}{2\sum a}=\frac{1}{r}\cdot\frac{q^2}{2p}\overset{(1)}{\geq}\frac{1}{r}\cdot\frac{3pr}{2p}=\frac{3}{2}=Md$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Aplicația 26.

If $x,y,z>0$ such that $x+y+z=1$ then

$$\frac{1}{2}\sum\frac{y+z}{x}+3\sum yz\geq 4.$$

Mathematical Inequalities7/2021, Imad Zak

Soluție.
Folosind metoda *pqr* obținem:

$$p=x+y+z=1, q=xy+yz+zx\leq\frac{(x+y+z)^2}{3}=\frac{1}{3}, r=xyz\leq\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3=\frac{1}{27}.$$

Obținen $\sum\frac{y+z}{x}=\sum\frac{y}{x}+\sum\frac{z}{x}=\sum\frac{y^2}{xy}+\sum\frac{z^2}{xz}\overset{CS}{\geq}\frac{(x+y+z)^2}{\sum xy}+\frac{(x+y+z)^2}{\sum xz}=\frac{1}{q}+\frac{1}{q}=\frac{2}{q}$.

Inegalitatea de demonstrat se scrie:

$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{q}+3q\geq 4\Leftrightarrow 3q^2-4q+1\geq 0\Leftrightarrow(q-1)(3q-1)\geq 0$, care rezultă din $q\leq\frac{1}{3}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Remarcă.
Problema se poate dezvolta.

If $x, y, z > 0$ such that $x+y+z=1$ and $6n \geq k > 0$ then

$$n\sum\frac{y+z}{x}+3k\sum yz \geq 6n+k.$$

Marin Chirciu

Soluție.
Folosind metoda *pqr* obținem:

$$p=x+y+z=1,\; q=xy+yz+zx \leq \frac{(x+y+z)^2}{3}=\frac{1}{3},\; r=xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3=\frac{1}{27}.$$

Obținen $\sum\frac{y+z}{x}=\sum\frac{y}{x}+\sum\frac{z}{x}=\sum\frac{y^2}{xy}+\sum\frac{z^2}{xz}\overset{CS}{\geq}\frac{(x+y+z)^2}{\sum xy}+\frac{(x+y+z)^2}{\sum xz}=\frac{1}{q}+\frac{1}{q}=\frac{2}{q}$.

Inegalitatea de demonstrat se scrie:

$$n\cdot\frac{2}{q}+3k\cdot q \geq 6n+k \Leftrightarrow 3kq^2-(6n+k)q+2n \geq 0 \Leftrightarrow (3q-1)(kq-2n) \geq 0,$$

care rezultă din $q \leq \frac{1}{3} \leq \frac{2n}{k}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Notă.

Pentru $n=\frac{1}{2}, k=1$ se obține Problema propusă de Imad Zak în Mathematical Inequalities

If $x, y, z > 0$ such that $x+y+z=1$ then

$$\frac{1}{2}\sum\frac{y+z}{x}+3\sum yz \geq 4.$$

Imad Zak

Remarcă.
Problema se poate dezvolta.

If $x, y, z > 0$ such that $x+y+z=1$ and $\lambda \geq \frac{1}{6}$ then

$$\lambda\sum\frac{y+z}{x}+3\sum yz \geq 6\lambda+1.$$

Marin Chirciu

Soluție.
Folosind metoda *pqr* obținem:

$$p=x+y+z=1,\; q=xy+yz+zx \leq \frac{(x+y+z)^2}{3}=\frac{1}{3},\; r=xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3=\frac{1}{27}.$$

Obținen $\sum\frac{y+z}{x}=\sum\frac{y}{x}+\sum\frac{z}{x}=\sum\frac{y^2}{xy}+\sum\frac{z^2}{xz}\overset{CS}{\geq}\frac{(x+y+z)^2}{\sum xy}+\frac{(x+y+z)^2}{\sum xz}=\frac{1}{q}+\frac{1}{q}=\frac{2}{q}$.

Inegalitatea de demonstrat se scrie:

$$\lambda\cdot\frac{2}{q}+3\cdot q \geq 6\lambda+1 \Leftrightarrow 3q^2-(6\lambda+1)q+2\lambda \geq 0 \Leftrightarrow (3q-1)(q-2\lambda) \geq 0,$$

care rezultă din $q \le \frac{1}{3} \le 2\lambda$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Notă.

Pentru $\lambda = \frac{1}{2}$ se obține Problema propusă de Imad Zak în Mathematical Inequalities

If $x, y, z > 0$ such that $x + y + z = 1$ then

$$\frac{1}{2}\sum \frac{y+z}{x} + 3\sum yz \ge 4.$$

Imad Zak

Aplicația 27.

If $a,b,c > 0$ such that $a+b+c=1$ then

$$\frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c} \le \frac{2a}{b} + \frac{2b}{c} + \frac{2c}{a}.$$

Matematika 7/2021, Myp

Soluție.

Folosim metoda pqr.

Notăm $p = a+b+c, q = ab+bc+ca, r = abc$.

Avem $p = 1, q^2 \ge 3pr$, care rezultă din $q^2 = (ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c) = 3rp$.

Apoi $\sum \frac{1+a}{1-a} \le \sum \frac{2a}{b} \Leftrightarrow \sum\left(1 + \frac{2a}{1-a}\right) \le \sum \frac{2a}{b} \Leftrightarrow \sum\left(1 + \frac{2a}{b+c}\right) \le \sum \frac{2a}{b} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 + \sum \frac{2a}{b+c} \le \sum \frac{2a}{b} \Leftrightarrow \sum\left(\frac{a}{b} - \frac{a}{b+c}\right) \ge \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sum \frac{ac}{b(b+c)} \ge \frac{3}{2}$, care rezultă din:

$$\sum \frac{ac}{b(b+c)} = \frac{1}{abc}\sum \frac{(ac)^2}{b+c} \overset{CS}{\ge} \frac{1}{abc}\frac{\left(\sum ac\right)^2}{\sum(b+c)} \overset{pqr-Method}{=} \frac{1}{r}\cdot\frac{q^2}{2p} \overset{(1)}{\ge} \frac{3pr}{2pr} = \frac{3}{2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Remarca.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c,\lambda > 0$ such that $a+b+c=\lambda$ then

$$\frac{\lambda+a}{\lambda-a} + \frac{\lambda+b}{\lambda-b} + \frac{\lambda+c}{\lambda-c} \le \frac{2\lambda a}{b} + \frac{2\lambda b}{c} + \frac{2\lambda c}{a}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim metoda pqr.

Notăm $p = a+b+c, q = ab+bc+ca, r = abc$.

Avem $p = 1, q^2 \ge 3pr$, care rezultă din $q^2 = (ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c) = 3rp$.

Apoi $\sum \frac{\lambda+a}{\lambda-a} \le \sum \frac{2\lambda a}{b} \Leftrightarrow \sum\left(\lambda + \frac{2\lambda a}{1-a}\right) \le \sum \frac{2\lambda a}{b} \Leftrightarrow \sum\left(1 + \frac{2a}{b+c}\right) \le \sum \frac{2a}{b} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 + \sum \frac{2a}{b+c} \le \sum \frac{2a}{b} \Leftrightarrow \sum\left(\frac{a}{b} - \frac{a}{b+c}\right) \ge \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sum \frac{ac}{b(b+c)} \ge \frac{3}{2}$, care rezultă din:

$$\sum\frac{ac}{b(b+c)}=\frac{1}{abc}\sum\frac{(ac)^2}{b+c}\overset{CS}{\geq}\frac{1}{abc}\frac{\left(\sum ac\right)^2}{\sum(b+c)}\overset{pqr-Method}{=}\frac{1}{r}\cdot\frac{q^2}{2p}\overset{(1)}{\geq}\frac{3pr}{2pr}=\frac{3}{2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Notă.

Pentru $\lambda=1$ se obține Problema propusă în Matematika 7/2021, Myp.

If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=1$ then

$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}\leq\frac{2a}{b}+\frac{2b}{c}+\frac{2c}{a}.$$

Matematika 7/2021, Myp

Aplicația 28.

If $x,y,z>0$ then

$$\frac{4\sum x^2}{27\sum xy}+\sum\frac{x}{7x+y+z}\geq\frac{13}{27}.$$

RMM7/2021, Neculai Stanciu

Soluție1.

Folosim metoda pqr.

Notăm $p=x+y+z, q=xy+yz+zx, r=xyz$.

Avem, $p^2\geq 2q$, care rezultă din $p^2=(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)=3q$.

Apoi $Ms=\frac{4\sum x^2}{27\sum xy}+\sum\frac{x}{7x+y+z}=\frac{4(p^2-2q)}{27q}+\sum\frac{x^2}{7x^2+xy+xz}\overset{CS}{\geq}$

$$\overset{CS}{\geq}\frac{4(p^2-2q)}{27q}+\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum(7x^2+xy+xz)}=\frac{4(p^2-2q)}{27q}+\frac{p^2}{7\sum x^2+2\sum xy}=$$

$$=\frac{4(p^2-2q)}{27q}+\frac{p^2}{7(p^2-2q)+2q}=\frac{4p^2}{27q}-\frac{8}{27}+\frac{p^2}{7p^2-12q}\overset{(1)}{\geq}\frac{13}{27}=Md,$$

unde (1) $\Leftrightarrow\frac{4p^2}{27q}-\frac{8}{27}+\frac{p^2}{7p^2-12q}\geq\frac{13}{27}\Leftrightarrow\frac{4p^2}{27q}+\frac{p^2}{7p^2-12q}\geq\frac{8}{27}+\frac{13}{27}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{4p^2}{27q}+\frac{p^2}{7p^2-12q}\geq\frac{7}{9}\Leftrightarrow p^4-6p^2q+9q^2\geq 0\Leftrightarrow(p^2-3q)^2\geq 0$, evident cu egalitate pentru $p^2=3q\Leftrightarrow(x+y+z)^2=3(xy+yz+zx)\Leftrightarrow\sum(x-y)^2=0\Leftrightarrow x=y=z$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z$.

Soluție2.

$$Ms=\frac{4\sum x^2}{27\sum xy}+\sum\frac{x}{7x+y+z}=\frac{4\sum x^2}{27\sum xy}+\sum\frac{x^2}{7x^2+xy+xz}\overset{CS}{\geq}$$

$$\overset{CS}{\geq}\frac{4\sum x^2}{27\sum xy}+\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum(7x^2+xy+xz)}=\frac{4\sum x^2}{27\sum xy}+\frac{\sum x^2+2\sum xy}{7\sum x^2+2\sum xy}\overset{(1)}{\geq}\frac{13}{27}=Md,$$

unde (1) $\Leftrightarrow\frac{4\sum x^2}{27\sum xy}+\frac{\sum x^2+2\sum xy}{7\sum x^2+2\sum xy}\geq\frac{13}{27}\overset{a=\sum x^2, b=\sum xy}{\Leftrightarrow}\frac{4a}{27b}+\frac{a+2b}{7a+2b}\geq\frac{13}{27}\Leftrightarrow(a-b)^2\geq 0$, evident cu egalitate pentru $a=b \Leftrightarrow (x+y+z)^2=3(xy+yz+zx)$

$\Leftrightarrow \sum x^2=\sum xy \Leftrightarrow \sum(x-y)^2=0 \Leftrightarrow x=y=z$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z$.

Remarca.

Problema se poate dezvolta.

If $x,y,z>0$ and $n\geq 1$ then

$$\frac{2(n-1)\sum x^2}{(n+2)^2\sum xy}+\sum\frac{x}{nx+y+z}\geq\frac{5n+4}{(n+2)^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim metoda pqr.

Notăm $p=x+y+z, q=xy+yz+zx, r=xyz$.

Avem, $p^2\geq 2q$, care rezultă din $p^2=(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)=3q$.

Apoi $Ms=\frac{2(n-1)\sum x^2}{(n+2)^2\sum xy}+\sum\frac{x}{nx+y+z}=\frac{2(n-1)(p^2-2q)}{(n+2)^2 q}+\sum\frac{x^2}{nx^2+xy+xz}\overset{CS}{\geq}$

$\overset{CS}{\geq}\frac{2(n-1)(p^2-2q)}{(n+2)^2 q}+\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum(nx^2+xy+xz)}=\frac{2(n-1)(p^2-2q)}{(n+2)^2 q}+\frac{p^2}{n\sum x^2+2\sum xy}=$

$=\frac{2(n-1)(p^2-2q)}{(n+2)^2 q}+\frac{p^2}{n(p^2-2q)+2q}=\frac{2(n-1)p^2}{(n+2)^2 q}-\frac{4(n-1)}{(n+2)^2}+\frac{p^2}{np^2+2(1-n)q}\overset{(1)}{\geq}\frac{5n+4}{(n+2)^2}=Md$

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{2(n-1)p^2}{(n+2)^2 q}-\frac{4(n-1)}{(n+2)^2}+\frac{p^2}{np^2+2(1-n)q}\geq\frac{5n+4}{(n+2)^2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2(n-1)p^2}{(n+2)^2 q}+\frac{p^2}{np^2+2(1-n)q}\geq\frac{9n}{(n+2)^2}\Leftrightarrow (n-1)(p^2-3q)^2\geq 0$, care rezultă din

condiția din ipoteză $n\geq 1$ și $(p^2-3q)^2\geq 0$, evident cu egalitate pentru $p^2=3q \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+y+z)^2=3(xy+yz+zx)\Leftrightarrow \sum(x-y)^2=0\Leftrightarrow x=y=z$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z$.

Soluție2.

$Ms=\frac{2(n-1)\sum x^2}{(n+2)^2\sum xy}+\sum\frac{x}{nx+y+z}=\frac{2(n-1)\sum x^2}{(n+2)^2\sum xy}+\sum\frac{x^2}{nx^2+xy+xz}\overset{CS}{\geq}$

$\overset{CS}{\geq}\frac{2(n-1)\sum x^2}{(n+2)^2\sum xy}+\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum(nx^2+xy+xz)}=\frac{2(n-1)\sum x^2}{(n+2)^2\sum xy}+\frac{\sum x^2+2\sum xy}{n\sum x^2+2\sum xy}\overset{(1)}{\geq}\frac{5n+4}{(n+2)^2}=Md$,

unde (1)

$\Leftrightarrow \frac{2(n-1)\sum x^2}{(n+2)^2\sum xy}+\frac{\sum x^2+2\sum xy}{n\sum x^2+2\sum xy}\geq\frac{5n+4}{(n+2)^2}\overset{a=\sum x^2, b=\sum xy}{\Leftrightarrow}\frac{2(n-1)a}{(n+2)^2 b}+\frac{a+2b}{na+2b}\geq\frac{5n+4}{(n+2)^2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2n(n-1)a^2-4n(n-1)ab+2n(n-1)b^2\geq 0\Leftrightarrow 2n(n-1)(a-b)^2\geq 0$,

care rezultă din condiția din ipoteză $n\geq 1$ și $(a-b)^2\geq 0$ evident cu egalitate pentru $a=b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum x^2 = \sum xy \Leftrightarrow \sum (x-y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z$.
Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z$.

Notă.

Pentru $n = 7$ se obține Problema propusă de Neculai Stanciu în RMM 7/2021.

If $x, y, z > 0$ then

$$\frac{4\sum x^2}{27\sum xy} + \sum \frac{x}{7x+y+z} \ge \frac{13}{27}.$$

Neculai Stanciu

Aplicația 29.

If $a,b,c > 0$ and $a+b+c = 3$ then

$$\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right) \le \left(1+\frac{1}{\sqrt{abc}}\right)^3.$$

RMM7/2021,Philip CC

Soluție1.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p = a+b=c, q = ab+bc+ca, r = abc$. Avem $p = 3$ și $q \le 3$.

Din $p^3 + 9r \ge 4pq$, (Schur) și $p = 3 \Rightarrow 9 + 3r \ge 4q \Rightarrow r \ge \frac{4q-9}{3}$;

Din $q^2 \ge 3pr$ și $p = 3 \Rightarrow q^2 \ge 9r \Rightarrow q \ge 3\sqrt{r} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{r}} \ge \frac{3}{q} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^3 \ge \left(1+\frac{3}{q}\right)^3$

Din $r \ge \frac{4q-9}{3} \Rightarrow (p-r)^2 = (3-r)^2 \le \left(3-\frac{4q-9}{3}\right)^2 = \left(6-\frac{4q}{3}\right)^2$

Avem $\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right) = 1 + \sum a^2 + \sum b^2c^2 + a^2b^2c^2 = 1 + \left(p^2-2q\right) + \left(q^2-2pr\right) + r^2 =$
$= \left(p^2 - 2pr + r^2\right) + \left(q^2 - 2q + 1\right) = (p-r)^2 + (q-1)^2$.

Inegalitatea $\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right) \le \left(1+\frac{1}{\sqrt{abc}}\right)^3$ se scrie $(p-r)^2 + (q-1)^2 \le \left(1+\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^3$,(1).

Folosind $(p-r)^2 \le \left(6-\frac{4q}{3}\right)^2$ și $\left(1+\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^3 \ge \left(1+\frac{3}{q}\right)^3$ este suficient pentru a demonstra (1) să arătăm că: $\left(6-\frac{4q}{3}\right)^2 + (q-1)^2 \le \left(1+\frac{3}{q}\right)^3$.

Obținem $\left(6-\frac{4q}{3}\right)^2 + (q-1)^2 \le \left(1+\frac{3}{q}\right)^3 \Leftrightarrow 25q^5 - 162q^4 + 324q^3 - 81q^2 - 243q - 243 \le 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (q-3)\left(25q^4 - 87q^3 + 63q^2 + 108q + 81\right) \le 0$, care rezultă din $q \le 3$.
Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Remarca.

Problema se poate dezvolta.

1) If $a,b,c > 0$ such that $a+b+c = 3$ and $\lambda \ge 0$ then

$$\left(\lambda+a^2\right)\left(\lambda+b^2\right)\left(\lambda+c^2\right)\le\left(\lambda+\frac{1}{\sqrt{abc}}\right)^3.$$

Marin Chirciu

Soluție1.

Folosim *pqr* -Method.

Notăm $p=a+b=c, q=ab+bc+ca, r=abc$. Avem $p=3$ și $q\le 3$.

Din $p^3+9r\ge 4pq$, (Schur) și $p=3\Rightarrow 9+3r\ge 4q\ \Rightarrow r\ge\frac{4q-9}{3}$;

Din $q^2\ge 3pr$ și $p=3\Rightarrow q^2\ge 9r\Rightarrow q\ge 3\sqrt{r}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{r}}\ge\frac{3}{q}\Rightarrow\left(1+\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^3\ge\left(1+\frac{3}{q}\right)^3$

Din $r\ge\frac{4q-9}{3}\Rightarrow(p-r)^2=(3-r)^2\le\left(3-\frac{4q-9}{3}\right)^2=\left(6-\frac{4q}{3}\right)^2$

Avem $\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)=1+\sum a^2+\sum b^2c^2+a^2b^2c^2=1+\left(p^2-2q\right)+\left(q^2-2pr\right)+r^2=$
$=\left(p^2-2pr+r^2\right)+\left(q^2-2q+1\right)=(p-r)^2+(q-1)^2.$

Inegalitatea $\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)\le\left(1+\frac{1}{\sqrt{abc}}\right)^3$ se scrie $(p-r)^2+(q-1)^2\le\left(1+\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^3$,(1).

Folosind $(p-r)^2\le\left(6-\frac{4q}{3}\right)^2$ și $\left(1+\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^3\ge\left(1+\frac{3}{q}\right)^3$ este suficient pentru a demonstra (1) să arătăm că: $\left(6-\frac{4q}{3}\right)^2+(q-1)^2\le\left(1+\frac{3}{q}\right)^3$.

Obținem $\left(6-\frac{4q}{3}\right)^2+(q-1)^2\le\left(1+\frac{3}{q}\right)^3\Leftrightarrow 25q^5-162q^4+324q^3-81q^2-243q-243\le 0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(q-3)\left(25q^4-87q^3+63q^2+108q+81\right)\le 0$, care rezultă din $q\le 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația 30.

2) If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=3$ then

$$\left(\frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{c+a}+\frac{ca}{a+b}\right)abc\le\frac{3}{2}.$$

Bitrak , Mathematical Inequality7/2021, Sladjan Stankovic

Folosind $\frac{1}{x+y}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\Leftrightarrow(x-y)^2\ge 0$ obținem: $\frac{ab}{b+c}\le\frac{1}{4}\left(a+\frac{ab}{c}\right)$.

Rezultă $\sum\frac{ab}{b+c}\le\sum\frac{1}{4}\left(a+\frac{ab}{c}\right)=\frac{1}{4}\sum\left(a+\frac{ab}{c}\right)=\frac{1}{4}\left(\sum a+\sum\frac{ab}{c}\right)=\frac{1}{4}\left(3+\frac{\sum a^2b^2}{abc}\right).$

Folosim *pqr* -Method.

Notăm $p=\sum a, q=\sum bc, r=abc$.

Avem $p=3$ și $q\le 3$.

Inegalitatea $\left(\frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{c+a}+\frac{ca}{a+b}\right)abc\le\frac{3}{2}$ se scrie:

$\frac{1}{4}\left(3+\frac{\sum a^2b^2}{abc}\right)abc \le \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(3+\frac{q^2-2rp}{r}\right)r \le \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(3r+q^2-6r\right) \le \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(q^2-3r\right) \le 3$

$\Leftrightarrow q^2-3r \le 6$.

Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $0<q\le 1$ obținem $q^2-3r \le 1-3r \overset{(1)}{\le} 6$, unde $(1) \Leftrightarrow r \ge \frac{-5}{3}$, evident.

Cazul 2). Dacă $1<q\le 3$ folosind inegalitatea lui Schur $p^3+9r \ge 4pq$ și $p=3$ obținem $9+3r \ge 4q \Leftrightarrow 3r \ge 4q-9$ și $q \le 3$.

Avem $q^2-3r \le 6 \Leftrightarrow q^2 \le 3r+6$.

Folosind $3r \ge 4q-9$ este suficient să arătăm că:

$q^2 \le 4q-9+6 \Leftrightarrow q^2-4q+3 \le 0 \Leftrightarrow (q-1)(q-3) \le 0$, care rezultă din $1<q\le 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația 31.

If $a,b,c>0, abc=a+b+c$, then find the maximum of expression

$$A=2(ab+bc+ca)-a^2-b^2-c^2.$$

Mathematical Inequalities8/2021, George Apostolopoulos, Greece

Soluție.

