WWW.MATEINFO.RO

REVISTA ELECTRONICA MATEINFO.RO

MARTIE 2023
ISSN 2065 - 6432

REVISTĂ DIN FEBRUARIE 2009

COORDONATOR:
ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ȘI SUSȚINĂTORI PERMANENȚI AI REVISTEI

NECULAI STANCIU
MARIN CHIRCIU
ROXANA MIHAELA STANCIU

ARTICOLE

R.E.M.I. MARTIE 2023

1. Some applications of Harald Bergström' s inequality in triangle ... pag. 2
D.M. Bătinețu-Giurgiu and Neculai Stanciu

2. Inegalitatea lui Bernoulli ... pag.8
Marin Chirciu

3. Inegalitatea lui Chebyshev ... pag. 23
Marin Chirciu

4.Începuturile învățământului matematic în Moldova și Țara Românească ... pag. 49
Adrian Stan

PUTEȚI TRIMITE ARTICOLE ÎN FOMAT WORD PE REVISTA.MATEINFO@YAHOO.COM

1. Some applications of Harald Bergström' s inequality in triangle

D.M. Bătineţu-Giurgiu and Neculai Stanciu

In this paper we present some new inequalities in a triangle, which follows from Bergström's inequality.

1. In any triangle ABC holds

$$a^2 tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}+b^2 tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}+c^2 tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\geq\frac{4p^2r}{4R+r}.$$

Proof. By Bergström's inequality we have:

$$U=\sum a^2 tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}=\sum\frac{a^2}{ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2}}\geq\frac{(a+b+c)^2}{\sum ctg\frac{A}{2}ctg\frac{B}{2}},$$

but,

$$\sum ctg\frac{A}{2}ctg\frac{B}{2}=\frac{4R+r}{r},$$

so q.e.d..

2. In any triangle ABC holds

$$a^2 ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2}+b^2 ctg\frac{C}{2}ctg\frac{A}{2}+c^2 ctg\frac{A}{2}ctg\frac{B}{2}\geq 4p^2.$$

Proof. By Bergström's inequality we have:

$$U=\sum a^2 ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2}=\sum\frac{a^2}{tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}}\geq\frac{(a+b+c)^2}{\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}},$$

but,

$$\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}=1,$$

so, we get the conclusion.

3. If $x, y, z \in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{1}{x+y\sin^2\frac{A}{2}+z\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{x+y\sin^2\frac{B}{2}+z\cos^2\frac{C}{2}}+\frac{1}{x+y\sin^2\frac{C}{2}+z\cos^2\frac{A}{2}}\geq$$

$$\geq\frac{18R}{2(3x+y+2z)R+(z-y)r}$$

Proof. By Bergström's inequality we have

$$\sum\frac{1}{x+y\sin^2\frac{A}{2}+z\cos^2\frac{B}{2}}\geq\frac{9}{3x+y\sum\sin^2\frac{A}{2}+z\sum\cos^2\frac{A}{2}}.$$

Since,

$$\sum\sin^2\frac{A}{2}=\frac{2R-r}{2R},$$

and

$$\sum\cos^2\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{2R},$$

we obtain the conclusion.

4. If $m, n \in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{\sin^4\frac{A}{2}}{m\cos^2\frac{B}{2}+n\cos^2\frac{C}{2}}+\frac{\sin^4\frac{B}{2}}{m\cos^2\frac{C}{2}+n\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{\sin^4\frac{C}{2}}{m\cos^2\frac{A}{2}+n\cos^2\frac{B}{2}}\geq\frac{(2R-r)^2}{2(m+n)R(4R+r)}.$$

Proof. By Bergström's inequality we have

$$\sum\frac{\sin^4\frac{A}{2}}{m\cos^2\frac{B}{2}+n\cos^2\frac{C}{2}}\geq\frac{\left(\sum\sin^2\frac{A}{2}\right)^2}{(m+n)\cdot\sum\cos^2\frac{A}{2}}.$$

Because,

$$\sum\sin^2\frac{A}{2}=\frac{2R-r}{2R},$$

and

$$\sum \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{4R+r}{2R},$$

we obtain the desired conclusion.