Folosind pqr-Method avem:

$a+b+c=p, ab+bc+ca=q, abc=r, r=p$.

Din inegalitatea lui Schur $p^3+9r \ge 4pq$ și $r=p$ avem $4q \le p^2+9$.

Avem:

$A=2(ab+bc+ca)-a^2-b^2-c^2=2q-\left(p^2-2q\right)=4q-p^2 \overset{Schur}{\le} p^2+9-p^2=9$.

Deducem că maxA=9 și maximum este atins pentru $a=b=c=\sqrt{3}$.

Remarca.

Problema se poate dezvolta.

Let $-2\le\lambda\le 2$ fixed. If $a,b,c>0, abc=a+b+c$ then find the maximum of expression

$$A=\lambda(ab+bc+ca)-a^2-b^2-c^2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind pqr-Method avem:

$a+b+c=p, ab+bc+ca=q, abc=r, r=p$.

Din inegalitatea lui Schur $p^3+9r \ge 4pq$ și $r=p$ avem $q \le \frac{p^2+9}{4}$.

Avem $p^2=(a+b+c)^2 \overset{AGM}{\ge} \left(3\sqrt[3]{abc}\right)^2=\left(3\sqrt[3]{r}\right)^2 \overset{r=p}{=} \left(3\sqrt[3]{p}\right)^2=9\sqrt[3]{p^2}$.

Din $p^2 \ge 9\sqrt[3]{p^2}$ obținem $p^2 \ge 27$

Avem:

$A=\lambda(ab+bc+ca)-a^2-b^2-c^2=\lambda q-\left(p^2-2q\right)=(\lambda+2)q-p^2 \overset{Schur}{\le} (\lambda+2)\frac{p^2+9}{4}-p^2=$

$=\frac{9(\lambda+2)-(2-\lambda)p^2}{4} \le \frac{9(\lambda+2)-(2-\lambda)\cdot 27}{4}=9(\lambda-1)$.

Deducem că maxA$=9(\lambda-1)$ și maximum este atins pentru $a=b=c=\sqrt{3}$.

Notă.
Pentru $\lambda = 1$ se obține Problema propusă de George Apostolopoulos în Mathematical Inequalities 8/2021.
If $a,b,c > 0, abc = a+b+c$, then find the maximum of expression
$$A = 2(ab+bc+ca) - a^2 - b^2 - c^2.$$
George Apostolopoulos,Greece

Aplicația 31.

If $a,b,c > 2$ such that $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}=1$, then find the minimum of expression abc.

Mathematical Olympiads 8/2021, Elton P

Soluție.
Notând $x=a-2, y=b-2, z=c-2$, avem $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=1$.
Folosind *pqr* -Method avem:
$a+b+c=p, ab+bc+ca=q, abc=r$.
Avem: $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=1 \Leftrightarrow r=p+2$.
Calculăm $abc=(x+2)(y+2)(z+2)=r+2q+4p+8=(p+2)+2q+4p+8=5p+2q+10$.
Avem $p+2=r=xyz \overset{AGM}{\leq} \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3$,
de unde $p^3 \geq 27(p+2) \Leftrightarrow p^3-27p-54 \geq 0 \Leftrightarrow (p-6)(p+3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow p \geq 6$.
Apoi $q^2=(xy+yz+zx)^2 \geq 3xyz(x+y+z)=3rp=3p(p+2) \geq 3\cdot 6(6+2)=144$,
de unde rezultă că $q \geq 12$.
Din $p \geq 6$ și $q \geq 12$ rezultă că $abc=5p+2q+10 \geq 5\cdot 6+2\cdot 12+10=64$.
Deducem că min abc=64 și minimul este atins pentru $a=b=c=4$.
Remarca.
Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c > 2$ such that $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}=1$, then find the minimum of expression
$$P=(a+1)(b+1)(c+1).$$
Marin Chirciu

Soluție.
Notând $x=a-2, y=b-2, z=c-2$, avem $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=1$.
Folosind *pqr* -Method avem:
$a+b+c=p, ab+bc+ca=q, abc=r$.
Avem: $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=1 \Leftrightarrow r=p+2$.
Calculăm
$P=(a+1)(b+1)(c+1)=(x+3)(y+3)(z+3)=r+3q+9p+27=(p+2)+3q+9p+27=$
$=10p+3q+29$.

Avem $p+2=r=xyz\overset{AGM}{\leq}\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3=\left(\frac{p}{3}\right)^3$,

de unde $p^3\geq 27(p+2)\Leftrightarrow p^3-27p-54\geq 0\Leftrightarrow (p-6)(p+3)^2\geq 0\Leftrightarrow p\geq 6$.

Apoi $q^2=(xy+yz+zx)^2\geq 3xyz(x+y+z)=3rp=3p(p+2)\geq 3\cdot 6(6+2)=144$,

de unde rezultă că $q\geq 12$.

Din $p\geq 6$ și $q\geq 12$ rezultă că:

$P=(a+1)(b+1)(c+1)=10p+3q+29\geq 10\cdot 6+3\cdot 12+29=125$.

Deducem că $\min P=(a+1)(b+1)(c+1)$ este 125 și minimul este atins pentru $a=b=c=4$.

Remarca.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c>2$ such that $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}=1$, then find the minimum of expression $P=(a+\lambda)(b+\lambda)(c+\lambda)$, unde $\lambda\geq 0$.

Marin Chirciu

Soluție.

Notând $x=a-2, y=b-2, z=c-2$, avem $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=1$.

Folosind *pqr*-Method avem:

$a+b+c=p, ab+bc+ca=q, abc=r$.

Avem: $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=1\Leftrightarrow r=p+2$.

Calculăm

$P=(a+\lambda)(b+\lambda)(c+\lambda)=(x+\lambda+2)(y+\lambda+2)(z+\lambda+2)=r+(\lambda+2)q+(\lambda+2)^2p+(\lambda+2)^3=$

$=(p+2)+(\lambda+2)q+(\lambda+2)^2p+(\lambda+2)^3=(\lambda^2+4\lambda+5)p+(\lambda+2)q+(\lambda+2)^3+2$.

Avem $p+2=r=xyz\overset{AGM}{\leq}\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3=\left(\frac{p}{3}\right)^3$,

de unde $p^3\geq 27(p+2)\Leftrightarrow p^3-27p-54\geq 0\Leftrightarrow (p-6)(p+3)^2\geq 0\Leftrightarrow p\geq 6$.

Apoi $q^2=(xy+yz+zx)^2\geq 3xyz(x+y+z)=3rp=3p(p+2)\geq 3\cdot 6(6+2)=144$,

de unde rezultă că $q\geq 12$.

Din $p\geq 6$ și $q\geq 12$ rezultă că:

$P=(a+\lambda)(b+\lambda)(c+\lambda)=(\lambda^2+4\lambda+5)p+(\lambda+2)q+(\lambda+2)^3+2\geq$

$\geq(\lambda^2+4\lambda+5)\cdot 6+(\lambda+2)\cdot 12+(\lambda+2)^3+2=(\lambda+4)^3$

Deducem că $\min P=(a+\lambda)(b+\lambda)(c+\lambda)$ este $(\lambda+4)^3$ și minimul este atins pentru $a=b=c=4$.

Notă.

Pentru $\lambda=0$ se obține Problema propusă de Elton P în Mathematical Olympiads 8/2021.

If $a,b,c>2$ such that $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}=1$, then find the minimum of expression abc.

Mathematical Olympiads 8/2021, Elton P

Aplicația 32.

If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=3$ then

$$\frac{1}{3}\sum a^2b^2+\sum\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)^2\ge 4.$$

RMM 8/2021, Choy Fai Lam

Soluție.
Folosim pqr - Method:
Notăm: $p=a+b+c=3, q=ab+bc+ca$ și $r=abc$.
Obținem:
$q\le 3$, $pq\ge 9r \Rightarrow q\ge 3r$.
Rezultă:
$\sum a^2b^2=\left(\sum ab\right)^2-2abc\sum a=q^2-2rp=q^2-6r\ge q^2-2q$, deci $\sum a^2b^2\ge q^2-2q$, (1).

Apoi $a^2+b^2\ge\frac{(a+b)^2}{2}\Rightarrow\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{a+b}\cdot\frac{a^2+b^2}{a+b}\ge\frac{\frac{(a+b)^2}{2}}{a+b}\cdot\frac{a^2+b^2}{a+b}=\frac{a^2+b^2}{2}$.

Rezultă:
$\sum\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)^2\ge\sum\frac{a^2+b^2}{2}=\sum a^2=p^2-2q=9-2q$, deci $\sum\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)^2\ge 9-2q$, (2).

Din (1) și (2) rezultă:

$$Ms=\frac{1}{3}\sum a^2b^2+\sum\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)^2\ge\frac{1}{3}\left(q^2-2q\right)+9-2q\overset{(3)}{\ge}4=Md,$$

unde (3) $\Leftrightarrow q^2-8q+15\ge 0\Leftrightarrow (q-3)(q-5)\ge 0$, care rezultă din $q\le 3$.
Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarca.
Problema se poate dezvolta.
If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=3$ then

$$\lambda\sum a^2b^2+\sum\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)^2\ge 3(\lambda+1),\ \text{unde}\ 0\le\lambda\le\frac{1}{2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.
Folosim pqr - Method:
Notăm: $p=a+b+c=3, q=ab+bc+ca$ și $r=abc$.
Obținem $q\le 3$, $pq\ge 9r \Rightarrow q\ge 3r$.
Rezultă:
$\sum a^2b^2=\left(\sum ab\right)^2-2abc\sum a=q^2-2rp=q^2-6r\ge q^2-2q$, deci $\sum a^2b^2\ge q^2-2q$, (1).

Apoi $a^2+b^2\ge\frac{(a+b)^2}{2}\Rightarrow\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{a+b}\cdot\frac{a^2+b^2}{a+b}\ge\frac{\frac{(a+b)^2}{2}}{a+b}\cdot\frac{a^2+b^2}{a+b}=\frac{a^2+b^2}{2}$.

Rezultă:

$$\sum\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)^2 \ge \sum\frac{a^2+b^2}{2}=\sum a^2=p^2-2q=9-2q\text{, deci }\sum\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)^2\ge 9-2q\text{, (2).}$$

Din (1) și (2) rezultă:

$$Ms=\lambda\sum a^2b^2+\sum\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)^2\ge\lambda\left(q^2-2q\right)+9-2q\overset{(3)}{\ge}3(\lambda+1)=Md,$$

unde (3) $\Leftrightarrow \lambda q^2-2(\lambda+1)q+3(2-\lambda)\ge 0 \Leftrightarrow (q-3)(\lambda q+\lambda-2)\ge 0$,

care rezultă din $q\le 3$ și condiția din enunț $0\le\lambda\le\frac{1}{2}$, care asigură $(\lambda q+\lambda-2)\le 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Notă.

Pentru $\lambda=\frac{1}{3}$ se obține Problema propusă de Choy Fai Lam în RMM 8/2021.

If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=3$ then

$$\frac{1}{3}\sum a^2b^2+\sum\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)^2\ge 4.$$

Choy Fai Lam

Aplicația 33.

If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=3$, then

$$\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{b^2+b+1}+\frac{1}{c^2+c+1}+\frac{4}{3(5-abc)}\ge\frac{4}{3}.$$

Mathematical inequalities,9/2021, Phan Ngoc Chau, Viet Nam

Soluție.

Demonstrăm

Lema

If $x>0$ then

$$\frac{1}{x^2+x+1}\ge\frac{8}{9(x+1)}-\frac{x}{9}.$$

Demonstrație.

Avem: $\frac{1}{x^2+x+1}\ge\frac{8}{9(x+1)}-\frac{x}{9}\Leftrightarrow x^4+2x^3-6x^2+2x+1\ge 0\Leftrightarrow (x-1)^2\left(x^2+4x+1\right)\ge 0$,

evident cu egalitate pentru $x=1$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$\sum\frac{1}{a^2+a+1}\overset{Lema}{\ge}\sum\left(\frac{8}{9(a+1)}-\frac{a}{9}\right)=\frac{8}{9}\sum\frac{1}{a+1}-\frac{1}{9}\sum a=\frac{8}{9}\sum\frac{1}{a+1}-\frac{1}{9}\cdot 3=$$

$$=\frac{8}{9}\sum\frac{1}{a+1}-\frac{1}{3}=\frac{8}{9}\frac{\sum(b+1)(c+1)}{\prod(a+1)}-\frac{1}{3}=\frac{8}{9}\cdot\frac{\sum bc+2\sum a+3}{abc+\sum bc+\sum a+1}-\frac{1}{3}=$$

$$=\frac{8}{9}\cdot\frac{\sum bc+2\cdot 3+3}{abc+\sum bc+3+1}-\frac{1}{3}=\frac{8}{9}\cdot\frac{\sum bc+9}{abc+\sum bc+4}-\frac{1}{3}.$$

Inegalitatea de demonstrat se scrie:

$\frac{8}{9}\cdot\frac{\sum bc+9}{abc+\sum bc+4}-\frac{1}{3}+\frac{4}{3(5-abc)}\geq\frac{4}{3}$, (1).

Folosim pqr -Method.

Notăm $a+b+c=p, ab+bc+ca=q, abc=r$.

Din $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$ și $(a+b+c)^3\geq 3abc$, $a+b+c=3$, obținem $q\leq 3$ și $r\leq 1$.

Inegalitatea (1) se scrie:

$$\frac{8}{9}\cdot\frac{q+9}{r+q+4}-\frac{1}{3}+\frac{4}{3(5-r)}\geq\frac{4}{3}\Leftrightarrow\frac{8}{9}\cdot\frac{q+9}{r+q+4}-\frac{8}{9}+\frac{5}{9}+\frac{4}{3(5-r)}\geq\frac{4}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{8}{9}\cdot\left(\frac{q+9}{r+q+4}-1\right)+\frac{5}{9}+\frac{4}{3(5-r)}\geq\frac{4}{3}\Leftrightarrow\frac{8}{9}\cdot\frac{5-r}{r+q+4}+\frac{5}{9}+\frac{4}{3(5-r)}\geq\frac{4}{3}.$$

Folosind $q\leq 3$ este sufficient să arătăm că:

$$\frac{8}{9}\cdot\frac{5-r}{r+3+4}+\frac{5}{9}+\frac{4}{3(5-r)}\geq\frac{4}{3}\Leftrightarrow\frac{8}{9}\cdot\frac{5-r}{r+7}+\frac{5}{9}+\frac{4}{3(5-r)}\geq\frac{4}{3}\Leftrightarrow 5r^2-18r+13\geq 0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (r-1)(5r-13)\geq 0$, care rezultă din $r\leq 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c>0$ such that $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=\frac{3}{2}$ then

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{a+b+c+1}\leq 1+\frac{a+b+c}{4}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Demonstrăm

Lema

If $x>0$ then

$$\frac{1}{x^2+1}\leq\frac{3}{x+1}+\frac{x-5}{4}.$$

Demonstrație.

Avem: $\frac{1}{x^2+1}\leq\frac{3}{x+1}+\frac{x-5}{4}\Leftrightarrow x^4-4x^3+8x^2-8x+3\geq 0\Leftrightarrow (x-1)^2(x-2x+3)\geq 0$,

evident cu egalitate pentru $x=1$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$\sum\frac{1}{a^2+1}\overset{Lema}{\leq}\sum\left(\frac{3}{a+1}+\frac{a-5}{4}\right)=3\sum\frac{1}{a+1}+\frac{\sum a-15}{4}=3\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\sum a-\frac{15}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sum a.$$

Din $\frac{3}{2}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\overset{CS}{\geq}\frac{9}{a+b+c+3}$ rezultă $a+b+c\geq 3$, de unde $\frac{1}{a+b+c+1}\leq\frac{1}{4}$.

Obținem:

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{a+b+c+1}\leq\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sum a+\frac{1}{4}=1+\frac{1}{4}\sum a=1+\frac{a+b+c}{4}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=3$, and $\lambda \geq 0$ then

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{\lambda}{5-abc}\leq\frac{\lambda+6}{4}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind $a^2+1\geq 2a$ obținem:

$$Ms=\sum\frac{1}{a^2+1}+\frac{\lambda}{5-abc}\leq\sum\frac{1}{2a}+\frac{\lambda}{5-abc}=\frac{ab+bc+ca}{2abc}+\frac{\lambda}{5-abc}\overset{(1)}{\leq}\frac{\lambda+6}{4}=Md,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \dfrac{ab+bc+ca}{2abc}+\dfrac{\lambda}{5-abc}\leq\dfrac{\lambda+6}{4}$, (1).

Folosim pqr -Method.

Notăm $a+b+c=p, ab+bc+ca=q, abc=r$.

Din $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$ și $(a+b+c)^3\geq 3abc$, $a+b+c=3$, obținem $q\leq 3$ și $r\leq 1$.

Inegalitatea (1) se scrie: $\dfrac{q}{2r}+\dfrac{\lambda}{5-r}\leq\dfrac{\lambda+6}{4}$.

Folosind $q\leq 3$ este sufficient să arătăm că:

$\dfrac{3}{2r}+\dfrac{\lambda}{5-r}\leq\dfrac{\lambda+6}{4}\Leftrightarrow 5\lambda r\leq 5\lambda$, care rezultă din $r\leq 1$ și condiția din ipoteză $\lambda\geq 0$,

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația 34.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=1$ then

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}.$$

Mathematical inequalities,10/2021, Nguyen Van Canh, Vietnam

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$.

Avem $p=1$ și $1=p^2=(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)=3q\Rightarrow q\leq\dfrac{1}{3}$.

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{\sum(a+b)(a+c)}{\prod(b+c)}\geq\frac{1}{\sum bc}+\frac{1}{2\sum a^2}\Leftrightarrow\frac{\sum a^2+3\sum bc}{\sum a\sum bc-abc}\geq\frac{1}{\sum bc}+\frac{1}{2\sum a^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sum a\right)^2+\sum bc}{\sum a\sum bc-abc}\geq\frac{1}{\sum bc}+\frac{1}{2\left[\left(\sum a\right)^2-2\sum bc\right]}\overset{pqr}{\Leftrightarrow}\frac{p^2+q}{pq-r}\geq\frac{1}{q}+\frac{1}{2\left(p^2-2q\right)}\overset{p=1}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{p=1}{\Leftrightarrow}\frac{1+q}{q-r}\geq\frac{1}{q}+\frac{1}{2(1-2q)}\Leftrightarrow\frac{1+q}{q-r}\geq\frac{2-3q}{2q(1-2q)}\Leftrightarrow q^2-4q^3\geq 3qr-2r\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q^2(1-4q)\geq r(3q-2).$$

Deoarece $q\leq\dfrac{1}{3}$, distingem cazurile:

Cazul1). Dacă $q<\dfrac{1}{4}$, atunci $Ms=q^2(1-4q)>0$ și $Md=r(3q-2)\leq r\left(3\cdot\dfrac{1}{3}-2\right)=-r<0$,

deci inegalitatea este adevărată.

Cazul1). Dacă $q \geq \frac{1}{4}$, atunci folosind inegalitatea lui Schur $p^3 + 9r \geq 4pq \overset{p=1}{\Leftrightarrow} 1 + 9r \geq 4q \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r \geq \frac{4q-1}{9}$ este suficient să arătăm că:

$q^2(1-4q) \overset{3q-2\leq 0}{\leq} \frac{4q-1}{9}(3q-2) \Leftrightarrow (4q-1)(1-3q)(3q+2) \geq 0$, care rezultă din $q \geq \frac{1}{4}$ și $q \leq \frac{1}{3}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Remarca.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c > 0$, $a+b+c=1$ and $2n+k=3$ then

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{n}{ab+bc+ca} + \frac{k}{a^2+b^2+c^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p = a+b+c, q = ab+bc+ca, r = abc$.

Avem $p = 1$ și $1 = p^2 = (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) = 3q \Rightarrow q \leq \frac{1}{3}$.

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{\sum(a+b)(a+c)}{\prod(b+c)} \geq \frac{n}{\sum bc} + \frac{k}{\sum a^2} \Leftrightarrow \frac{\sum a^2 + 3\sum bc}{\sum a \sum bc - abc} \geq \frac{n}{\sum bc} + \frac{k}{\sum a^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sum a\right)^2 + \sum bc}{\sum a \sum bc - abc} \geq \frac{n}{\sum bc} + \frac{k}{\left(\sum a\right)^2 - 2\sum bc} \overset{pqr}{\Leftrightarrow} \frac{p^2+q}{pq-r} \geq \frac{n}{q} + \frac{k}{p^2-2q} \overset{p=1}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{p=1}{\Leftrightarrow} \frac{1+q}{q-r} \geq \frac{n}{q} + \frac{k}{1-2q} \Leftrightarrow \frac{1+q}{q-r} \geq \frac{n+(k-2n)q}{q(1-2q)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2q^3 + (2n-k-1)q^2 + (1-n)q \geq (2n-k)qr - nr.$$

Deoarece $q \leq \frac{1}{3}$, distingem cazurile:

Cazul1). Dacă $q < \frac{1}{4}$, atunci $Ms = q^2(1-4q) > 0$ și $Md = r(3q-2) \leq r\left(3 \cdot \frac{1}{3} - 2\right) = -r < 0$,

deci inegalitatea este adevărată.

Cazul1). Dacă $q \geq \frac{1}{4}$, atunci folosind inegalitatea lui Schur $p^3 + 9r \geq 4pq \overset{p=1}{\Leftrightarrow} 1 + 9r \geq 4q \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r \geq \frac{4q-1}{9}$ este suficient să arătăm că:

$q^2(1-4q) \overset{3q-2\leq 0}{\leq} \frac{4q-1}{9}(3q-2) \Leftrightarrow (4q-1)(1-3q)(3q+2) \geq 0$, care rezultă din $q \geq \frac{1}{4}$ și $q \leq \frac{1}{3}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Aplicația 35.

If $a,b,c > 0$, $abc = 1$ then

$$\frac{a}{a+b+1}+\frac{b}{b+c+1}+\frac{c}{c+a+1}+\frac{4}{3}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\geq 5.$$

Mathematical inequalities,10/2021,Phan Ngoc Chau, VietNam

Soluție.

Notând $x=a^2, y=b^2, z=c^2$, problema se reformulează:

If $x,y,z>0$, $xyz=1$ then

$$\frac{x^2}{x^2+y^2+1}+\frac{y^2}{y^2+z^2+1}+\frac{z^2}{z^2+x^2+1}+\frac{4}{3}(x+y+z)\geq 5.$$

Folosind inegalitatea lui Bergstrőm obținem:

$$Ms=\sum\frac{x^2}{x^2+y^2+1}+\frac{4}{3}\sum x\geq\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum\left(x^2+y^2+1\right)}+\frac{4}{3}\sum x=\frac{\left(\sum x\right)^2}{2\sum x^2+3}+\frac{4}{3}\sum x\overset{(1)}{\geq}$$

$$\overset{(1)}{\geq}\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum x^2+\sum x^2}+\frac{4}{3}\sum x=\frac{\left(\sum x\right)^2}{3\sum x^2}+\frac{4}{3}\sum x\overset{(2)}{\geq}5=Md,$$

unde (1) $\Leftrightarrow\sum x^2\geq 3$, care rezultă din inegalitatea mediilor și condiția $xyz=1$.

Să rezolvăm inegalitatea(2) $\Leftrightarrow\dfrac{\left(\sum x\right)^2}{3\sum x^2}+\dfrac{4}{3}\sum x\geq 5\Leftrightarrow\dfrac{\left(\sum x\right)^2}{\sum x^2}+4\sum x\geq 15$, care rezultă din inegalitatea mediilor:

$$\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum x^2}+4\sum x=\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum x^2}+\sum x+\sum x+\sum x+\sum x\geq 5\sqrt[5]{\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum x^2}\cdot\sum x\cdot\sum x\cdot\sum x\cdot\sum x}=$$

$$=5\sqrt[5]{\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum x^2}\cdot\sum x\cdot\sum x\cdot\sum x\cdot\sum x}=5\sqrt[5]{\frac{\left(\sum x\right)^6}{\sum x^2}}\overset{(3)}{\geq}15,$$

unde (3) $\Leftrightarrow 5\sqrt[5]{\dfrac{\left(\sum x\right)^6}{\sum x^2}}\geq 15\Leftrightarrow\sqrt[5]{\dfrac{\left(\sum x\right)^6}{\sum x^2}}\geq 3\Leftrightarrow\dfrac{\left(\sum x\right)^6}{\sum x^2}\geq 3^5\Leftrightarrow\left(\sum x\right)^6\geq 243\sum x^2$,

care rezultă din:

$$\left(\sum x\right)^6=\left(\sum x\right)^5\sum x\overset{AGM}{\geq}\left(\sum x\right)^5\cdot 3\sqrt[3]{xyz}\overset{xyz=1}{=}\left(\sum x\right)^5\cdot 3\overset{(4)}{\geq}243\sum x^2,$$

unde (4) $\Leftrightarrow\left(\sum x\right)^5\cdot 3\geq 243\sum x^2\Leftrightarrow\left(\sum x\right)^5\geq 81\sum x^2\overset{xyz=1}{=}81xyz\sum x^2$,

care rezultă din Lema:

Demonstrăm

Lema

If $x,y,z>0$ then

$$\left(\sum x\right)^5\geq 81xyz\sum x^2.$$

Demonstratie.

Fie $p=x+y+z, q=xy+yz+zx, r=xyz$.

Avem $xyz\left(x^2+y^2+z^2\right)=r\left(p^2-2q\right)\overset{3pr\leq q^2}{\leq}\dfrac{q^2\left(p^2-2q\right)}{3p}\overset{AGM}{\leq}\dfrac{1}{3p}\left(\dfrac{q+q+p^2-2q}{3}\right)^3=\dfrac{1}{3p}\cdot\dfrac{p^6}{27}=$

$$=\frac{p^5}{81}=\frac{(x+y+z)^5}{81}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z$.

Aplicația 36.

If $a,b,c>0$, $a+b+c\ge 3$ and $k>0$ then

$$\frac{a^3}{b+kbc}+\frac{b^3}{c+kca}+\frac{c^3}{a+kab}\ge\frac{3}{1+k}.$$

Mathematical inequalities,10/2021,Konstantinos Geronikolas, Greece

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $a+b+c=p\ge 3, q=ab+bc+ca\le\frac{p^2}{3}, r=abc$.

Obținem:

$$Ms=\sum\frac{a^3}{b+kbc}\overset{Holder}{\ge}\frac{\left(\sum a\right)^3}{3\sum(b+kbc)}=\frac{p^3}{3(p+kq)}\ge\frac{p^3}{3\left(p+k\cdot\frac{p^2}{3}\right)}=\frac{p^2}{3+kp}\overset{(1)}{\ge}\frac{3}{1+k}=Md,$$

unde (1) $\Leftrightarrow\frac{p^2}{3+kp}\ge\frac{3}{1+k}\Leftrightarrow p^2(1+k)-3kp-9\ge 0\Leftrightarrow(p-3)\left[(k+1)p+3\right]\ge 0$, care rezultă din $p\ge 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Remarca.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c>0$, $a+b+c\ge 3$ and $\lambda\ge 0$ then

$$\frac{a^2}{b+\lambda bc}+\frac{b^2}{c+\lambda ca}+\frac{c^2}{a+\lambda ab}\ge\frac{3}{\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $a+b+c=p\ge 3, q=ab+bc+ca\le\frac{p^2}{3}, r=abc$.

Obținem:

$$Ms=\sum\frac{a^2}{b+\lambda bc}\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum(b+\lambda bc)}=\frac{p^2}{(p+\lambda q)}\ge\frac{p^2}{\left(p+\lambda\cdot\frac{p^2}{3}\right)}=\frac{3p}{1+\lambda p}\overset{(1)}{\ge}\frac{3}{\lambda+1}=Md,$$

unde (1) $\Leftrightarrow\frac{3p}{3+\lambda p}\ge\frac{3}{\lambda+1}$, care rezultă din $p\ge 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Remarca.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c>0$, $a+b+c\ge 3$ and $\lambda\ge 0$ then

$$\frac{a^4}{b+\lambda bc}+\frac{b^4}{c+\lambda ca}+\frac{c^4}{a+\lambda ab}\geq\frac{3}{\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $a+b+c=p\geq 3, q=ab+bc+ca\leq\frac{p^2}{3}, r=abc$.

Obținem:

$$Ms=\sum\frac{a^4}{b+\lambda bc}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^4}{9\sum(b+\lambda bc)}=\frac{p^4}{9(p+\lambda q)}\geq\frac{p^4}{9\left(p+\lambda\cdot\frac{p^2}{3}\right)}=\frac{p^3}{9+3\lambda p}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{1+\lambda}=Md,$$

unde (1)

$$\Leftrightarrow\frac{p^3}{9+3\lambda p}\geq\frac{3}{\lambda+1}\Leftrightarrow p^3(1+\lambda)-3\lambda p-9\geq 0\Leftrightarrow(p-3)\left[(\lambda+1)p^2+3(\lambda+1)p+9\right]\geq 0,$$

care rezultă din $p\geq 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Remarca.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c>0$, $a+b+c\geq 3$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\frac{a^5}{b+\lambda bc}+\frac{b^5}{c+\lambda ca}+\frac{c^5}{a+\lambda ab}\geq\frac{3}{\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $a+b+c=p\geq 3, q=ab+bc+ca\leq\frac{p^2}{3}, r=abc$.

Obținem:

$$Ms=\sum\frac{a^5}{b+\lambda bc}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^5}{27\sum(b+\lambda bc)}=\frac{p^5}{27(p+\lambda q)}\geq\frac{p^5}{27\left(p+\lambda\cdot\frac{p^2}{3}\right)}=$$

$$=\frac{p^4}{27+9\lambda p}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{1+\lambda}=Md,$$ unde (1)

$$\Leftrightarrow\frac{p^4}{27+9\lambda p}\geq\frac{3}{\lambda+1}\Leftrightarrow p^4(1+\lambda)-27\lambda p-81\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(p-3)\left[(\lambda+1)p^3+3(\lambda+1)p^2+9(\lambda+1)p+27\right]\geq 0,$$

care rezultă din $p\geq 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Remarca.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c>0$, $a+b+c\geq 3$ and $\lambda\geq 0$, $n\in\mathbf{N}, n\geq 2$ then

$$\frac{a^n}{b+\lambda bc}+\frac{b^n}{c+\lambda ca}+\frac{c^n}{a+\lambda ab}\geq\frac{3}{\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $a+b+c=p\geq 3$, $q=ab+bc+ca\leq \dfrac{p^2}{3}$, $r=abc$.

Obținem:

$$Ms=\sum\frac{a^n}{b+\lambda bc}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^n}{3^{n-2}\sum(b+\lambda bc)}=\frac{p^n}{3^{n-2}(p+\lambda q)}\geq\frac{p^n}{3^{n-2}\left(p+\lambda\cdot\dfrac{p^2}{3}\right)}=$$

$$=\frac{p^{n-1}}{3^{n-2}+3^{n-3}\lambda p}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{1+\lambda}=Md\text{ , unde (1) }\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{p^{n-1}}{3^{n-2}+3^{n-3}\lambda p}\geq\frac{3}{\lambda+1}\Leftrightarrow p^{n-1}(1+\lambda)-3^{n-2}\lambda p-3^{n-1}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(p-3)\left[(\lambda+1)p^{n-2}+3(\lambda+1)p^{n-3}+9(\lambda+1)p^{n-4}+\ldots+3^{n-3}p+3^{n-2}\right]\geq 0,$$

care rezultă din $p\geq 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Notă.

Pentru $n=3$ se obține Problema propusă de Konstantinos Geronikolas în Mathematical Inequalites 10/2021.

If $a,b,c>0$, $a+b+c\geq 3$ and $k>0$ then

$$\frac{a^3}{b+kbc}+\frac{b^3}{c+kca}+\frac{c^3}{a+kab}\geq\frac{3}{1+k}.$$

Konstantinos Geronikolas

Aplicația 37.

If $x,y,z>0$, $xyz=1$ then

$$x^2+y^2+z^2+6\geq\frac{3}{2}(x+y+z+xy+yz+zx).$$

RMM 10/2021,Nguyen Van Canh

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p=x+y+z, q=xy+yz+zx, r=xyz$.

Avem $r=1$, $p\geq 3$, $x^2+y^2+z^2=p^2-2q$.

Inegalitatea din enunț se scrie:

$$p^2-2q+6\geq\frac{3}{2}(p+q)\Leftrightarrow 2p^2-3p-7q+12\geq 0,(1).$$

Cu inegalitatea lui Schur $p^3+9r\geq 4pq$ și $r=1$ obținem: $q\leq\dfrac{p^3+9}{4p}$,(2).

Din (1) și (2) este sufficient să arătăm că:

$$2p^2-3p-7\cdot\frac{p^3+9}{4p}+12\geq 0\Leftrightarrow p^3-12p^2+48p-63\geq 0\Leftrightarrow(p-3)(p^2-9p+21)\geq 0,$$

care rezultă din $p\geq 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Remarca

Problema se poate dezvolta.

If $x, y, z > 0$, $xyz = 1$ and $\lambda \leq \frac{3}{2}$ then

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3(2\lambda - 1) \geq \lambda(x + y + z + xy + yz + zx).$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p = x + y + z, q = xy + yz + zx, r = xyz$.

Avem $r = 1$, $p \geq 3$, $x^2 + y^2 + z^2 = p^2 - 2q$.

Inegalitatea din enunț se scrie:

$p^2 - 2q + 3(2\lambda - 1) \geq \lambda(p + q) \Leftrightarrow p^2 - \lambda p - (\lambda + 2)q + 3(2\lambda - 1) \geq 0$,(1).

Cu inegalitatea lui Schur $p^3 + 9r \geq 4pq$ și $r = 1$ obținem: $q \leq \frac{p^3 + 9}{4p}$,(2).

Din (1) și (2) este sufficient să arătăm că:

$p^2 - \lambda p - (\lambda + 2) \cdot \frac{p^3 + 9}{4p} + 3(2\lambda - 1) \geq 0 \Leftrightarrow (2 - \lambda)p^3 - 4\lambda p^2 + 12(2\lambda - 1)p - 9(\lambda + 2) \geq 0 \Leftrightarrow$

$(p - 3)\left[(2 - \lambda)p^2 + (6 - 7\lambda)p + 3(\lambda + 2)\right] \geq 0$, care rezultă din $p \geq 3$ și condiția din ipoteză $\lambda \leq \frac{3}{2}$, care asigură $\left[(2 - \lambda)p^2 + (6 - 7\lambda)p + 3(\lambda + 2)\right] > 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 1$.

Notă.

Pentru $\lambda = \frac{3}{2}$ se obține Problema propusă de Nguyen Van Canh în RMM 10/2021.

If $x, y, z > 0$, $xyz = 1$ then

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6 \geq \frac{3}{2}(x + y + z + xy + yz + zx).$$

Nguyen Van Canh

Aplicația 38.

If $a, b, c > 0$, $a + b + c = 3$ then

$$\frac{12}{ab + bc + ca} + abc \geq 5.$$

Mathematical Inequalities10/2021, Imad Zak

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc$.

Avem, $p = 3$.

Inegalitatea din enunț se scrie:

$\frac{12}{q} + r \geq 5$,(1).

Cu inegalitatea lui Schur $p^3 + 9r \geq 4pq$ și $p = 3$ obținem: $r \geq \frac{4q - 9}{3}$,(2).

Din (1) și (2) este sufficient să arătăm că:

$\frac{12}{q}+\frac{4q-9}{3}\geq 5 \Leftrightarrow q^2-6q+9\geq 0 \Leftrightarrow (q-3)^2\geq 0$, evident cu egalitate pentru $q=3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarca

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\frac{12\lambda+9}{ab+bc+ca}+ab+bc+ca+\lambda abc\geq 5\lambda+6.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$.

Avem, $p=3$.

Inegalitatea din enunț se scrie:

$\frac{12\lambda+9}{q}+q+\lambda r\geq 5\lambda+6$,(1).

Cu inegalitatea lui Schur $p^3+9r\geq 4pq$ și $p=3$ obținem: $r\geq\frac{4q-9}{3}$,(2).

Din (1) și (2) este sufficient să arătăm că:

$\frac{12\lambda+9}{q}+q+\lambda\cdot\frac{4q-9}{3}\geq 5\lambda+6 \Leftrightarrow \frac{12\lambda+9}{q}+q+\lambda\cdot\frac{4q-9}{3}\geq 5\lambda+6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (4\lambda+3)q^2-(24\lambda+18)q+(36\lambda+27)\geq 0 \Leftrightarrow (4\lambda+3)q^2-6(4\lambda+3)q+9(4\lambda+3)\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (4\lambda+3)(q^2-6q+9)\geq 0 \Leftrightarrow (4\lambda+3)(q-3)^2\geq 0$, evident cu egalitate pentru $q=3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația 39.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then find minimum of

$$P=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a+b+c-1}.$$

Matematika 11/2021,Amir Sofi

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$.

Avem $p=a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}=3$, $r=abc=1$, $q^2=(ab+bc+ca)^2\geq 3abc(a+b+c)=$

$=3rp=3p \Rightarrow q\geq\sqrt{3p}$

$(a+b)(b+c)(c+a)=2abc+\sum bc(b+c)=\sum a\sum bc-1=pq-1$.

Arătăm că $P=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a+b+c-1}\geq 4$

Într-adevăr

Demonstrăm $P=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a+b+c-1}=\frac{pq-1}{p-1}\overset{(1)}{\geq} 4$,

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{pq-1}{p-1}\geq 4 \Leftrightarrow pq-1\geq 4p-4 \Leftrightarrow pq\geq 4p-3$, care rezultă din:

$pq \geq p\sqrt{3p} \overset{(2)}{\geq} 4p-3$, unde (2) $\Leftrightarrow p\sqrt{3p} \geq 4p-3 \Leftrightarrow \left(p\sqrt{3p}\right)^2 \geq (4p-3)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3p^3 \geq 16p^2-24p+9 \Leftrightarrow 3p^3-16p^2+24p-9 \geq 0 \Leftrightarrow (p-3)(3p^2-7p+3) \geq 0$,

care rezultă din $p \geq 3$.

Din $P=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a+b+c-1} \geq 4$, cu egalitate pentru $(a,b,c)=(1,1,1)$,

deducem că minimum value of $P=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a+b+c-1}$ este 4 și minimul este atins pentru $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Remarca.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda > \frac{1}{3}$ fixed. If $a,b,c>0$, $abc=1$ then find minimum of

$$P=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{\lambda(a+b+c)-1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim pqr-Method.

Notăm $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$.

Avem $p=a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}=3$, $r=abc=1$, $q^2=(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)=$

$=3rp=3p \Rightarrow q \geq \sqrt{3p}$

$(a+b)(b+c)(c+a)=2abc+\sum bc(b+c)=\sum a\sum bc-1=pq-1$.

Arătăm că $P=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{\lambda(a+b+c)-1} \geq \frac{8}{3\lambda-1}$

Într-adevăr

Demonstrăm $P=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{\lambda(a+b+c)-1}=\frac{pq-1}{\lambda p-1} \overset{(1)}{\geq} \frac{8}{3\lambda-1}$,

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{pq-1}{\lambda p-1} \geq \frac{8}{3\lambda-1} \Leftrightarrow (3\lambda-1)(pq-1) \geq 8(\lambda p-1) \Leftrightarrow (3\lambda-1)pq \geq 8\lambda p+3\lambda-9$,

care rezultă din:

$(3\lambda-1)pq \geq (3\lambda-1)p\sqrt{3p} \overset{(2)}{\geq} 8\lambda p+3\lambda-9$, unde (2) $\Leftrightarrow (3\lambda-1)p\sqrt{3p} \geq 8\lambda p+3\lambda-9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3\lambda-1)^2 3p^3 \geq (8\lambda p+3\lambda-9)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(3\lambda-1)^2 p^3-64\lambda^2p^2+(144\lambda-48\lambda^2)p-9(\lambda-3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (p-3)\left[3(3\lambda-1)^2p^2+(17\lambda^2-54\lambda+9)p+3(\lambda-3)^2\right] \geq 0$,

care rezultă din $p \geq 3$ și condiția din ipoteză $\lambda > \frac{1}{3}$, care asigură

$\left[3(3\lambda-1)^2p^2+(17\lambda^2-54\lambda+9)p+3(\lambda-3)^2\right] \geq 0$.

Din $P=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{\lambda(a+b+c)-1} \geq \frac{8}{3\lambda-1}$, cu egalitate pentru $(a,b,c)=(1,1,1)$, deducem că minimum value of $P=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{\lambda(a+b+c)-1}$ este $\frac{8}{3\lambda-1}$ şi minimul este atins pentru $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Nota.

Pentru $\lambda=1$ se obține Problema propusă de Amir Sofi în Matematika 11/2021.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then find minimum of

$$P=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a+b+c-1}.$$

Amir Sofi

Aplicația 40.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then

$$\sum\frac{bc(c+1)}{a+1}\geq ab+bc+ca.$$

RMM 11/2021, Phan Ngoc Chau, Viet Nam

Soluție.

Folosind pqr-Method obținem:

$p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$.

Avem $p=3$, $q^2=(ab+bc+ca)^2\geq 3abc(a+b+c)=3rp=9r \Rightarrow r\leq\frac{q^2}{9}$.

$$Ms=\sum\frac{bc(c+1)}{a+1}=\sum\frac{bc^2}{a+1}+\sum\frac{bc}{a+1}=\sum\frac{b^2c^2}{b(a+1)}+\sum\frac{b^2c^2}{bc(a+1)}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum bc\right)^2}{\sum b(a+1)}+\frac{\left(\sum bc\right)^2}{\sum bc(a+1)}=$$

.

$$=\frac{q^2}{q+p}+\frac{q^2}{3r+q}\geq\frac{q^2}{q+3}+\frac{q^2}{3\cdot\frac{q^2}{9}+q}=\frac{q^2}{q+3}+\frac{3q}{q+3}=\frac{q(q+3)}{q+3}=q=ab+bc+ca.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarca.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\sum\frac{bc(c+\lambda)}{a+\lambda}\geq ab+bc+ca.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind pqr-Method obținem:

$p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$.

Avem $p=3$, $q^2=(ab+bc+ca)^2\geq 3abc(a+b+c)=3rp=9r \Rightarrow r\leq\frac{q^2}{9}$.

$$Ms=\sum\frac{bc(c+\lambda)}{a+\lambda}=\sum\frac{bc^2}{a+\lambda}+\lambda\sum\frac{bc}{a+\lambda}=\sum\frac{b^2c^2}{b(a+\lambda)}+\lambda\sum\frac{b^2c^2}{bc(a+\lambda)}\overset{CS}{\geq}$$

$$\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum bc\right)^2}{\sum b(a+\lambda)}+\lambda\frac{\left(\sum bc\right)^2}{\sum bc(a+\lambda)}==\frac{q^2}{q+\lambda p}+\lambda\frac{q^2}{3r+\lambda q}\geq\frac{q^2}{q+3\lambda}+\lambda\frac{q^2}{3\cdot\frac{q^2}{9}+\lambda q}=$$

$$=\frac{q^2}{q+3\lambda}+\lambda\frac{3q}{q+3\lambda}=\frac{q(q+3\lambda)}{q+3\lambda}=q=ab+bc+ca.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Notă.

Pentru $\lambda=1$ se obține Problema propusă de Phan Ngoc Chau în RMM 11/2021.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then

$$\sum\frac{bc(c+1)}{a+1}\geq ab+bc+ca.$$

Phan Ngoc Chau, Viet Nam

Aplicația 41.

If $x,y,z>0$ then

$$\sum y^3z^3+xyz\sum x^3+18x^2y^2z^2\geq xyz\prod(y+z).$$

RMM 11/2021, Cyclic Inequality-1285, Hikmat Mammadov, Azerbaijan

Soluție.

Folosind pqr -Method, notăm $p=x+y+z, q=xy+yz+zx, r=xyz$.

Obținem:

$\sum y^3z^3=q^3-3pqr+3r^2, \sum x^3=p^3-3pq+3r, \prod(y+z)=pq-r$.

Inegalitatea se scrie :

$\left(q^3-3pqr+3r^2\right)+r\left(p^3-3pq+3r\right)+18r^2\geq 3r(pq-r)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow q^3+rp^3+27r^2\geq 9pqr$, care rezultă din inegalitatea mediilor:

$q^3+rp^3+27r^2\overset{AGM}{\geq}3\sqrt[3]{q^3\cdot rp^3\cdot 27r^2}=9pqr$, cu egalitate pentru $q^3=rp^3=27r^2\Leftrightarrow x=y=z$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z$.

Aplicația 42.

If $x,y,z>0$, $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=2$ then

$$xyz\leq\frac{1}{8}.$$

Matematika 11/2021, Amir Sofi

Soluție.(Ghimiși Dumitrel)

Avem: $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=2\Leftrightarrow\sum(y+1)(z+1)=2\prod(x+1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sum yz+2\sum x+3=2\left(xyz+\sum yz+\sum x+1\right)\Leftrightarrow\sum yz+2xyz=1$,(1).

Folosind pqr -Method notăm:

$p=x+y+z, q=xy+yz+zx, r=xyz$.

Avem $q^3\geq 27r^2$, care rezultă din:

$q^3=(xy+yz+zx)^3\overset{AGM}{\geq}\left(3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\right)^3=\left(3\sqrt[3]{r^2}\right)^3=27r^2$.

Egalitatea (1) se scrie: $q+2r=1$.

Din $q=1-2r$ și $q^3\geq 27r^2$ rezultă $(1-2r)^3\geq 27r^2 \Leftrightarrow 8r^3+15r^2+6r-1\leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (8r-1)(r+1)^2\leq 0 \Leftrightarrow r\leq \frac{1}{8} \Leftrightarrow xyz\leq \frac{1}{8}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{2}$.

Aplicația 43.

If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2=3$ then

$$a+b+c+\frac{3}{ab+bc+ca}\geq 4.$$

RMM 12/2021, An Zhenping, China

Soluție.

Folosind pqr -Method avem:

$p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$.

Din $a^2+b^2+c^2=3 \Leftrightarrow p^2-2q=3 \Leftrightarrow p^2=2q+3$.

Inegalitatea se scrie $p+\frac{3}{q}\geq 4$, care rezultă din inegalitatea mediilor:

$$Ms=p+\frac{3}{q}=\frac{p}{3}+\frac{p}{3}+\frac{p}{3}+\frac{3}{q}\overset{AGM}{\geq} 4\sqrt[4]{\frac{p}{3}\cdot\frac{p}{3}\cdot\frac{p}{3}\cdot\frac{3}{q}}=4\sqrt[4]{\frac{p^3}{9q}}\overset{(1)}{\geq} 4=Md,$$

unde (1) $\Leftrightarrow 4\sqrt[4]{\frac{p^3}{9q}}\geq 4 \Leftrightarrow \frac{p^3}{9q}\geq 1 \Leftrightarrow p^3\geq 9q \Leftrightarrow p^6\geq 81q^2 \overset{p^2=2q+3}{\Leftrightarrow} (2q+3)^3\geq 81q^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8q^3-45q^2+54q+27\geq 0 \Leftrightarrow (q-3)^2(8q+3)\geq 0$, cu egalitate pentru $q=3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația 44.

If $x,y,z>0$ then

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{(x+y+z)^2}}.$$

Mathematical Olympiads12/2021, EltonP

Soluție

Folosind pqr -Method avem:

$p=x+y+z, q=xy+yz+zx, r=xyz$.

Din omogenitate putem lua $x+y+z=1$, deci $p=1$.

Obținem:

$$\sum\frac{x}{y+z}=\sum\frac{x}{1-x}=\frac{\sum x(1-y)(1-z)}{\sum(1-x)}=\frac{1-2q+3r}{q-r} \text{ și } x^2+y^2+z^2=1-2p.$$

Din $p^3+9r\geq 4pq$ (Schur) și $p=1$, avem $9r\geq 4q-1$.

Din $1=(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)=3q$, avem $3q\leq 1$.

Inegalitatea de demonstrat se scrie:

$$\frac{1-2q+3r}{q-r}\geq \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3(1-2p)}{(1)^2}} \Leftrightarrow \left(\frac{1-2q+3r}{q-r}\right)^2\geq \frac{9}{4}\cdot 3(1-2p),$$

care rezultă din $9r\geq 4q-1$ și $3q\leq 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z$.

Aplicația 45.

If $x,y,z\geq 0$, $x+y+z=1$, then

$$1\leq\frac{x}{1-yz}+\frac{y}{1-zx}+\frac{z}{1-xy}\leq\frac{9}{8}$$

Mathematical Olympiads12/201, Germany NMO

Soluție

Dacă o variabilă este nulă problema este imediată.

În continuare vom considera că $x,y,z>0$.

Avem $1\leq\sum\frac{x}{1-yz}\leq\frac{9}{8}\Leftrightarrow 0\leq\sum\left(\frac{x}{1-yz}-x\right)\leq\frac{1}{8}\Leftrightarrow 0\leq\sum\frac{xyz}{1-yz}\leq\frac{1}{8}$.

Prima inegalitate rezultă din $x,y,z>0$ și $xy,yz,zx<1$.

Să trecem la rezolvarea inegalității din dreapta:

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$, then

$$\sum\frac{xyz}{1-yz}\leq\frac{1}{8}.$$

Folosind pqr -Method notăm:

$p=x+y+z, q=xy+yz+zx, r=xyz$.

Avem $p=1, q\leq\frac{1}{3}$,vezi: $1=\left(\sum x\right)^2\geq 3\sum yz=3q$, $r\leq\frac{q^2}{3}$,vezi $q^2=\left(\sum yz\right)^2\geq 3xyz\sum x=3r$.

Inegalitatea $\sum\frac{xyz}{1-yz}\leq\frac{1}{8}\Leftrightarrow\frac{\sum(1-xy)(1-xz)}{\prod(1-yz)}\leq\frac{1}{8xyz}\Leftrightarrow\frac{3-2q+r}{1-q+r-r^2}\leq\frac{1}{8r}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9r^2+23r+q\leq 1+16qr\Leftrightarrow 1-q-9r^2-r(23-16q)\geq 0$, care rezultă din:

$r\leq\frac{q^2}{3}$ și observația că $(23-16q)>0$, vezi $q\leq\frac{1}{3}$.

Obținem:

$$1-q-9r^2-r(23-16q)\geq 1-q-9\left(\frac{q^2}{3}\right)^2-\frac{q^2}{3}(23-16q)\overset{(1)}{\geq}0,$$

unde (1) $\Leftrightarrow 1-q-9\left(\frac{q^2}{3}\right)^2-\frac{q^2}{3}(23-16q)\geq 0\Leftrightarrow 3q^4-16q^3+23q^2+3q-3\leq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(3q-1)(q^3-5q^2+6q+3)\leq 0$, care rezultă din $(3q-1)\leq 0$ și $(q^3-5q^2+6q+3)>0$,

vezi $q^3+q(6-5q)+3>0$, $(6-5q)>0$, din $q\leq\frac{1}{3}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Aplicația 46.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then

$$2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca.$$

Pure Inequalities 12/2021, Phan Ngoc Chau, Vietnam

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$.

Avem $p=3=a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}=3\sqrt[3]{r}\Rightarrow r\leq 1$,

$q^2=(ab+bc+ca)^2\geq 3abc(a+b+c)=3rp=9r\Rightarrow q\geq 3\sqrt{r}$,(1).

Inegalitatea $2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$ se scrie:

$$2\frac{q}{r}\geq (p^2-2q)+q \Leftrightarrow 2\frac{q}{r}\geq p^2-q \Leftrightarrow 2\frac{q}{r}+q\geq 9 \Leftrightarrow q\left(\frac{2}{r}+1\right)\geq 9,(2).$$

Din (1) și (2) este sufficient să arătăm că:

$$3\sqrt{r}\left(\frac{2}{r}+1\right)\geq 9 \Leftrightarrow \sqrt{r}\left(\frac{2}{r}+1\right)\geq 3 \Leftrightarrow r\left(\frac{2}{r}+1\right)^2\geq 9 \Leftrightarrow r^2-5r+4\geq 0 \Leftrightarrow (r-1)(r-4)\geq 0$$

$\Leftrightarrow (1-r)(4-r)\geq 0$, care rezultă din $r\leq 1<4$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarca.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ and $\lambda\geq\frac{1}{2}$ then

$$(\lambda+1)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq a^2+b^2+c^2+\lambda(ab+bc+ca).$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$.

Avem $p=3=a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}=3\sqrt[3]{r}\Rightarrow r\leq 1$,

$q^2=(ab+bc+ca)^2\geq 3abc(a+b+c)=3rp=9r\Rightarrow q\geq 3\sqrt{r}$,(1).

Inegalitatea $(\lambda+1)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq a^2+b^2+c^2+\lambda(ab+bc+ca)$ se scrie:

$$(\lambda+1)\frac{q}{r}\geq (p^2-2q)+\lambda q \Leftrightarrow (\lambda+1)\frac{q}{r}\geq p^2+(\lambda-2)q \Leftrightarrow (\lambda+1)\frac{q}{r}\geq 9(\lambda-2)q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+1)\frac{q}{r}+(2-\lambda)q\geq 9 \Leftrightarrow q\left[\frac{(\lambda+1)}{r}+(2-\lambda)\right]\geq 9,(2).$$

Din (1) și (2) este sufficient să arătăm că:

$$3\sqrt{r}\left[\frac{(\lambda+1)}{r}+(2-\lambda)\right]\geq 9 \Leftrightarrow \sqrt{r}\left[\frac{(\lambda+1)+r(2-\lambda)}{r}\right]\geq 3 \Leftrightarrow r\left[\frac{(\lambda+1)+r(2-\lambda)}{r}\right]^2\geq 9 \Leftrightarrow$$

$$r^2(\lambda-2)^2-r(2\lambda^2-2\lambda+5)+(\lambda+1)^2\geq 0 \Leftrightarrow (r-1)\left[(\lambda-2)^2r-(\lambda+1)^2\right]\geq 0$$

$\Leftrightarrow (1-r)\left[(\lambda+1)^2-(\lambda-2)^2r\right]\geq 0$, care rezultă din $r\leq 1$ și condiția din ipoteză $\lambda\geq\frac{1}{2}$,

care asigură $(1-r)\geq 0$ și $\left[(\lambda+1)^2-(\lambda-2)^2r\right]\geq 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

Cea mai bună inegalitate de forma celei din enunț se obține pentru $\lambda=\frac{1}{2}$.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then

$$3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 2\left(a^2+b^2+c^2\right)+ab+bc+ca.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim *pqr* -Method.

Notăm $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$.

Avem $p=3=a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}=3\sqrt[3]{r}\Rightarrow r\leq 1$,

$q^2=(ab+bc+ca)^2\geq 3abc(a+b+c)=3rp=9r\Rightarrow q\geq 3\sqrt{r}$,(1).

Inegalitatea $3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 2\left(a^2+b^2+c^2\right)+ab+bc+ca$ se scrie:

$$\frac{3}{2}\frac{q}{r}\geq\left(p^2-2q\right)+\frac{1}{2}q\Leftrightarrow\frac{3q}{r}\geq 2p^2-3q\Leftrightarrow\frac{3q}{r}\geq 2p^2-3q\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{3q}{r}+3q\geq 2p^2\Leftrightarrow 3q\left(\frac{1}{r}+1\right)\geq 2p^2\Leftrightarrow 3q\left(\frac{1}{r}+1\right)\geq 2\cdot 9\Leftrightarrow q\left(\frac{1}{r}+1\right)\geq 6\text{ ,(2).}$$

Din (1) și (2) este sufficient să arătăm că:

$$3\sqrt{r}\left(\frac{1}{r}+1\right)\geq 6\Leftrightarrow\sqrt{r}\left(\frac{1}{r}+1\right)\geq 2\Leftrightarrow r\left(\frac{1}{r}+1\right)^2\geq 2\Leftrightarrow(r-1)^2\geq 0,$$

evident cu egalitate pentru $r=1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Notă.

Pentru $\lambda=1$ se obține Problema propusă de Phan Ngoc Chau în Pure Inequalities 12/2021.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then

$$2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca.$$

Phan Ngoc Chau, Vietnam

Aplicația 47.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\text{a) } a+b+c+\frac{3}{ab+bc+ca}\geq 4.$$

$$\text{b) } a+b+c+\frac{\lambda}{ab+bc+ca}\geq\frac{\lambda+9}{3}\text{, unde } -9\leq\lambda\leq 4.$$

Mathlinks12/2021

Soluție.

a)Folosim *pqr* -Method.

Notăm $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$.

Avem $r=1, p=a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}=3\sqrt[3]{r}=3\Rightarrow p\geq 3$,

$p^2=(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)=3q\Rightarrow p^2\geq 3q$,

$q^2=(ab+bc+ca)^2\geq 3abc(a+b+c)=3rp=3p\geq 9\Rightarrow q\geq 3$,(1).

Inegalitatea $a+b+c+\frac{3}{ab+bc+ca}\geq 4$ se scrie:

$$p+\frac{3}{q}\geq 4\Leftrightarrow p\geq 4-\frac{3}{q}\text{, care resultă din: } p^2\geq 3q\overset{(1)}{\geq}\left(4-\frac{3}{q}\right)^2\text{, unde (1)}\Leftrightarrow 3q\geq\left(4-\frac{3}{q}\right)^2\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 3q^3-16q^2+24q-9\geq 0 \Leftrightarrow (q-3)(3q^2-7q+3)\geq 0$, care rezultă din $q\geq 3$.
Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarca.

Problema se poate dezvolta.
If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $\lambda\leq 4$ then

$$a+b+c+\frac{\lambda}{ab+bc+ca}\geq\frac{\lambda+9}{3}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim pqr-Method.
Notăm $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$.
Avem $r=1$, $p=a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}=3\sqrt[3]{r}=3\Rightarrow p\geq 3$,
$p^2=(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)=3q \Rightarrow p^2\geq 3q$,
$q^2=(ab+bc+ca)^2\geq 3abc(a+b+c)=3rp=3p\geq 9\Rightarrow q\geq 3$,(1).
Inegalitatea $a+b+c+\dfrac{\lambda}{ab+bc+ca}\geq\dfrac{\lambda+9}{3}$ se scrie:

$p+\dfrac{\lambda}{q}\geq\dfrac{\lambda+9}{3}\Leftrightarrow p\geq\dfrac{\lambda+9}{3}-\dfrac{\lambda}{q}$, care resultă din: $p^2\geq 3q\overset{(1)}{\geq}\left(\dfrac{\lambda+9}{3}-\dfrac{\lambda}{q}\right)^2$, unde (1) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3q\geq\left(\dfrac{\lambda+9}{3}-\dfrac{\lambda}{q}\right)^2\Leftrightarrow 27q^3-(\lambda+9)^2q^2+6\lambda(\lambda+9)q-9\lambda^2\geq 0\Leftrightarrow$

$(q-3)\left[27q^2-(\lambda^2+18\lambda)q+3\lambda^2\right]\geq 0$, care rezultă din $q\geq 3$ și $\lambda\leq 4$, care asigură $\left[27q^2-(\lambda^2+18\lambda)q+3\lambda^2\right]\geq 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația 48.

If $a,b>0$, $a+b+c=3$ then

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}+\frac{ab+bc+ca}{abc}\geq\frac{9}{2}.$$

Mathematical Inequalities1/2022, Philip CC

Soluție

Folosim pqr-Method: $a+b+c=p, ab+bc+ca=q, abc=r$.

Cu substituția $(a,b,c)=\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y},\dfrac{1}{z}\right)$ obținem:

$$\sum\frac{1}{a^2+b^2}+\sum\frac{1}{a}=\sum\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}+\sum x=\sum\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}+\sum x\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum xy\right)^2}{\sum(x^2+y^2)}+\sum x=$$

$$=\frac{\left(\sum xy\right)^2}{\sum(x^2+y^2)}+\sum x=\frac{\left(\sum xy\right)^2}{2\sum x^2}+\sum x=\frac{q^2}{2(p^2-2q)}+p.$$

Inegalitatea de demonstrat se scrie: $\dfrac{q^2}{2(p^2-2pq)}+p\geq\dfrac{9}{2}$, (1).

Condiția din ipoteză $a+b+c=3$ se scrie $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3 \Leftrightarrow \frac{\sum xy}{xyz}=3 \Leftrightarrow \frac{q}{r}=3 \Leftrightarrow q=3r$.

Din inegalitatea mediilor avem $pq=(a+b+c)(ab+bc+ca)\geq 3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=9abc=9r$.

Din $pq\geq 9r$ și $q=3r \Rightarrow p\geq 3$.

Din inegalitatea cunoscută $(A+B+C)^2\geq 3(AB+BC+CA)$, pentru $A=bc, B=ca, C=ab$

obținem $q^2=(xy+yz+zx)^2\geq 3xyz(x+y+z)=3pr$.

Din $q^2\geq 3pr$ și $\Rightarrow q^2\geq pq \Rightarrow q\geq p$.

Folosind $p\geq 3, q\geq p$ să arătăm inegalitatea (1) :

$$Ms=\frac{q^2}{2(p^2-2q)}+p\overset{q\geq p}{\geq}\frac{p^2}{2(p^2-2p)}+p=\frac{p}{2(p-2)}+p\overset{(1)}{\geq}\frac{9}{2}=Md,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{p}{2(p-2)}+p\geq\frac{9}{2}\overset{p\geq 3}{\Leftrightarrow}(p-3)^2\geq 0$, cu egalitate pentru $p=3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z \Leftrightarrow a=b=c=1$.

Aplicația 49.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then

$$\left(\frac{1+x}{1-x}+\frac{1+y}{1-y}+\frac{1+z}{1-z}\right)(xy+yz+zx)\leq 2.$$

Mathematical Inequalites 2/2017, Marian Dincă

Soluție.

Folosim pqr -Method .

Notăm $p=x+y+z$, $q=xy+yz+zx$, $r=xyz$.

Avem $p=1, 1=p^2=(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)=3q \Rightarrow q\leq\frac{1}{3}$.

$q^2=(xy+yz+zx)^2\geq 3xyz(x+y+z)=3rp=3r\cdot 1=3r \Rightarrow q^2\geq 3r$.

Calculăm $\frac{1+x}{1-x}+\frac{1+y}{1-y}+\frac{1+z}{1-z}=\sum\frac{1+x}{1-x}=\sum\frac{1+x}{y+z}=\frac{\sum(1+x)(x+y)(x+z)}{\prod(y+z)}=$

$$=\frac{\sum x^3+3xyz+\sum yz(y+z)+\sum x^2+3\sum yz}{\prod(y+z)}=\frac{2-q+3r}{q-r}.$$

Inegalitatea de demonstrat se scrie:

$$\left(\frac{1+x}{1-x}+\frac{1+y}{1-y}+\frac{1+z}{1-z}\right)(xy+yz+zx)\leq 2 \Leftrightarrow \frac{2-q+3r}{q-r}\cdot q\leq 2 \Leftrightarrow q^2\geq 3qr+2r,$$

care rezultă din $q^2\geq 3r$.

Rămâne să arătăm că: $3r\geq 3qr+2r \Leftrightarrow r\geq 3qr \Leftrightarrow 1\geq 3q$, adevărată din $q\leq\frac{1}{3}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Sol2

Calculăm $\frac{1+x}{1-x}+\frac{1+y}{1-y}+\frac{1+z}{1-z}=\sum\frac{1+x}{1-x}=\sum\frac{(x+y+z)+x}{y+z}=\sum\frac{2x+y+z}{y+z}=\sum\left(\frac{2x}{y+z}+1\right)=$

$$=2\sum\frac{x}{y+z}+3.$$

Obținem:

$$Ms=\left(\frac{1+x}{1-x}+\frac{1+y}{1-y}+\frac{1+z}{1-z}\right)(xy+yz+zx)=\left(2\sum\frac{x}{y+z}+3\right)(xy+yz+zx)=$$

$$=2\sum\frac{x(xy+yz+zx)}{y+z}+3(xy+yz+zx)=2\sum\frac{x^2(y+z)+xyz}{y+z}+3\sum yz=$$

$$=2\sum x^2+2\sum\frac{xyz}{y+z}+3\sum yz=2\left[\left(\sum x\right)^2-2\sum yz\right]+2\sum\frac{xyz}{y+z}+3\sum yz=$$

$$=2\left(\sum x\right)^2-\sum yz+\sum\frac{2xyz}{y+z}=2\cdot 1-\sum yz+\sum\frac{2xyz}{y+z}=2-\sum yz+\sum\frac{2xyz}{y+z}.$$

Rămâne să arătăm că:

$2-\sum yz+\sum\frac{2xyz}{y+z}\le 2 \Leftrightarrow \sum\frac{2xyz}{y+z}\le\sum yz$, adevărat din $\frac{1}{y+z}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\Leftrightarrow (y-z)^2\ge 0$.

Obținem: $\sum\frac{2xyz}{y+z}\le\sum 2xyz\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}xyz\sum\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}xyz\cdot 2\sum\frac{1}{x}=\sum yz$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Remarca.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ and $0\le\lambda\le 1$ then

$$\left(\frac{\lambda+x}{1-x}+\frac{\lambda+y}{1-y}+\frac{\lambda+z}{1-z}\right)(xy+yz+zx)\le\lambda+1.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Calculăm $\frac{\lambda+x}{1-x}+\frac{\lambda+y}{1-y}+\frac{\lambda+z}{1-z}=\sum\frac{\lambda+x}{1-x}=\sum\frac{\lambda(x+y+z)+x}{y+z}=\sum\frac{(\lambda+1)x+\lambda(y+z)}{y+z}=$

$$=\sum\left(\frac{(\lambda+1)x}{y+z}+\lambda\right)=(\lambda+1)\sum\frac{x}{y+z}+3\lambda.$$

Obținem:

$$Ms=\left(\frac{\lambda+x}{1-x}+\frac{\lambda+y}{1-y}+\frac{\lambda+z}{1-z}\right)(xy+yz+zx)=\left((\lambda+1)\sum\frac{x}{y+z}+3\lambda\right)(xy+yz+zx)=$$

$$=(\lambda+1)\sum\frac{x(xy+yz+zx)}{y+z}+3\lambda(xy+yz+zx)=(\lambda+1)\sum\frac{x^2(y+z)+xyz}{y+z}+3\lambda\sum yz=$$

$$=(\lambda+1)\sum x^2+(\lambda+1)\sum\frac{xyz}{y+z}+3\lambda\sum yz=(\lambda+1)\left[\left(\sum x\right)^2-2\sum yz\right]+(\lambda+1)\sum\frac{xyz}{y+z}+3\lambda\sum yz=$$

$$=(\lambda+1)\left(\sum x\right)^2-(\lambda-2)\sum yz+\sum\frac{(\lambda+1)xyz}{y+z}=(\lambda+1)\cdot 1+(\lambda-2)\sum yz+\sum\frac{(\lambda+1)xyz}{y+z}=$$

$$=(\lambda+1)+(\lambda-2)\sum yz+\sum\frac{(\lambda+1)xyz}{y+z}.$$

Rămâne să arătăm că:

$\lambda+1+(\lambda-2)\sum yz+\sum\frac{(\lambda+1)xyz}{y+z}\le\lambda+1\Leftrightarrow\sum\frac{(\lambda+1)xyz}{y+z}\le(2-\lambda)\sum yz$, care rezultă din $\frac{1}{y+z}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\Leftrightarrow(y-z)^2\ge0$.

Obținem: $\sum\frac{(\lambda+1)xyz}{y+z}\le\sum(\lambda+1)xyz\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=(\lambda+1)xyz\cdot\frac{1}{2}\sum\frac{1}{x}=$

$=\frac{\lambda+1}{2}\sum yz\overset{\lambda\le1}{\le}(2-\lambda)\sum yz$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Notă.

Pentru $\lambda=1$ se obține Problema propusă de Marian Dincă în Mathematical Inequalites 2/2017.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then

$$\left(\frac{1+x}{1-x}+\frac{1+y}{1-y}+\frac{1+z}{1-z}\right)(xy+yz+zx)\le2.$$

Marian Dincă

Aplicația 50.

O579. If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)+\frac{48}{ab+bc+ca}\ge17.$$

O579,Mathematical Reflections1/2022 An Zhenping, China

Soluție.

We use pqr -Method .

Note $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$, $r=abc$.

We have $p=3, 9=p^2=(a+b+c)^2\ge3(ab+bc+ca)=3q\Rightarrow q\le3$.

$q^2=(ab+bc+ca)^2\ge3abc(a+b+c)=3rp=3r\cdot3=9r\Rightarrow q^2\ge9r$.

$q\le3, q^2\ge9r\Rightarrow r\le1$.

Schur Inequality: $p^3+9r\ge4pq$, $p=3\Rightarrow27+9r\ge12q\Rightarrow9+3r\ge4q$.

Calculation $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=(3-2a)(3-2b)(3-2c)=27-18p+12q-8r=$

$=27-18\cdot3+12q-8r=-27+12q-8r$.

Inequality is written:

$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)+\frac{48}{ab+bc+ca}\ge17\Leftrightarrow-27+12q-8r+\frac{48}{q}\ge17\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow12q-8r+\frac{48}{q}\ge44\Leftrightarrow6q-4r+\frac{24}{q}\ge22\Leftrightarrow6q^2-4qr+24\ge22q\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow6q^2-q(4r+22)+24\ge0\Leftrightarrow3q^2-q(2r+11)+12\ge0\overset{Schur}{\Leftrightarrow}$

$\overset{Schur}{\Leftrightarrow}3q^2-q(2r+11)+4\cdot\frac{4q-3r}{3}\ge0\Leftrightarrow9q^2-q(6r+17)-12r\ge0$,

resulting from $q^2\ge9r$, $r\le1$.

Equality occurs if and only if $a=b=c=1$.

Aplicația 51.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$(a+b)(b+c)(c+a)\ge4(a+b+c-1).$$

Mathematical Olympiads2/2022 ,Elton Papanikolla

Soluție.

We use pqr -Method .

Note $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$, $r=abc$.

We have $r=1, q^2=(ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c)=3rp=3p \Rightarrow q^2 \ge 3p$.

Calculation $(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=pq-r=pq-1$.

Inequality is written:

$(a+b)(b+c)(c+a) \ge 4(a+b+c-1) \Leftrightarrow pq-1 \ge 4(p-1) \Leftrightarrow pq \ge 4p-3$.

From $q^2 \ge 3p$ and $pq \ge 4p-3$ we need $p\cdot\sqrt{3p} \ge 4p-3 \Leftrightarrow 3p^3 \ge (4p-3)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3p^3-16p^2+24p-9 \ge 0 \Leftrightarrow (p-3)(3p^2-7p+3) \ge 0$,

resulting from $p \ge 3, 3p(p-3)+2p+3>0$.

Equality occurs if and only if $a=b=c=1$.

Remark.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $0<\lambda \le 3\sqrt{2}$ then

$$(a+b)(b+c)(c+a) \ge \lambda(a+b+c-3)+8.$$

Marin Chirciu

Soluție.

We use pqr -Method .

Note $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$, $r=abc$.

We have $r=1, q^2=(ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c)=3rp=3p \Rightarrow q^2 \ge 3p$.

Calculation $(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=pq-r=pq-1$.

Inequality is written:

$(a+b)(b+c)(c+a) \ge 4(a+b+c-1) \Leftrightarrow pq-1 \ge \lambda(p-3)+8 \Leftrightarrow pq \ge \lambda(p-3)+9$.

From $q^2 \ge 3p$ and $pq \ge 4p-3$ we need $p\sqrt{3p} \ge \lambda(p-3)+9 \Leftrightarrow 3p^3 \ge \left[\lambda(p-3)+9\right]^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3p^3-\lambda^2p^2+6\lambda(\lambda-3)p-9(\lambda-3)^2 \ge 0 \Leftrightarrow (p-3)\left[3p^2+(9-\lambda^2)p+3(\lambda-3)^2\right] \ge 0$,

resulting from $p \ge 3, 3p^2+(9-\lambda^2)p+3(\lambda-3)^2=3p(p-3)+(18-\lambda^2)p+3(\lambda-3)^2>0$.

Equality occurs if and only if $a=b=c=1$.

Nota

For $\lambda=4$ we obtain Problem proposed by Elton Papanikolla în Mathematical Olympiads 2/2022.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$(a+b)(b+c)(c+a) \ge 4(a+b+c-1).$$

Elton Papanikolla

Aplicația 52.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{y}}-\sqrt{y}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{z}}-\sqrt{z}\right) \ge \frac{8\sqrt{3}}{9}.$$

Matematika2/2022, Amir Sofi

Soluție.

Folosim pqr -Method :

Notăm $p = x+y+z$, $q = xy+yz+zx$, $r = xyz$.

Avem $p=1, q^2 = (xy+yz+zx)^2 \geq 3xyz(x+y+z) = 3rp = 3r \Rightarrow q^2 \geq 3r$.

Folosim

Lema .

If $x,y,z>0$ then

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq \frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx).$$

Lema8/9

Demonstrație.

Avem:

$(x+y)(y+z)(z+x) \geq \frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9\left(\sum yz(y+z)+2xyz\right) \geq \left(\sum yz(y+z)+3xyz\right) \Leftrightarrow \sum yz(y+z) \geq 6xyz \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum x(y-z)^2 \geq 0$, evident cu egalitate pentru $x=y=z$.

Rezultă

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq \frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx) = \frac{8}{9}\cdot p\cdot q = \frac{8}{9}\cdot 1\cdot q \overset{q^2\geq 3}{\geq} \frac{8}{9}\sqrt{3r}.$$

$$Ms = \prod\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right) = \frac{\prod(1-x)}{\sqrt{xyz}} = \frac{\prod(y+z)}{\sqrt{xyz}} \geq \frac{\frac{8}{9}\sqrt{3r}}{\sqrt{r}} = \frac{8\sqrt{3}}{9} = Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$

Aplicația 53.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ and $-1\leq\lambda\leq 3$ then

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 3abc+\lambda(3-ab-bc-ca).$$

IneMath2/20222, Marin Chirciu

Soluție.

Folosim pqr -Method .

Notăm $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$, $r=abc$.

Avem $p=3$, $q=ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{1}{3}p^2 = \frac{1}{3}\cdot 3^2 = 3 \Rightarrow q\leq 3$.

$q^2 = (ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c) = 3rp = 3r\cdot 3 = 9r \Rightarrow q \geq 3\sqrt{r}$.

$3 = a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3\sqrt[3]{r} \Rightarrow r\leq 1$.

Inegalitatea de demonstrat $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 3abc+\lambda(3-ab-bc-ca)$ se scrie:

$$\frac{q}{r} \geq 3r+\lambda(3-q) \Leftrightarrow \frac{q}{r} \geq 3r+3\lambda-\lambda q \Leftrightarrow q\left(\frac{1}{r}+\lambda\right) \geq 3(r+\lambda) \Leftrightarrow q \geq \frac{3r(r+\lambda)}{\lambda r+1}.$$

Deoarece $q\geq 3\sqrt{r}$ este sufficient să arătăm că $3\sqrt{r} \geq \frac{3r(r+\lambda)}{\lambda r+1}$.

Notând $\sqrt{r}=t$ avem $0<t\leq 1$ și rămâne să arătăm că:

$$3t\ge\frac{3t^2\left(t^2+\lambda\right)}{\lambda t^2+1}\Leftrightarrow\lambda t^2+1\ge t\left(t^2+\lambda\right)\Leftrightarrow t^3-\lambda t^2+\lambda t-1\le 0\Leftrightarrow(t-1)\left[t^2+(1-\lambda)t+1\right]\le 0,$$

care rezultă din $t-1\le 0$ și $t^2+(1-\lambda)t+1\ge 0$, adevărată din $\Delta=(1-\lambda)^2-4\le 0\Leftrightarrow -1\le\lambda\le 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația 54.

If $a,b,c>0$ $a^2+b^2+c^2=3$ then

$$a+b+c+\frac{3}{ab+bc+ca}\ge 4.$$

J572,Mathematical Reflections6/2021, An Zhenping, China

Soluție.

Folosim *pqr* -Method.

Notăm $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$, $r=abc$.

Condiția din ipoteză $a^2+b^2+c^2=3$ se scrie $p^2-2q=3\Leftrightarrow q=\dfrac{p^2-3}{2}$.

Inegalitatea de demonstrat $a+b+c+\dfrac{3}{ab+bc+ca}\ge 4$ se scrie $p+\dfrac{3}{q}\ge 4\Leftrightarrow p+\dfrac{3}{\frac{p^2-3}{2}}\ge 4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p^3-4p^2-3p+18\ge 0\Leftrightarrow(p-3)^2(p+2)\ge 0$, evident cu egalitate pentru $p=3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Bibliografie:

1. Marin Chirciu, Inegalități algebrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2014.
2. Daniel Sitaru, RMM 6/2021.
3. 2018 Greece, Team Selection Test.
4. George Apostolopoulos,Greece, RMM-Summer Edition 2022.
5. Neculai Stanciu , RMM 7/2021.
6. Nguyen Viet Hung, Vietnam, Mathematical Reflections,1/2021.
7. Konstantinos Geronikolas, Greece, Pascal Academy, Math Group 5/2021.
8. Imad Zak, Lebanon, Mathematical Inequalities, 7/2021.
9. D.M.Bătinețu-Giurgiu, RMM 4/2021.
10. Boris Colakovic, Pure Inequalities 2/2021.
11. Sladjan Stankovic, Mathematical Inequality7/2021.
12. Nguyen Van Canh, RMM 7/2021.
13. An Zhenping, Mathematical Reflections 1/2022.
14. Amir Sofi, Matematika 2/2022.
15. Elton Papanikolla, Mathematical Olympiads, 2/2022.
16. Marian Dincă, Mathematical Olympiads, 2/2017.
17. Philip CC, Mathematical Inequalities1/2022.
18. Phan Ngoc Chau,Vietnam, Pure Inequalities 12/2021.
19. Hikmat Mammadov,Azerbaijan, RMM 11/2021.
20. Choi Fai Lam, Mathematical Inequalities1/2022.
21. Hoang Duc Hung, Mathematical Inequality 3/2021.
22. Lazaros Zachariadis, RMM1/2021.
23. Marin Chirciu, Inegalități algebrice 2, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2021.

2. A refinement of one inequality from Romanian Mathematical Magazine, Ianuarie, 2022

by Marian Dincă, Bucharest, Romania

ROMANIAN MATHEMATICAL MAGAZINE
www.ssmrmh.ro

Prove that in any triangle ABC with usual notations holds:

$$\frac{ab+bc+ca}{4\sqrt{3}F} \geq \sqrt{\frac{m_a}{s_a}}$$

Proposed by Marius Drăgan, Neculai Stanciu-Romania

Solution 1 by Mohamed Amine Ben Ajiba-Tanger-Morocco, Solution 2 by Soumava Chakraborty-Kolkata-India

Solution by Marian Dinca

$$\frac{m_a}{s_a} = \frac{b^2+c^2}{2bc} \leq \frac{R}{2r}$$

prove the inequality :

$$\frac{ab+bc+ca}{4\sqrt{3}F} \geq \sqrt{\frac{R}{2r}} \qquad (1)$$

$$4F = \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$$

$$\sqrt{\frac{R}{2r}} = \sqrt{\frac{abc}{4F}\cdot\frac{s}{2F}} = \sqrt{\frac{abc}{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}$$

the inequality (1) is equivalent to:

$$ab+bc+ca \geq \sqrt{3abc(a+b+c)} \qquad ,(2)$$

$for: ab = x, ac = y, bc = z$ the inequality (2) is equivalent to:

$$x+y+z \geq \sqrt{3(xy+yz+zx)}, well-known$$

$$(x+y+z)^2 - 3(xy+yz+zx) = \frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right] \geq 0$$

3. Other Solutions for Some Problems from Mathematical Excalibur

By Nela Ciceu and Roxana Mihaela Stanciu

Problem 461. Inside rectangle $ABCD$, there is a circle. Points W, X, Y, Z are on the circle such that lines AW, BX, CY, DZ are tangent to the circle. If $AW=3$, $BX=4$, $CY=5$, then find DZ with proof.

Solution. Let O be the center of circle and let r be the radius. The perpendicular from O to AB meet AB at M and DC at P. Using the Pythagorean theorem (or the power of the point with respect to circle) we have

$$DZ^2-CY^2=(DO^2-r^2)-(CO^2-r^2)=DO^2-CO^2=DP^2-PC^2=AM^2-MB^2=$$
$$=AO^2-BO^2=(AO^2-r^2)-(BO^2-r^2)=AW^2-BX^2=9-16=-7.$$

Hence, $DZ^2=-7+25=18$, so $DZ=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

Problem 462. For all $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$, let $x_{n+1}=x_1$, then prove that

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{(x_k+1)^2}+\frac{x_{k+1}^2}{(x_{k+1}+1)^2}}\geq\frac{n}{\sqrt{2}}.$$

Solution. Let $x, y \geq 0$. Using C-B-S inequality we have

$$\sqrt{2\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{y^2}{(y+1)^2}\right)}-1=\sqrt{\frac{(1+1)\left((y+1)^2+(y(x+1))^2\right)}{(x+1)^2(y+1)^2}}-1\geq\frac{xy+2y+1}{(x+1)(y+1)}-1=$$

$=\dfrac{y-x}{(x+1)(y+1)}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{y+1}$. Writing the inequality from above for the numbers $(x_1,x_2),(x_2,x_3),\ldots,(x_{n-1},x_n),(x_n,x_1)$, after adding up we obtain the desired inequality.

Problem 466. Let k be an integer greater than 1. If $k+2$ integers are chosen among $1,2,3,\ldots,3k$, then there exist two of these integers m,n such that $k<|m-n|<2k$.

Solution. Let the partition $\{1,2,3\},\{4,5,6\},...,\{3k-2,3k-1,3k\}$ formed by k subsets. Chosen $k+2$ numbers, by ''pigeonhole principle'', there exists at least a subset which contains at least two numbers; let be these numbers m,n. Yields that $|m-n|\le 2<2k$. Considering the partition
$\{1,k+2,2k+3\},\{2,k+3,2k+4\},...,\{k-2,2k-1,3k\},\{k-1,2k\},\{k,2k+1\},\{k+1,2k+2\}$ formed by $k+1$ subsets. Let m,n these two numbers which belongs to one of the subsets from above; evidently $|m-n|>k$.

Remark. For the inequality $|m-n|<2k$ are enough $k+1$ numbers.

Problem 468. Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral satisfying $BC>AD$ and $CD>AB$. E, F are points on chords BC, CD respectively and M is the midpoint of EF. If $BE=AD$ and $DF=AB$, then prove that $BM\perp DM$.

Solution. Let $a=AB, b=BC, c=CD, d=DA$. Since the quadrilateral is cyclic, we have $\cos C=-\cos A$ and $a^2+d^2-2ad\cos A=b^2+c^2+2bc\cos A$, (1). Using the the median length formula, cosine law and the relation (1) we obtain:

$$2BM^2+2DM^2=BF^2+d^2-\frac{EF^2}{2}+DE^2+a^2-\frac{EF^2}{2}=b^2+(c-a)^2+2b(c-a)\cos A+$$
$$+c^2+(b-d)^2+2c(b-d)\cos A+a^2+d^2-(c-a)^2-(b-d)^2-2(c-a)(b-d)\cos A=$$
$$=a^2+d^2+b^2+c^2+2(bc-ab+bc-cd-bc+ab+cd-ad)\cos A=$$
$$=a^2+d^2+a^2+d^2-2ad\cos A-2bc\cos A+2(bc-ad)\cos A=$$
$$=2a^2+2d^2-4ad\cos A=2BD^2.$$

Hence, the triangle BDM is right angled in M.

Problem 477. In ΔABC, points D, E are on sides AC, AB respectively. Lines BD, CE intersect at a point P on the bisector of $\angle BAC$.

Prove that quadrilateral $ADPE$ has an inscribed circle if and only if $AB=AC$.

Solution. If the triangle is isosceles with $AB=AC$ yields immediately that $AE=AD$ and $PE=PD$, so $AE+PD=AD+PE$, therefore $ADPE$ has an inscribed circle.

We suppose that $ADPE$ has an inscribed circle.

Theorem (Iosifescu): The quadrilateral $XYZT$ has an inscribed circle if and only if

$$\tan\frac{\angle YXZ}{2}\tan\frac{\angle TZX}{2}=\tan\frac{\angle YZX}{2}\tan\frac{\angle TXZ}{2}.$$

By Iosifescu's theorem we have

$$\tan\frac{\angle EAP}{2}\tan\frac{\angle DPA}{2}=\tan\frac{\angle APE}{2}\tan\frac{\angle PAD}{2}.$$

Hence $\angle EPA = \angle DPA$; from the equality of triangles AEP and ADP we obtain $AE = AD$. By Ceva's theorem and bisector theorem we have $\frac{EB}{c}=\frac{DC}{b} \Rightarrow ED \| BC$ and then $AB = AC$.

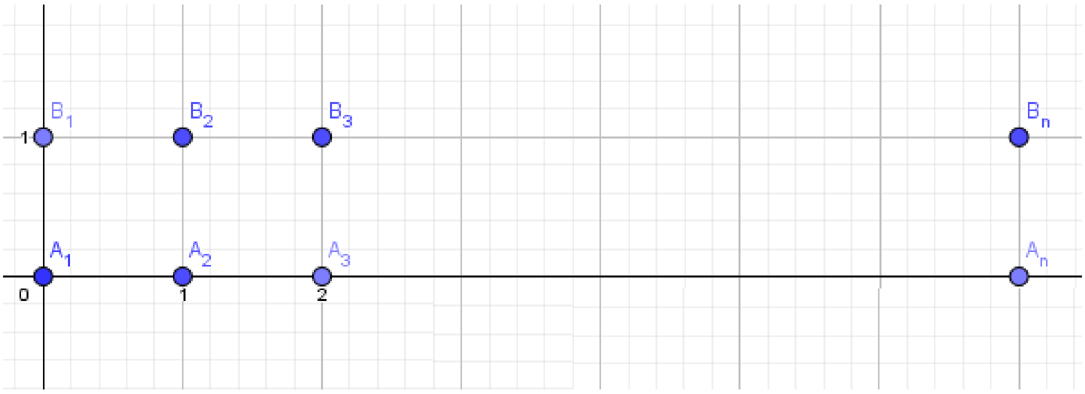
Comment: For Iosifescu's theorem, see [1] with a proof in [2].

[1] Nicuşor Minculete, Characterizations of a Tangential Quadrilateral, Forum Geometricorum, 9 (2009), 113-118.

[2] Martin Josefsson, More Characterizations of a Tangential Quadrilateral, Forum Geometricorum, 11 (2011), 65-82.

4. REȚELE LATICEALE 2 x N (Puncte, Drepte și Segmente) -TEST PUZZLE-

Prof. Stan Ilie[2]



Precizări:

- Rețelele laticeale sunt formate din puncte(noduri) de coordonate întregi.
- Dacă nu e precizat altfel, este vorba de rețeaua laticeală 2 x n, n>1
- Fiecare întrebare își are un răspuns în listă(bijecție)
- Fiecare răspuns corect primește 1 punct
- Dacă se răspunde particularizat, punctajul este 0,n (n maxim 7)
- Răspunsurile se găsesc pe altă pagină(pentru a nu influența, inițial)

Realizați o legătură între fiecare întrebare și fiecare răspuns!

Întrebări:

1. Numărul punctelor unei rețele
2. Numărul dreptelor ce trec prin două noduri
3. Numărul total al segmentelor
4. Numărul segmentelor de lungime întreagă
5. Numărul segmentelor de lungime irațională
6. Numărul maxim al segmentelor coliniare
7. Numărul direcțiilor dreptelor
8. Lungimea totală a segmentelor de lungime întreagă
9. Lungimea totală a segmentelor de lungime irațională
10. Numărul maxim de segmente necongruente ce pot fi alese

[2] Liceul Tehnologic "Anghel Saligny", Roşiorii de Vede, Teleorman, stan_ilie@yahoo.com

Răspunsuri:

A) 2n
B) n(n-1)
C) 2(n-1)
D) n^2+2
E) n(2n-1)
F) $n(n^2+2)/3n^2$
G) n(n-1)/2
H) 2n
I) $2\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\sqrt{i^2+1}$

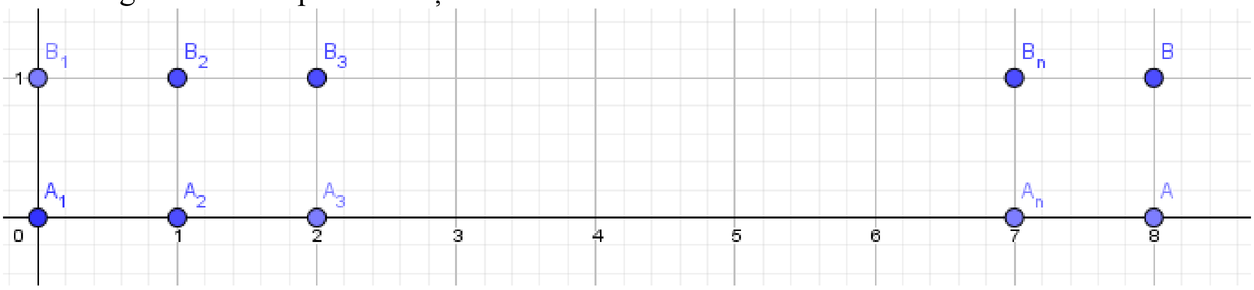
1.	2.	3.	4.	5.
6.	7.	8.	9.	10.

Soluții și discuții:

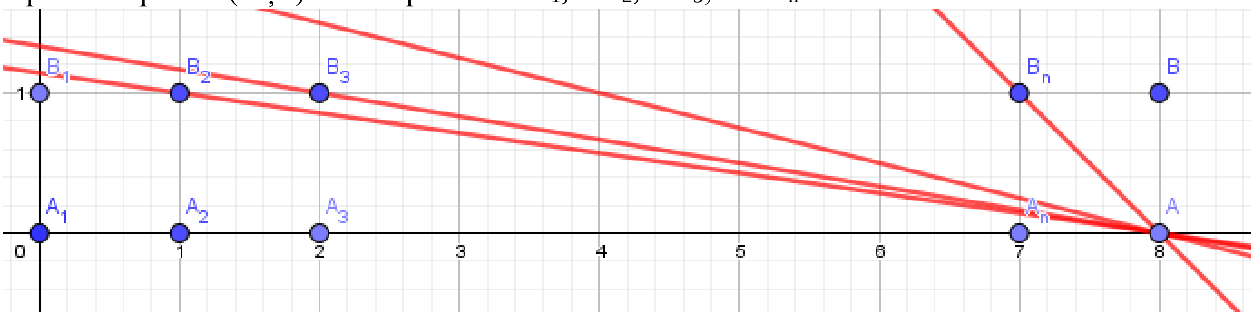
1. A sau I	2. D	3. E	4. G	5. B
6. H	7. A sau I	8. F	9. J	10. C

1. **Numărul punctelor unei rețele 2xn**
   Acesta a fost, într-un mod mascat, punctul din oficiu. L-ați meritat! L-ați meritat?

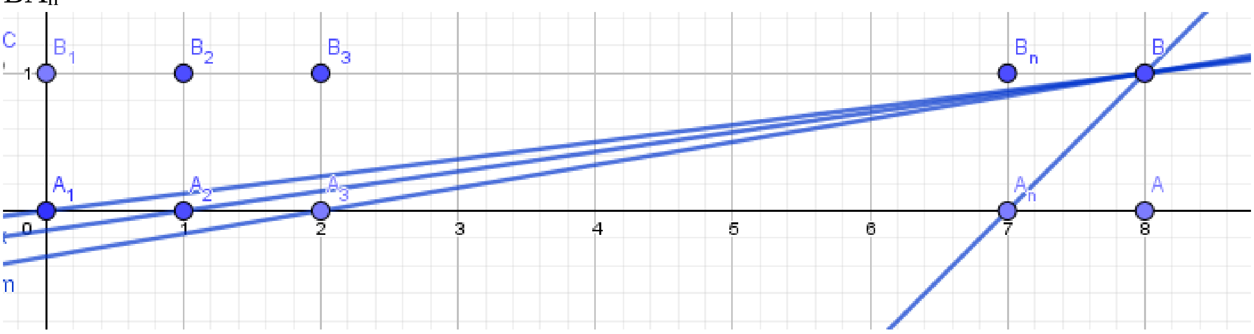
2. **Numărul dreptelor ce trec prin două noduri**
   Poate ați desenat și numărat, pentru n=2, n=3,n=4, n=5,...
   Veți fi găsit 6, 11, 18, 27,...
   Și poate ați observat că soluția este, aproape un pătrat perfect:
   4+2, 9+2, 16+2, 25+2,…
   Adică 2^2+2, 3^2+2, 4^2+2, 5^2+2,...
   De aici se pare că forma generală este n^2+2
   Verificăm dacă se păstrează formula și pentru 2x(n+1):
   Am adăugat încă două puncte: A și B



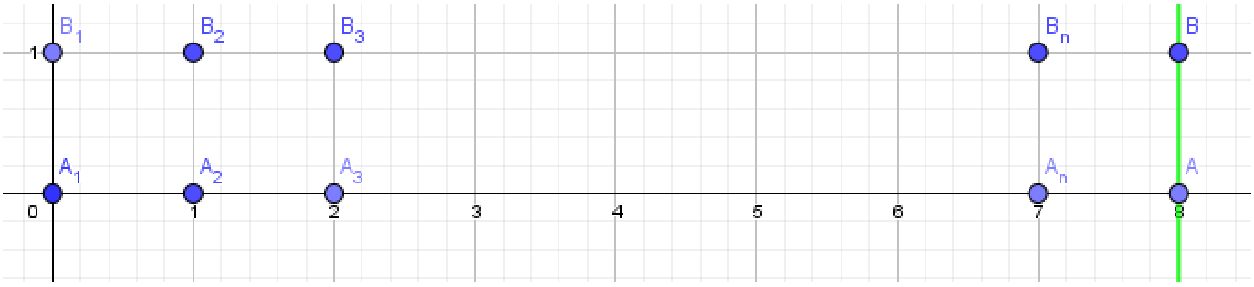
Apar n drepte noi(roșii) ce trec prin A: AB_1, AB_2, AB_3,…AB_n



Și încă n drepte(cele albastre), ce trec prin B: BA_1, BA_2, BA_3,…, BA_n



Plus încă una: AB(verde)



Așadar: n^2+2(anterioare) + n(roșii) +n(albastre) +1(verde)=$n^2+2n+1+2=(n+1)^2+2$
Da!Este! Inducția confirmă Intuiția!
Sau altfel:
Fie nd_i = numărul dreptelor din 2xi
2x1: nd_1=1(altfel scris 2x0+1)
2x2: $nd_2=nd_1+2$(A_1A_2 și B1B_2) + 2x1+1
2x3: $nd_3=nd_2$+2x2+1
2x4: $nd_4=nd_3$+2x3+1
…………………….
2xn: $nd_n=nd_{n-1}$+2x(n-1)+1
- - - - - - - - - - - - - - - - adunând și reducând obținem
$nd_n=2+\sum_{i=1}^{n}[2(i-1)+1]=2+\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=2+2\sum_{i=1}^{n}i-\sum_{i=1}^{n}1=$
$=2+2n(n+1)/2-n=2+n^2+n-n=n^2+2$

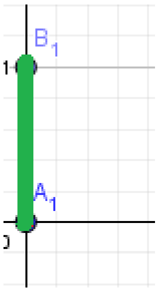
3. **Numărul total al segmentelor**
n=1 => 1
n=2=> 6,
n=3=> 15
N=4=>28 pe numărate(!)
Să privim cu atenție, șirul 1,6,15,28,...
Altfel scris: 1x1, 2x3, 3x5, 4x7,…
Sau : 1(2x1-1), 2(2x2-1), 3(2x3-1), 4(2x4-1),… ce conduce către forma generală: n(2n-1)

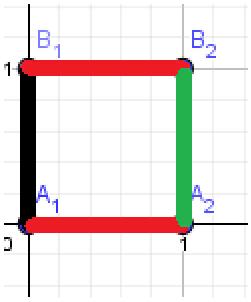
Sau, dacă veți combina(!) punctul din oficiu(cel cu 2n noduri în rețea) cu 2(numărul punctelor necesare trasării unui segment-capetele lui, deci), acceptând (re)cunoașterea noțiunii de combinări, rezultă:
Combinări de $2n$ luate câte două: $C(2n,2)=\frac{(2n)!}{(2n-2)!2!}$=…=n(2n-1)

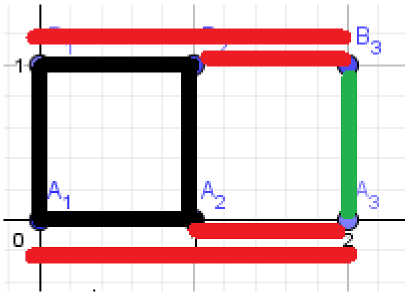
4. Numărul segmentelor de lungime întreagă

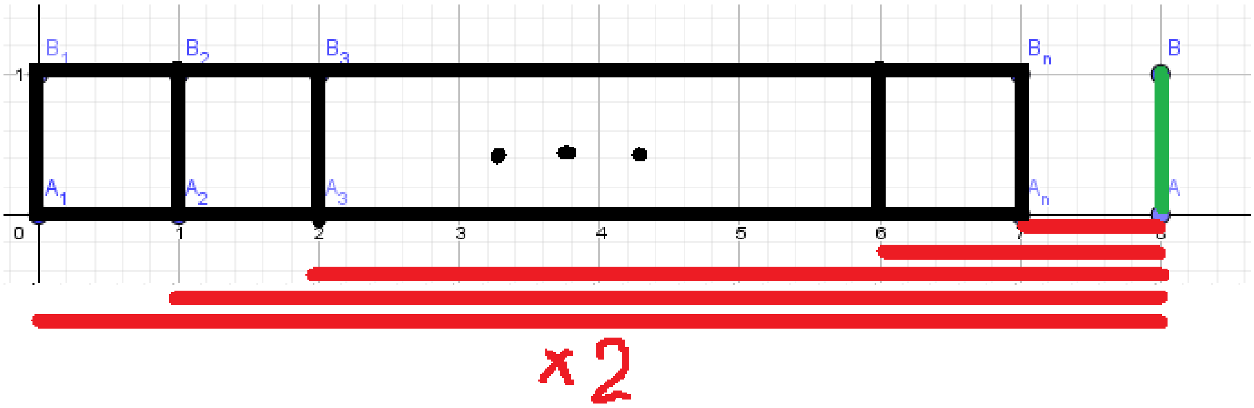
Aceste segmente sunt situate pe fiecare dintre cele două linii. Nu pot conecta cele două linii.

De ce?









Metoda #1:

Pentru n=1, 2, 3, 4,… obținem 1, 4, 9, 16,... segmente întregi.

Ne putem gândi, desigur, la n^2.

Să verificăm, adăugând la $A_1,\ldots A_n, B_1,\ldots,B_n$ încă două noduri(A și B).

Apar noile segmente AA_1, AA_2, $AA_3,\ldots,AA_n$. Adică n segmente.

Încă n corespunzătoare lui B.

Și încă unul pentru AB.

Total 2n+1.

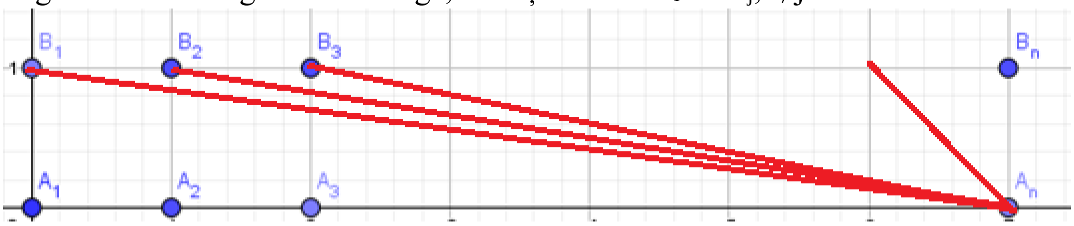
n^2(cele existente de la 2xn)+(2n+1)(noile adăugate)=$(n+1)^2$

Așadar bănuiala noastră, a fost corectă.

Răspuns: n^2

Metoda #2:
Fie ns_i = numărul segmentelor de lungime întreagă din 2xi
2x1: $ns_1=1$(altfel scris 2x0+1)
2x2: $ns_2=ns_1+ 2x1+1$
2x3: $ns_3=ns_2+2x2+1$
2x4: $ns_4=ns_3+2x3+1$
………………………
2xn: $ns_n=ns_{n-1}+2x(n-1)+1$
- - - - - - - - - - - - - - - - - adunând și reducând obținem
$nd_n=\sum_{i=1}^{n-1}(2i+1) = 2\sum_{i=1}^{n-1} i + \sum_{i=1}^{n-1} 1 ==1+2n(n-1)/2+n=n^2-n+n=n^2$

5. **Numărul segmentelor de lungime irațională**
Metoda #1:
Segmentele de lungime neîntreagă, se obțin unind A_i cu B_j, $i\neq j$.

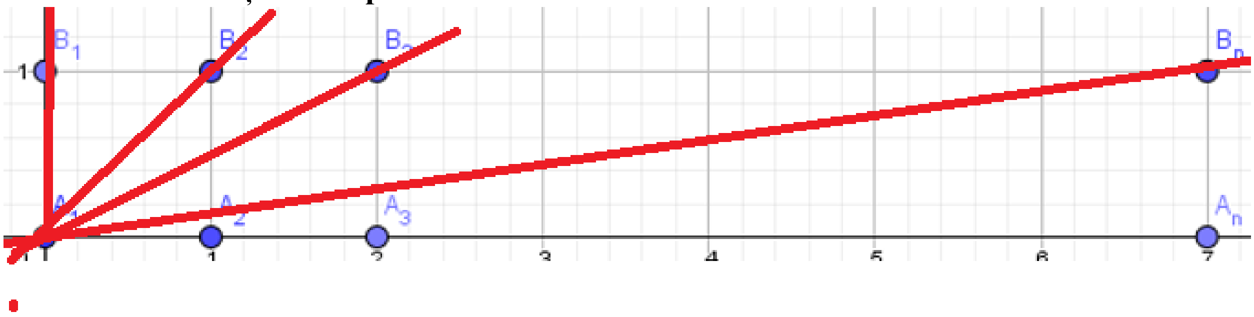


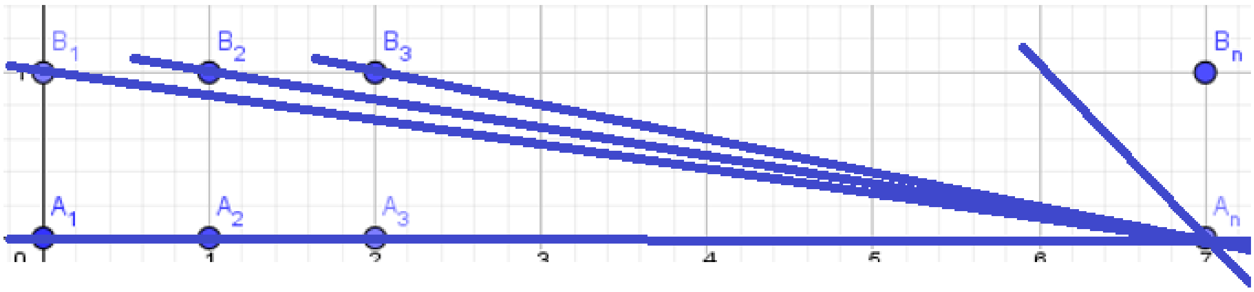
Așadar, fiecare dintre cele n A-uri, se poate uni cu n-1 B-uri.
Răspuns: n(n-1)
De ce nu mai punem problema și invers?

Metoda #2:(idee pentru Metoda #3, de la punctul anterior)
3.-4.=5.

6. **Numărul maxim al segmentelor coliniare**
Segmentele coliniare se găsesc ori pe linia A-urilor, ori pe linia B-urilor.
Sugestie: Analizați șirul 0, 1, 3, 6, 10,...
Combinări de n luate câte două: $C(n,2)=\frac{n!}{(n-2)!2!}=\ldots=n(n-1)/2$

7. Numărul direcțiilor dreptelor

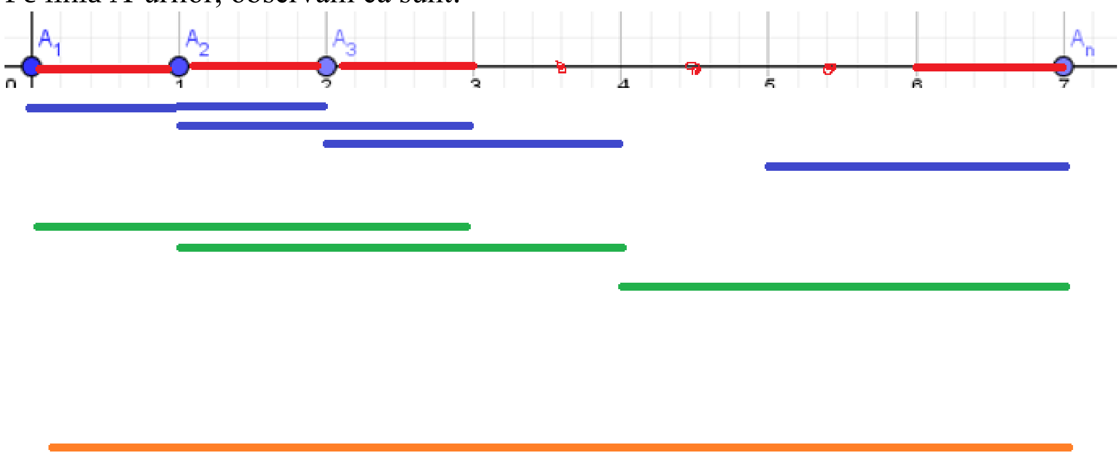




Combinând cele n roșii(ce trec prin A_1 și prin B-uri) cu cele n albastre(ce trec prin A_n și...atenție!), obținem 2n.

8. Lungimea totală a segmentelor de lungime întreagă

Pe linia A-urilor, observăm că sunt:



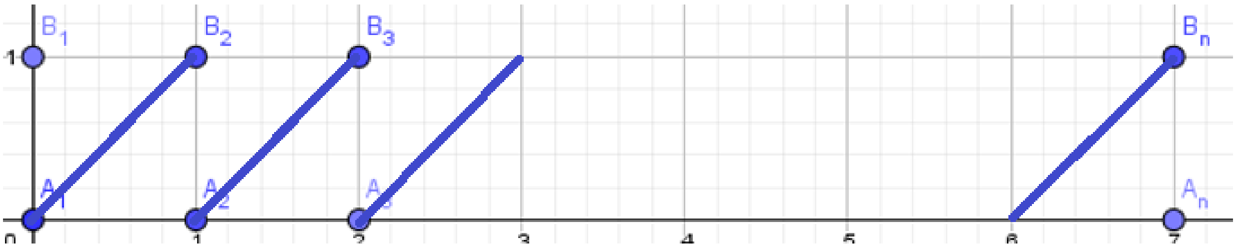
n-1 segmente de lungime 1
n-2 segmente de lungime 2
n-3 segmente de lungime 3
…
1 segment de lungime n-1

$\sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) = n\sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{n-1} i^2$=n(n-1)n/2 – (n-1)n(2n-2+1)/6 = n(n-1)(3n-2n+1)/6 =
= n(n-1)(n+1)/6

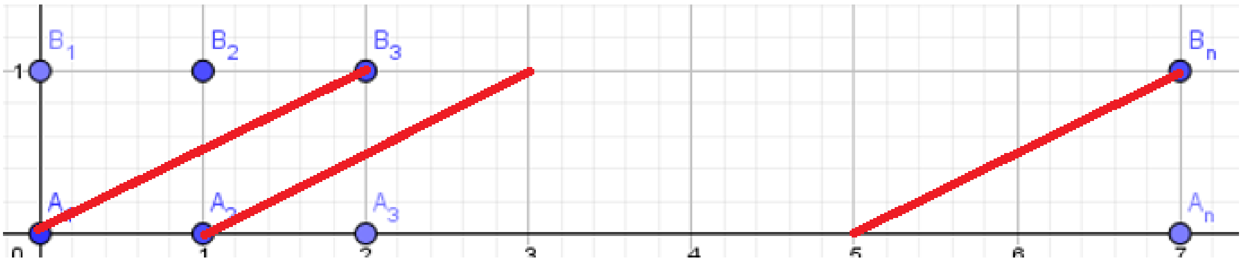
Adunând acest rezultat cu unul similar(pentru lina B-urilor) plus n(pentru A_iB_i), avem:

$n(n-1)(n+1)/6+ n(n-1)(n+1)/6+n=n(n^2-1+3)/3=n(n^2+2)/3$

9. **Lungimea totală a segmentelor de lungime irațională**



Avem n-1 segmente de lungime √2

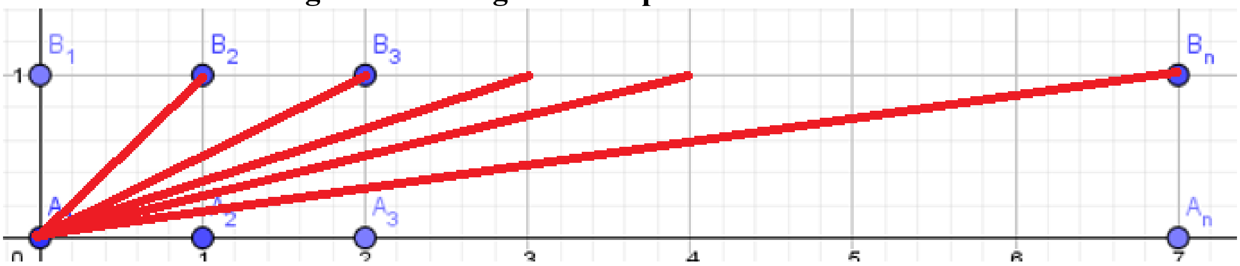


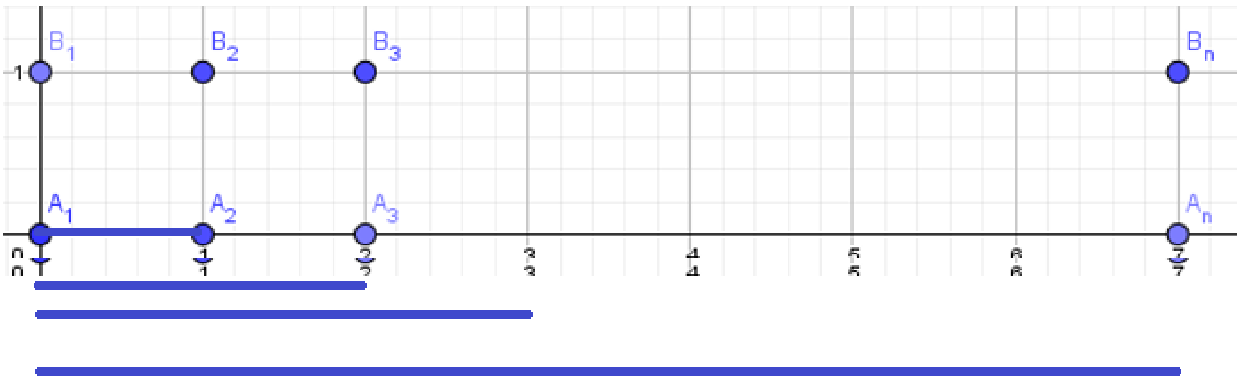
Avem n-2 segmente de lungime √5 samd

Vom dubla desigur suma, datorită simetriei(de exemplu B_1A_2 simetricul lui A_1B_2):

$$2\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\sqrt{i^2+1}$$

10. **Numărul maxim de segmente necongruente ce pot fi alese**





Cele n-1 lungimi iraționale plus cele n-1 lungimi întregi: 2(n-1)

5. Two inequalities from the journal "Sclipirea minții" 2/2021, and a variation

Daniel Văcaru, Pitești, Romania

I select two inequalities from "Sclipirea minții" 2/2021. Here is the chosen inequalities

Q74. Proposed by Florin Rotaru, Focșani, Romania

Prove that in any triangle ABC is true the following inequality: $\frac{abc}{a+b+c} \geq 8r^2 - R^2$.

We have

$$\frac{abc}{a+b+c} \geq 8r^2 - R^2 \Leftrightarrow \frac{4Rrs}{2s} + R^2 \geq 8r^2 \Leftrightarrow 2Rr + R^2 \geq 8r^2.$$

But Euler showed that $R \geq 2r \Leftrightarrow R^2 \geq 4r^2$. It follows that

$$2Rr + R^2 \geq 2 \cdot (2r)\, r + 4r^2 = 8r^2,$$

as desired.

The third inequality is a variation for **Q76**, which belongs to Mr. Mihály Bencze, namely

If $a, b, c > 0$ and $abc = 1$, then prove that

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{(a+b)\,c + a + b + 4} \leq \frac{3}{8}$$

We have

$$\frac{1}{(a+b)\,c + a + b + 4} = \frac{1}{ac + bc + a + b + 4} = \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a} + a + b + 4} \leq \frac{1}{8},$$

, because $a + \frac{1}{a} \geq 2$. We have another two relationship, obtained from

$$a \to b, b \to c, c \to a$$

and $a \to c, b \to a, c \to b$.

Summing these three relationships, we obtain $\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{(a+b)c+a+b+4} \leq \frac{3}{8}$.

Q72. Proposed by Rovsen Pirkuliyev, Sumgait Azerbaidjan

If ABC is a triangle with usual notation, then prove that

$AH^4 + BH^4 + CH^4 \geq 3R^4$

We have

$AH^4 + BH^4 + CH^4 \geq \frac{1}{3}(AH^2 + BH^2 + CH^2)^2 = \frac{1}{3}(4R^2\cos^2 A + 4R^2\cos^2 B + 4R^2\cos^2 C)^2$

$= \frac{1}{3}\left(4R^2(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)\right)^2$

But $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4} \Longrightarrow 4R^2(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) \geq 3R^2$.

We obtain

$AH^4 + BH^4 + CH^4 \geq \frac{1}{3}(3R^2)^2 = 3R^4$.

6. Aplicaţii ale unei inegalităţi algebrice în trigonometrie

de Gheorghe Ghiță,Buzău

Articolul prezintă noi inegalităţi algebrice, dar şi aplicaţii ale acestora în triunghi.

Fie $a, b, c, x, y, z > 0$ şi $\propto \geq 0$. Să se demonstreze ingalitatea:

$$\frac{x^{\propto+2}}{a^{\propto}} + \frac{y^{\propto+2}}{b^{\propto}} + \frac{z^{\propto+2}}{c^{\propto}} \geq \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}\left(\frac{x^{\propto}}{a^{\propto-2}} + \frac{y^{\propto}}{b^{\propto-2}} + \frac{z^{\propto}}{c^{\propto-2}}\right) \quad (1)$$

Gheorghe Ghiţă,Buzău

Soluție. Avem: (1)$\Leftrightarrow \left(\frac{x^{\propto+2}}{a^{\propto}} + \frac{y^{\propto+2}}{b^{\propto}} + \frac{z^{\propto+2}}{c^{\propto}}\right)(a^2+b^2+c^2) \geq \left(\frac{x^{\propto}}{a^{\propto-2}} + \frac{y^{\propto}}{b^{\propto-2}} + \frac{z^{\propto}}{c^{\propto-2}}\right)(x^2+y^2+z^2) \Leftrightarrow \frac{x^{\propto+2}}{a^{\propto-2}} + \frac{b^2x^{\propto+2}}{a^{\propto}} + \frac{c^2x^{\propto+2}}{a^{\propto}} + \frac{a^2y^{\propto+2}}{b^{\propto}} + \frac{y^{\propto+2}}{b^{\propto-2}} + \frac{c^2y^{\propto+2}}{b^{\propto}} + \frac{a^2z^{\propto+2}}{c^{\propto}} + \frac{b^2z^{\propto+2}}{c^{\propto}} + \frac{z^{\propto+2}}{c^{\propto-2}} \geq \frac{x^{\propto+2}}{a^{\propto-2}} + \frac{x^{\propto}y^2}{a^{\propto-2}} + \frac{x^{\propto}z^2}{a^{\propto-2}} + \frac{x^2y^{\propto}}{b^{\propto-2}} + \frac{y^{\propto+2}}{b^{\propto-2}} + \frac{y^{\propto}z^2}{b^{\propto-2}} + \frac{x^2z^{\propto}}{c^{\propto-2}} + \frac{y^2z^{\propto}}{c^{\propto-2}} + \frac{z^{\propto+2}}{c^{\propto-2}} \Leftrightarrow \frac{b^2x^{\propto}}{a^{\propto-2}}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) - \frac{a^2y^{\propto}}{b^{\propto-2}}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) + \frac{c^2y^{\propto}}{b^{\propto-2}}\left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) - \frac{b^2z^{\propto}}{c^{\propto-2}}\left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) + \frac{a^2z^{\propto}}{c^{\propto-2}}\left(\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2}\right) - \frac{c^2x^{\propto}}{a^{\propto-2}}\left(\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{b^2x^{\propto}}{a^{\propto-2}} - \frac{a^2y^{\propto}}{b^{\propto-2}}\right) + \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)\left(\frac{c^2y^{\propto}}{b^{\propto-2}} - \frac{b^2z^{\propto}}{c^{\propto-2}}\right) + \left(\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2}\right)\left(\frac{a^2z^{\propto}}{c^{\propto-2}} - \frac{c^2x^{\propto}}{a^{\propto-2}}\right) \geq 0 \Leftrightarrow a^2b^2\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right)\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{\propto} - \left(\frac{y}{b}\right)^{\propto}\right) + b^2c^2\left(\left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2\right)\left(\left(\frac{y}{b}\right)^{\propto} - \left(\frac{z}{c}\right)^{\propto}\right) + c^2a^2\left(\left(\frac{z}{c}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)\left(\left(\frac{z}{c}\right)^{\propto} - \left(\frac{x}{a}\right)^{\propto}\right) \geq 0$, adevărată, pentru că funcția $f: (0, \infty) \to (0, \infty), f(t) = t^r, r \geq 0$ este crescătoare($pentru$ că, $dacă$: $0 < u \leq v \Rightarrow u^2 \leq v^2, u^{\propto} \leq v^{\propto} \Rightarrow (u^2 - v^2)(u^{\propto} - v^{\propto}) \geq 0$), şi atunci toate cele trei produse sunt pozitive. Egalitatea are loc $\Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

Totodată, în triunghiul ABC au loc inegalităţile:

$$\sum ab \geq 18Rr \geq 4\sqrt{3}S \geq 36r^2, \quad (2)$$

cu notaţiile uzuale în triunghi.

Utlizând $\sum ab = p^2 + r^2 + 4Rr$, pentru inegalitate avem: $\sum ab \geq 18Rr \Leftrightarrow p^2 + r^2 + 4Rr \geq 18Rr \Leftrightarrow p^2 \geq 14Rr - r^2$, din (4) $\Rightarrow p^2 \geq 16Rr - 5r^2$, şi rămâne de arătat că $16Rr - 5r^2 \geq 14Rr - r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r$, adică inegalitatea lui Euler. Celelalte două inegalităţi rezultă din inegalităţile Mitrinovic:

$$3\sqrt{3}r \leq p \leq \frac{3\sqrt{3}R}{2}. \quad (3)$$

Din şirul de inegalităţi (2) rezultă inegalităţile: Ionescu-Weitzenböck $\sum a^2 \geq 4\sqrt{3}S$ şi Neuberg $\sum a^2 \geq 36r^2$, deoarece $\sum a^2 \geq \sum ab$. Inegalitatea $\sum a^2 \geq 18Rr$ rezultă şi din: $\sum a^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr \geq 18Rr \Leftrightarrow p^2 \geq 13Rr + r^2$, care rezultă din (4): $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$, deoarece, $16Rr - 5r^2 \geq 13Rr + r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r$.
Inegalitatea dintre al treilea şi al cincilea termen: $18Rr \geq 36r^2$, este inegalitatea lui Euler.

Observația1. Pentru $\propto = 1 \Rightarrow \quad \sum \frac{x^3}{a} \ge \frac{\sum x^2}{\sum a^2} \sum ax, \forall a, x > 0.$ (4)

Aplicații.

1) $$\Delta ABC \Rightarrow \sum \frac{a^3}{a+nb} \ge \frac{18Rr}{n+1}, \forall n \ge 0.$$

Din (5)$\Rightarrow \sum \frac{a^3}{a+nb} \ge \frac{\sum a^2}{\sum(a+nb)^2} \sum a(a+nb) = \frac{\sum a^2}{\sum a^2 + 2n \sum ab + n^2 \sum b^2} \sum (a^2 + nab) =$
$\frac{\sum a^2}{(n^2+1)\sum a^2 + 2n \sum ab} (\sum a^2 + n \sum ab) \overset{(*)}{\gtrless} \frac{\sum a^2}{(n^2+1)\sum a^2 + 2n \sum a^2} (\sum ab + n \sum ab) = \frac{(n+1)\sum ab}{(n+1)^2} = \frac{\sum ab}{n+1} \ge \frac{18Rr}{n+1}$, unde $(*)$: $x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + yz + zx, \forall x, y, z > 0$; rezultă: $\sum \frac{a^3}{a+nb} \ge \frac{18Rr}{n+1}, \forall n \ge 0$, care este o dezvoltare de la $n \ge \frac{2}{7}$ la $n \ge 0$ a aceleeași inegalități din articolul, "3. In legătură cu problema L:739 Sclipirea Minții-24"- Revista Electronică Mateinfo/martie/2020 de Marin Chirciu,Pitești;

Notă.Pentru $n = 0 \Rightarrow \sum \frac{a^3}{a} = \sum a^2 \ge 18Rr$; pentru n = 1$\Rightarrow \sum \frac{a^3}{a+b} \ge 9Rr$,iar pentru n = 3 $\Rightarrow \sum \frac{a^3}{a+3b} \ge \frac{9Rr}{2}$ și atunci $\sum \frac{a^3}{a+b} \sum \frac{a^3}{a+3b} \ge \frac{81R^2r^2}{2} \overset{(3)}{\gtrless} \frac{81\frac{4p^2}{27}r^2}{2} = 6p^2r^2 = 6S^2 \Rightarrow \sum \frac{a^3}{a+b} \sum \frac{a^3}{a+3b} \ge 6S^2$, adică problema L:739/Sclipirea Minții-24/ propusă de D. M. Bătinețu-Giurgiu, București și Neculai Stanciu, Buzău;

2) $$\Delta ABC \Rightarrow \sum \frac{r_a^3}{r_b + r_c} \ge \frac{p^2}{2}.$$

Gheorghe Ghiță,Buzău

Din (4) rezultă $\sum \frac{r_a^3}{r_b+r_c} \ge \frac{\sum r_a^2}{\sum (r_b+r_c)^2} \sum r_a(r_b + r_c) = \frac{\sum r_a^2}{\sum r_b^2 + 2\sum r_b r_c + \sum r_c^2} \sum \frac{S}{p-a}\left(\frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c}\right)$
$= \frac{\sum r_a^2}{2\sum r_a^2 + 2\sum r_a r_b} \sum \frac{aS^2}{(p-a)(p-b)(p-c)} \overset{(*)}{\gtrless} \frac{\sum r_a^2}{4\sum r_a^2} \sum \frac{paS^2}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{p}{4} \sum a = \frac{p^2}{2}$, unde $(*)$: $x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + yz + zx, \forall x, y, z > 0.$

Observația2.

Pentru $\propto = 2n + 1$ aplicând repetat inegalitatea (4) $\Rightarrow \sum \frac{x^{2n+3}}{a^{2n+1}} \ge \frac{\sum x^2}{\sum a^2} \sum \frac{x^{2n+1}}{a^{2n-1}} \ge \left(\frac{\sum x^2}{\sum a^2}\right)^2 \sum \frac{x^{2n-1}}{a^{2n-3}} \ge \ldots \ge \left(\frac{\sum x^2}{\sum a^2}\right)^n \sum \frac{x^3}{a} \overset{(5)}{\gtrless} \left(\frac{\sum x^2}{\sum a^2}\right)^{n+1} \sum ax$, rezultă:

$$\sum \frac{x^{2n+3}}{a^{2n+1}} \ge \sum ax \left(\frac{\sum x^2}{\sum a^2}\right)^{n+1}. \qquad (5)$$

Gheorghe Ghiță,Buzău

Aplicații

1) $$\Delta ABC \Rightarrow \quad \sum \frac{a^{2n+3}}{(a+b)^{2n+1}} \ge \frac{9Rr}{4^n}, n \in N.$$

Gheorghe Ghiță,Buzău

Soluţie. Din(5) $\Rightarrow \sum \frac{a^{2n+3}}{(a+b)^{2n+1}} \geq \sum a(a+b)\left(\frac{\sum a^2}{\sum(b+c)^2}\right)^{n+1}$; $\sum a(a+b) = \sum a^2 + \sum ab =$ $(2p^2-2r^2-8Rr)+(p^2+r^2+4Rr) = 3p^2 - r^2 - 4Rr \geq 36Rr \Leftrightarrow 3p^2 \geq 40Rr + r^2$, adevărată, deoarece, $\overset{Gerretsen}{\Rightarrow}$ $3p^2 \geq 48Rr - 15r^2$, şi rămâne de arătat că $48Rr - 15r^2 \geq 40Rr + r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r$(Euler); $\frac{\sum a^2}{\sum(b+c)^2} = \frac{\sum a^2}{2\sum a^2 + 2\sum bc} \overset{(*)}{\geq} \frac{\sum a^2}{2\sum a^2+2\sum a^2} = \frac{1}{4}$, unde $(*)$: $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx, \forall x,y,z>0$; rezultă $\sum \frac{a^{2n+3}}{(a+b)^{2n+1}} \geq 36Rr\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = \frac{9Rr}{4^n}$. Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral.

2) $$\Delta ABC \Rightarrow \sum \frac{(a+b)^{2n+3}}{a^{2n+1}} \geq \frac{3^2 \cdot 2^{3n+5} r^{n+2}}{R^n}, n \in N.$$

Gheorghe Ghiţă,Buzău

Soluţie. Utilizând (5) avem $\sum \frac{(a+b)^{2n+3}}{a^{2n+1}} \geq \sum a(a+b)\left(\frac{\sum(a+b)^2}{\sum a^2}\right)^{n+1}$; $\sum a(a+b) = 3p^2 - r^2 - 4Rr \geq 36Rr$; $\frac{\sum(a+b)^2}{\sum a^2} = \frac{\sum(a+b)(a+b)}{\sum a^2} = \frac{\sum a(a+b)+\sum b(a+b)}{\sum a^2} = \frac{2\sum a(a+b)}{\sum a^2} \geq \frac{72Rr}{\sum a^2} \overset{Leibniz}{\geq} \frac{72Rr}{9R^2} = \frac{8r}{R}$; $\sum \frac{(a+b)^{2n+3}}{a^{2n+1}} \geq$ $36Rr\left(\frac{8r}{R}\right)^{n+1} = \frac{9 \cdot 2^{3n+5} r^{n+2}}{R^n}$. Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral.

3) $$\Delta ABC \Rightarrow \sum \frac{(p-a)^{2n+3}}{a^{2n+1}} \geq \frac{9r^2}{2^{2n+1}}, n \in N.$$

Gheorghe Ghiţă,Buzău

Soluţie. $\sum \frac{(p-a)^{2n+3}}{a^{2n+1}} \geq \sum a(p-a)\left(\frac{\sum(p-a)^2}{\sum a^2}\right)^{n+1}$; $\sum a(p-a) = p\sum a - \sum a^2 = 2p^2 - (2p^2 - 2r^2 - 8Rr) =$ $2r(4R+r) \geq 18r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r$ (Euler); $\frac{\sum(p-a)^2}{\sum a^2} = \frac{\sum(p^2-2pa+a^2)}{2(p^2-r^2-4Rr)} = \frac{3p^2-4p^2+\sum a^2}{2(p^2-r^2-4Rr)} = \frac{p^2-2r^2-8Rr}{2(p^2-r^2-4Rr)} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow p^2 \geq$ $12Rr + 3r^2$; din $\overset{Gerretsen}{\Rightarrow}$ $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$, şi atunci, rămâne ca $16Rr - 5r^2 \geq 12Rr + 3r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r$, inegalitatea lui Euler; rezultă $\sum \frac{(p-a)^{2n+3}}{a^{2n+1}} \geq 18r^2\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = \frac{9r^2}{2^{2n+1}}$. Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral.

4) $$\Delta ABC \Rightarrow \sum \frac{a^{2n+3}}{(p-a)^{2n+1}} \geq \frac{9 \cdot 2^{3n+4} r^{n+3}}{R^{n+1}}, n \in N.$$

Gheorghe Ghiţă,Buzău

Soluţie. Avem $\sum \frac{a^{2n+3}}{(p-a)^{2n+1}} \geq \sum a(p-a)\left(\frac{\sum a^2}{\sum(p-a)^2}\right)^{n+1}$; $\sum a(p-a) = 2r(4R+r) \geq 18r^2$; $\frac{\sum a^2}{\sum(p-a)^2} =$ $\frac{2(p^2-r^2-4Rr)}{3p^2-4p^2+\sum a^2} = \frac{2(p^2-r^2-4Rr)}{p^2-2r^2-8Rr} \geq \frac{8r}{R} \Leftrightarrow p^2(R-4r) + 31Rr^2 - 4R^2r + 8r^3 \geq 0$: a) dacă R ≥ 4r ⇒MS $\overset{Gerretsen}{\geq}$ $(16Rr - 5r^2)(R-4r) + 31Rr^2 - 4R^2r + 8r^3 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(6R-7r) \geq 0$, adevărată din inegalitatea lui Euler, b) dacă $R < 4r \Rightarrow$ - MS $\overset{Gerretsen}{\leq}$ $(4R^2+4Rr+3r^2)(4r-R) - 31Rr^2 + 4R^2r - 8r^3 \leq 0$ $\Leftrightarrow (R-2r)(2R(R-2r)+r^2) \geq 0$, adevărată din inegalitatea lui Euler ; $\sum \frac{a^{2n+3}}{(p-a)^{2n+1}} \geq$ $18r^2\left(\frac{8r}{R}\right)^{n+1} = \frac{9 \cdot 2^{3n+4} r^{n+3}}{R^{n+1}}$. Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral.

5) $$\Delta ABC \Rightarrow \sum \frac{{r_a}^{2n+3}}{a^{2n+1}} \geq \frac{(\sqrt{3})^{2n+5} r^{n+2}}{2^{n+1} R^n}, n \in N,$$

unde r_a, r_b, r_c sunt razele cercurilor exînscrise.

Gheorghe Ghiţă,Buzău

Soluţie. $\sum \frac{{r_a}^{2n+3}}{a^{2n+1}} \geq \sum a r_a \left(\frac{\sum r_a^2}{\sum a^2}\right)^{n+1}$; $\sum a r_a = \sum \frac{aS}{p-a} = \text{pr}\frac{2(2R-r)}{r} = 2p(2R-r) \overset{(3)}{\gtrapprox} 6\sqrt{3}r(2R-r) \geq 9\sqrt{3}Rr$ $\Leftrightarrow R \geq 2r$, inegalitatea lui Euler; $\frac{\sum r_a^2}{\sum a^2} = \frac{16R^2+8Rr+r^2-2p^2}{2p^2-2r^2-8Rr} \geq \frac{3r}{2R} \Leftrightarrow p^2(3r+2R) \leq 16R^3+8R^2r+13Rr^2+3r^3$, adevărată, deoarece $\overset{Gerretsen}{\Rightarrow}$ $p^2(3r+2R) \leq (4R^2+4Rr+3r^2)(3r+2R) = 8R^3+20R^2r+18Rr^2+9r^3$, şi rămâne de demonstrat că $8R^3+20R^2r+18Rr^2+9r^3 \leq 16R^3+8R^2r+13Rr^2+3r^3 \Leftrightarrow (R-2r)(8R^2+4Rr+3r^2) \geq 0$, adevărată , fiind inegalitatea lui Euler;rezultă $\sum \frac{{r_a}^{2n+3}}{a^{2n+1}} \geq 9\sqrt{3}Rr\left(\frac{3r}{2R}\right)^{n+1} = \frac{(\sqrt{3})^{2n+5}r^{n+2}}{2^{n+1}R^n}$. Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral.

6) $$\Delta ABC \Rightarrow \sum \frac{a^{2n+3}}{{r_a}^{2n+1}} \geq \frac{2^{2n+2}r^{n+2}}{(\sqrt{3})^{2n-3}R^n}, n \in N,$$

unde r_a, r_b, r_c sunt razele cercurilor exînscrise.

Gheorghe Ghiţă,Buzău

Soluţie. $\sum \frac{a^{2n+3}}{{r_a}^{2n+1}} \geq \sum a r_a \left(\frac{\sum a^2}{\sum r_a^2}\right)^{n+1}$; $\sum a r_a \geq 9\sqrt{3}Rr$; $\frac{\sum a^2}{\sum r_a^2} \overset{(*)}{\gtrapprox} \frac{\sum ab}{16R^2+8Rr+r^2-2p^2} \overset{(2)}{\gtrapprox} \frac{18Rr}{16R^2+8Rr+r^2-2p^2} \overset{Gerretsen}{\gtrapprox}$ $\frac{18Rr}{16R^2+8Rr+r^2-2(16Rr-5r^2)} = \frac{18Rr}{16R^2-24Rr+11r^2} \geq \frac{8r}{3R} \Leftrightarrow 37R^2-96Rr+44r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(37R-22r) \geq 0$, (inegalitatea lui Euler); rezultă $\sum \frac{{r_a}^{2n+3}}{a^{2n+1}} \geq 9\sqrt{3}Rr\left(\frac{8r}{3R}\right)^{n+1} = \frac{2^{2n+2}r^{n+2}}{(\sqrt{3})^{2n-3}R^n}$. Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral.

7) $$\Delta ABC \Rightarrow \Delta ABC \Rightarrow \sum \frac{a^{2n+3}}{{h_a}^{2n+1}} \geq \frac{2^{3n+4}r^{n+3}}{(\sqrt{3})^{2n-3}R^{n+1}}, n \in N,$$

unde h_a, h_b, h_c sunt înăţimile triunghiului ABC.

Gheorghe Ghiţă,Buzău

Soluţie. $\sum \frac{a^{2n+3}}{{h_a}^{2n+1}} \geq \sum a h_a \left(\frac{\sum a^2}{\sum h_a^2}\right)^{n+1}$; $\sum a h_a = \sum 2S = 6pr \overset{(3)}{\gtrapprox} 18\sqrt{3}r^2$; $\frac{\sum a^2}{\sum h_a^2} \overset{(*)}{\gtrapprox} \frac{\sum ab}{\sum \frac{4S^2}{a^2}} \overset{(2)}{\gtrapprox} \frac{18Rr}{4p^2r^2\sum\frac{1}{a^2}} \overset{Leuenberger}{\gtrapprox}$ $\frac{18Rr}{4p^2r^2\frac{1}{4r^2}} = \frac{18Rr}{p^2} \overset{(3)}{\gtrapprox} \frac{8r}{3R}$; $\sum \frac{a^{2n+2}}{{h_a}^{2n}} \geq 18\sqrt{3}r^2\left(\frac{8r}{3R}\right)^{n+1} = \frac{2^{3n+4}r^{n+3}}{(\sqrt{3})^{2n-3}R^{n+1}}$, unde$(*)$: $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx, \forall x,y,z \geq 0$. Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral.

8) $$\Delta ABC \Rightarrow \sum \frac{{h_a}^{2n+3}}{a^{2n+1}} \geq \frac{2^{2n+3}(\sqrt{3})^{2n+7}r^{4n+6}}{R^{4n+4}}, n \in N,$$

unde h_a, h_b, h_c sunt înălţimile triunghiului ABC.

Gheorghe Ghiţă,Buzău

Soluţie. $\sum \frac{h_a{}^{2n+3}}{a^{2n+1}} \geq \sum a h_a \left(\frac{\sum h_a^2}{\sum a^2}\right)^{n+1}$; $\sum a h_a = \sum 2S = 6pr \overset{(3)}{\gtreqless} 18\sqrt{3}r^2$; $\frac{\sum h_a^2}{\sum a^2} = \frac{\sum \frac{4S^2}{a^2}}{\sum a^2} = \frac{4S^2 \sum \frac{1}{a^2}}{\sum a^2} = \frac{4S^2 \sum \frac{1}{a^2}}{\sum a^2}$ $\overset{Bergström}{\gtreqless} \frac{4S^2 \frac{(\sum 1)^2}{\sum a^2}}{\sum a^2} = \frac{36S^2}{(\sum a^2)^2} \overset{Leibniz}{\gtreqless} \frac{36S^2}{81R^4} = \frac{4p^2r^2}{9R^4} \overset{(3)}{\gtreqless} \frac{12r^4}{R^4}$; $\sum \frac{h_a{}^{2n+2}}{a^{2n}} \geq 18\sqrt{3}r^2 \left(\frac{12r^4}{R^4}\right)^{n+1} = \frac{2^{2n+3}(\sqrt{3})^{2n+7} r^{4n+6}}{R^{4n+4}}$.
Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral.

9) $$\Delta ABC \Rightarrow \sum \frac{r_a^{2n+3}}{(r_b+r_c)^{2n+1}} \geq \frac{27r^2}{2^{2n+1}}, n \in N,$$

unde r_a, r_b, r_c sunt razele cercurilor exînscrise.

Gheorghe Ghiţă,Buzău

Soluţie. $\sum \frac{r_a^{2n+3}}{(r_b+r_c)^{2n+1}} \geq \sum r_a(r_b + r_c) \left(\frac{\sum r_a^2}{\sum (r_b+r_c)^2}\right)^{n+1}$; $\sum r_a(r_b + r_c) = 2\sum r_a r_b = 2p^2 \overset{(3)}{\gtreqless} 54r^2$; $\frac{\sum r_a^2}{\sum (r_b+r_c)^2} = \frac{\sum r_a^2}{2\sum r_a^2 + 2\sum r_a r_b} \overset{(*)}{\gtreqless} \frac{\sum r_a^2}{4\sum r_a^2} = \frac{1}{4}$; unde $(*)$: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx, \forall x, y, z > 0$; $\sum \frac{r_a^{2n+3}}{(r_b+r_c)^{2n+1}} \geq 54r^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = \frac{27r^2}{2^{2n+1}}$. Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral.

10) $$ABC \Rightarrow \sum \frac{(r_a+r_b)^{2n+3}}{r_c^{2n+1}} \geq \frac{3^3 \cdot 2^{5n+6} r^{3n+5}}{R^{3n+3}}, n \in N,$$

unde r_a, r_b, r_c sunt razele cercurilor exînscrise.

Gheorghe Ghiţă,Buzău

Soluţie. $\sum \frac{(r_a+r_b)^{2n+3}}{r_c^{2n+1}} \geq \sum r_c(r_a + r_b) \left(\frac{\sum (r_a+r_b)^2}{\sum r_a^2}\right)^{n+1}$; $\sum r_c(r_a + r_b) = 2\sum r_a r_b = 2p^2 \overset{(3)}{\gtreqless} 54r^2$; $\frac{\sum (r_a+r_b)^2}{\sum r_a^2} = \frac{2\sum r_a^2 + 2\sum r_a r_b}{\sum r_a^2} \overset{(*)}{\gtreqless} \frac{4\sum r_a r_b}{\sum r_a^2} = \frac{4p^2}{(4R+r)^2 - 2p^2} \geq \frac{4p^2}{\frac{27R^3}{8r}} = \frac{32p^2 r}{27R^3} \overset{(3)}{\gtreqless} \frac{32r^3}{R^3}$, deoarece $(4R + r)^2 - 2p^2 \leq \frac{27R^3}{8r} \Leftrightarrow 16p^2 r \geq 128R^2 r + 64Rr^2 + 8r^3 - 27R^3$, din (4) $\Rightarrow 16p^2 r \geq 256Rr^2 - 80r^3 \geq 128R^2 r + 64Rr^2 + 8r^3 - 27R^3$, ultima inegalitate este echivalentă cu $(R - 2r)(27R^2 - 74Rr + 44r^2) \geq 0$, adevărată, deoarece funcţia $f: [2r, \infty) \to R, f(t) = 27t^2 - 74rt + 44r^2$ este crescătoare: R$\geq 2r \Rightarrow$f(R)$= 27R^2 - 74Rr + 44r^2 \geq f(2r) = 4r^2 > 0$; $(*)$: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx, \forall x, y, z > 0$; $\sum \frac{(r_a+r_b)^{2n+3}}{r_c^{2n+1}} \geq 54r^2 \left(\frac{32r^3}{R^3}\right)^{n+1} = \frac{3^3 \cdot 2^{5n+6} r^{3n+5}}{R^{3n+3}}$. Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral.

11) $$\Delta ABC \Rightarrow \sum \frac{h_a^{2n+3}}{(h_b+h_c)^{2n+1}} \geq \frac{3^3 r^3}{2^{2n} R}, n \in N,$$

unde h_a, h_b, h_c sunt înăţimile triunghiului ABC.

Gheorghe Ghiţă,Buzău

Soluție. $\sum \frac{h_a^{2n+3}}{(h_b+h_c)^{2n+1}} \ge \sum h_a(h_b+h_c)\sum\left(\frac{\sum h_a^2}{\sum(h_b+h_c)^2}\right)^{n+1}$; $\sum h_a(h_b+h_c) = 2\sum h_a h_b = 2\sum\frac{4S^2}{ab} = 8S^2\sum\frac{1}{ab} = \frac{8p^2r^2}{2Rr} = \frac{4p^2r}{R} \overset{(3)}{\ge} \frac{108r^3}{R}$; $\frac{\sum h_a^2}{\sum(h_b+h_c)^2} = \frac{\sum h_a^2}{2\sum h_a^2+2\sum h_ah_b} \overset{(*)}{\ge} \frac{\sum h_a^2}{4\sum h_a^2} = \frac{1}{4}$, unde $(*)$: $x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx, \forall x,y,z>0$; rezultă $\sum \frac{h_a^{2n+3}}{(h_b+h_c)^{2n+1}} \ge \frac{108r^3}{R}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = \frac{3^3r^3}{2^{2n}R}$. Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral.

12) $$\Delta ABC \Rightarrow \sum\frac{(h_a+h_b)^{2n+3}}{h_c^{2n+1}} \ge \frac{3^3\cdot 2^{5n+7}r^{3n+6}}{R^{3n+4}}, n\in N,$$

unde h_a, h_b, h_c sunt înățimile triunghiului ABC.

Gheorghe Ghiță,Buzău

Soluție. $\sum\frac{(h_a+h_b)^{2n+3}}{h_c^{2n+1}} \ge \sum h_c(h_a+h_b)\left(\frac{\sum(h_a+h_b)^2}{\sum h_c^2}\right)^{n+1}$; $\sum h_c(h_a+h_b) = 2\sum h_ah_b = 2\sum\frac{4S^2}{ab} = 8S^2\sum\frac{1}{ab} = \frac{8p^2r^2}{2Rr} = \frac{4p^2r}{R} \overset{(3)}{\ge} \frac{108r^3}{R}$; $\frac{\sum(h_a+h_b)^2}{\sum h_c^2} = \frac{2\sum h_a^2+2\sum h_ah_b}{\sum h_a^2} \overset{(*)}{\ge} \frac{4\sum h_ah_b}{\sum h_a^2} = \frac{4\sum\frac{4S^2}{ab}}{\sum\frac{4S^2}{a^2}} = \frac{4\sum\frac{1}{ab}}{\sum\frac{1}{a^2}} \overset{Leuenberger}{\ge} \frac{4\frac{1}{2Rr}}{\frac{1}{4r^2}} = \frac{8r}{R}$, $(*)$: $x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx, \forall x,y,z \ge 0$; $\sum\frac{(h_a+h_b)^{2n+3}}{h_c^{2n+1}} \ge \frac{108r^3}{R}\left(\frac{32r^3}{R^3}\right)^{n+1} = \frac{3^3\cdot2^{5n+7}r^{3n+6}}{R^{3n+4}}$. Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral.

13) $$\Delta ABC \Rightarrow \sum\frac{\sin^{2n+3}A}{\sin^{2n+1}B} \ge \frac{9r}{2R}, n\in N.$$

Gheorghe Ghiță,Buzău

Soluție. $\sum\frac{\sin^{2n+3}A}{\sin^{2n+1}B} \ge \sum \sin A\sin B\left(\frac{\sum\sin^2A}{\sum\sin^2B}\right)^{n+1} = \sum\frac{ab}{4R^2} \overset{(2)}{\ge} \frac{18Rr}{4R^2} = \frac{9r}{2R}$. Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral.

14) $$\Delta ABC \Rightarrow \sum\frac{tg^{2n+3}\frac{A}{2}}{tg^{2n+1}\frac{B}{2}} \ge 1, \in N.$$

Gheorghe Ghiță,Buzău

Soluție. $\sum\frac{tg^{2n+3}\frac{A}{2}}{tg^{2n+1}\frac{B}{2}} \ge \sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\left(\frac{\sum tg^2\frac{A}{2}}{\sum tg^2\frac{B}{2}}\right)^{n+1} = \sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2} = \sum\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}\cdot\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} = \sum\frac{p-c}{p} = 1$. Egalitatea are loc pentru triunghiul echilate

15) $$\Delta ABC \Rightarrow \sum\frac{ctg^{2n+3}\frac{A}{2}}{ctg^{2n+1}\frac{B}{2}} \ge 9, n\in N.$$

Gheorghe Ghiță,Buzău

Soluție. $\sum\frac{ctg^{2n+3}\frac{A}{2}}{ctg^{2n+1}\frac{B}{2}} \ge \sum ctg\frac{A}{2}ctg\frac{B}{2}\left(\frac{\sum ctg^2\frac{A}{2}}{\sum ctg^2\frac{B}{2}}\right)^{n+1} = \sum ctg\frac{A}{2}ctg\frac{B}{2} = \sum\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}\cdot\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}} = \sum\frac{p}{p-c} = p\sum\frac{1}{p-c} = \frac{4R+r}{r} \overset{Euler}{\ge} 9$; rezultă $\sum\frac{ctg^{2n+3}\frac{A}{2}}{ctg^{2n+1}\frac{B}{2}} \ge 9$. Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral.

16) $$\Delta ABC \quad \Rightarrow \sum \frac{a^{2n+3}}{sin^{2n+1}A} \geq 3^2 \cdot 2^{4n+4} r^{2n+3}, n \in N.$$

Gheorghe Ghiță,Buzău

Soluție. $\sum \frac{a^{2n+3}}{sin^{2n+1}A} \geq \sum asinA \left(\frac{\sum a^2}{\sum sin^2A}\right)^{n+1}$; $\sum asinA = \frac{\sum a^2}{2R} \overset{(*)}{\geq} \frac{\sum ab}{2R} \overset{(2)}{\geq} \frac{18Rr}{2R} = 9r$; $\frac{\sum a^2}{\sum sin^2A} = \frac{\sum a^2}{\sum \frac{a^2}{4R^2}} = 4R^2 \geq 16r^2$;
$\sum \frac{a^{2n+3}}{sin^{2n+1}A} \geq 9r(16r^2)^{n+1} = 3^2 \cdot 2^{4n+4} r^{2n+3}$. Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral.

17) $$\Delta ABC \quad \Rightarrow \sum \frac{sin^{2n+3}A}{b^{2n+3}} \geq \frac{9r}{(2R)^{2n+2}}, n \in N.$$

Gheorghe Ghiță,Buzău

Soluție. $\sum \frac{sin^{2n+3}A}{b^{2n+3}} \geq \sum bsinA \left(\frac{\sum sin^2A}{\sum b^2}\right)^{n+1}$; $\sum bsinA = \sum \frac{ab}{2R} \overset{(2)}{\geq} \frac{18Rr}{2R} = 9r$; $\frac{\sum sin^2A}{\sum b^2} = \frac{\sum \frac{a^2}{4R^2}}{\sum b^2} = \frac{1}{4R^2}$;
$\sum \frac{sin^{2n+3}A}{b^{2n+3}} \geq 9r\left(\frac{1}{4R^2}\right)^{n+1} = \frac{9r}{(2R)^{2n+2}}$. Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral.

18) $$\Delta ABC \quad \Rightarrow \sum \frac{a^{2n+3}}{tg^{2n+1}\frac{A}{2}} \geq \frac{2^{3n+4}3^{2n+3}r^{3n+4}}{R^{n+1}}, \ n \in N.$$

Gheorghe Ghiță,Buzău

Soluție. $\sum \frac{a^{2n+3}}{tg^{2n+1}\frac{A}{2}} \geq \sum atg\frac{A}{2}\left(\frac{\sum a^2}{\sum tg^2\frac{A}{2}}\right)^{n+1}$; $\sum a\, tg\frac{A}{2} \overset{Cebâșev}{\geq} \frac{1}{3}\sum a \sum tg\frac{A}{2} = \frac{2p}{3} \cdot \frac{4R+r}{p} = \frac{8R+2r}{3} \overset{Euler}{\geq} 6r$, care rezultă din aplicarea inegalității $Cebâșev$(tripletele (a,b,c) și $\left(tg\frac{A}{2}, tg\frac{B}{2}, tg\frac{C}{2}\right)$sunt la fel ordonate); $\frac{\sum a^2}{\sum tg^2\frac{A}{2}} =$
$\frac{2(p^2-r^2-4Rr)}{\frac{(4R+r)^2-2p^2}{p^2}} = \frac{2p^2(p^2-r^2-4Rr)}{16R^2+8Rr+r^2-2p^2}$; $\frac{p^2-r^2-4Rr}{16R^2+8Rr+r^2-2p^2} \geq \frac{4r}{3R} \Leftrightarrow p^2(3R+8r) \geq 76R^2r + 35Rr^2 + 4r^3$, care rezultă din aplicarea inegalității Gerretsen: $p^2(3R+8r) \geq (16Rr - 5r^2)(3R+8r) = 48R^2r + 113Rr^2$-$40r^3$ și a inegalității lui Euler: $48R^2r + 113Rr^2$-$40r^3 \geq 76R^2r + 35Rr^2 + 4r^3 \Leftrightarrow (R-2r)(14R-11r) \geq 0$; rezultă $\frac{\sum a^2}{\sum tg^2\frac{A}{2}} \geq \frac{8p^2r}{3R} \overset{(3)}{\geq} \frac{72r^3}{R}$; $\sum \frac{a^{2n+3}}{tg^{2n+1}\frac{A}{2}} \geq 6r\left(\frac{72r^3}{R}\right)^{n+1} = \frac{2^{3n+4}3^{2n+3}r^{3n+4}}{R^{n+1}}, n \in N$. Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral.

19) $$\Delta ABC \quad \Rightarrow \sum \frac{tg^{2n+3}\frac{A}{2}}{(p-a)^{2n+1}} \geq \frac{2^{3n+3}r^{n+2}}{3^{2n+2}R^{3n+3}}, \ n \in N.$$

Gheorghe Ghiță,Buzău

Soluție. $\sum \frac{tg^{2n+3}\frac{A}{2}}{(p-a)^{2n+1}} \geq \sum(p-a)\, tg\frac{A}{2}\left(\frac{\sum tg^2\frac{A}{2}}{\sum(p-a)^2}\right)^{n+1}$; $\sum(p-a)\, tg\frac{A}{2} = \sum(p-a)\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} =$
$\sum\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \sum\frac{S}{p} = $ r; $\frac{\sum tg^2\frac{A}{2}}{\sum(p-a)^2} = \frac{\sum\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}{\sum(p^2-2pa+a^2)} = \frac{\sum\frac{(p-b)^2(p-c)^2}{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{3p^2-2p\sum a+\sum a^2} = \frac{\frac{\sum(p-b)^2(p-c)^2}{S^2}}{3p^2-4p^2+2p^2-2r^2-8Rr}$
$= \frac{16R^2r^2+8Rr^3+r^4-2p^2r^2}{S^2(p^2-2r^2-8Rr)} = \frac{16R^2+8Rr+r^2-2p^2}{p^2(p^2-2r^2-8Rr)} \geq \frac{6r}{p^2R} \Leftrightarrow p^2(2R+6r) \leq \ 16R^3 + 8R^2r + 49Rr^2 + 12r^3$, dar,
din $\overset{Gerretsen}{\Rightarrow}$ $(2R+6r)(4R^2+4Rr+3r^2) \leq 8R^3 + 32R^2r + 30Rr^2 + 18r^3$, și rămâne de arătat că

$8R^3 + 32R^2r + 30Rr^2 + 18r^3 \leq 16R^3 + 8R^2r + 49Rr^2 + 12r^3 \Leftrightarrow (R-2r)(8R^2 - 8Rr + 3r^2) \geq 0$,

adevărată conform inegalității lui Euler; cum $\frac{6r}{p^2R} \overset{(3)}{\gtrsim} \frac{8r}{9R^3} \Rightarrow \frac{\sum tg^2\frac{A}{2}}{\sum(p-a)^2} \geq \frac{8r}{9R^3}$; $\sum \frac{tg^{2n+3}\frac{A}{2}}{(p-a)^{2n+1}} \geq \mathrm{r}\left(\frac{8r}{9R^3}\right)^{n+1} = \frac{2^{3n+3}r^{n+2}}{3^{2n+2}R^{3n+3}}$. Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral.

20) $$\Delta ABC \Rightarrow \sum \frac{sin^{2n+3}A}{(b+c)^{2n+1}} \geq \frac{9r}{2^{4n+3}R^{2n+2}}, n \in N.$$

Gheorghe Ghiţă,Buzău

Soluție. $\sum \frac{sin^{2n+3}A}{(b+c)^{2n+1}} \geq \sum(b+c)\, sinA \left(\frac{\sum sin^2A}{\sum(a+b)^2}\right)^{n+1}$; $\sum(b+c)sinA = \sum(b+c)\frac{a}{2R} = \frac{2\sum ab}{2R} \overset{(2)}{\gtrsim} 18r$; $\frac{\sum sin^2A}{\sum(b+c)^2} = \frac{\sum\frac{a^2}{4R^2}}{2\sum b^2+2\sum bc} = \frac{\sum a^2}{8R^2(\sum b^2+\sum bc)} \overset{(*)}{\gtrsim} \frac{\sum a^2}{16R^2\sum b^2} = \frac{1}{16R^2}$, $unde\ (*): x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx, \forall x, y, z > 0$;
$\sum \frac{sin^{2n+3}A}{(b+c)^{2n+1}} \geq 18r\left(\frac{1}{16R^2}\right)^{n+1} = \frac{9r}{2^{4n+3}R^{2n+2}}$. Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral.

Bibliografie

1. **Marin Chirciu**, Inegalități trigonometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.

2. **Marin Chirciu**, Inegalități algebrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2014.

3. **D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu** - Generalization and refinements for Ionescu-Weitzenböck inequality – R.M.M.-1, New Edition, 2022, 53-55.

4.Revista Electronică Mateinfo.ro-Martie 2020, pg. 41

5. Revista de Matematică Sclipirea Minţii nr. 24, 2019, pg. 46