5. If $m,n \in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{\sin^4 \frac{A}{2}}{m\sin^2 \frac{B}{2} + n\cos^2 \frac{C}{2}} + \frac{\sin^4 \frac{B}{2}}{m\sin^2 \frac{C}{2} + n\cos^2 \frac{A}{2}} + \frac{\sin^4 \frac{C}{2}}{m\sin^2 \frac{A}{2} + n\cos^2 \frac{B}{2}} \geq \geq \frac{(2R-r)^2}{2R\left(2(m+2n)R + (n-m)r\right)}.$$

Proof. By Bergström's inequality we have

$$\sum \frac{\sin^4 \frac{A}{2}}{m\sin^2 \frac{B}{2} + n\cos^2 \frac{C}{2}} \geq \frac{\left(\sum \sin^2 \frac{A}{2}\right)^2}{m\sum \sin^2 \frac{A}{2} + n\sum \cos^2 \frac{A}{2}}.$$

Since,

$$\sum \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2R-r}{2R},$$

and

$$\sum \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{4R+r}{2R},$$

the proof is complete.

6. If $m,n \in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{\sin^4 \frac{A}{2}}{m\sin^2 \frac{B}{2} + n\sin^2 \frac{C}{2}} + \frac{\sin^4 \frac{B}{2}}{m\sin^2 \frac{C}{2} + n\sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{\sin^4 \frac{C}{2}}{m\sin^2 \frac{A}{2} + n\sin^2 \frac{B}{2}} \geq \frac{2R-r}{2(m+n)R}.$$

Proof. By Bergström's inequality we have

$$\sum \frac{\sin^4 \frac{A}{2}}{m\sin^2 \frac{B}{2} + n\sin^2 \frac{C}{2}} \geq \frac{\left(\sum \sin^2 \frac{A}{2}\right)^2}{(m+n)\sum \sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{\sum \sin^2 \frac{A}{2}}{m+n}.$$

Because,

$$\sum \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2R-r}{2R},$$

q.e.d.

7. If $m,n \in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{\sin^4 \frac{A}{2}}{m \cdot \frac{2R-r}{2R} + n\cos^2 \frac{B}{2}} + \frac{\sin^4 \frac{B}{2}}{m \cdot \frac{2R-r}{2R} + n\cos^2 \frac{C}{2}} + \frac{\sin^4 \frac{C}{2}}{m \cdot \frac{2R-r}{2R} + n\cos^2 \frac{A}{2}} \geq$$
$$\geq \frac{(2R-r)^2}{2R\left(2(3m+2n)R+(n-3m)r\right)}.$$

Proof. By Bergström's inequality we have

$$\sum \frac{\sin^4 \frac{A}{2}}{m \cdot \frac{2R-r}{2R} + n\cos^2 \frac{B}{2}} \geq \frac{\left(\sum \sin^2 \frac{A}{2}\right)^2}{3m \cdot \frac{2R-r}{2R} + n\sum \cos^2 \frac{A}{2}}.$$

Since,

$$\sum \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2R-r}{2R}, \text{ and}$$

$$\sum \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{4R+r}{2R},$$

the proof is complete.

8. If $m,n \in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{\cos^4 \frac{A}{2}}{m\sin^2 \frac{B}{2} + n\sin^2 \frac{C}{2}} + \frac{\cos^4 \frac{B}{2}}{m\sin^2 \frac{C}{2} + n\sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{\cos^4 \frac{C}{2}}{m\sin^2 \frac{A}{2} + n\sin^2 \frac{B}{2}} \geq \frac{(4R+r)^2}{2(m+n)R(2R-r)}$$

Proof. By Bergström's inequality we have

$$\sum \frac{\cos^4 \frac{A}{2}}{m\sin^2 \frac{B}{2} + n\sin^2 \frac{C}{2}} = \sum \frac{\left(\cos^2 \frac{A}{2}\right)^2}{\left(m\sin^2 \frac{B}{2} + n\sin^2 \frac{C}{2}\right)} \geq$$

$$\geq \frac{\left(\sum \cos^2 \frac{A}{2}\right)^2}{\left(m\sum \sin^2 \frac{A}{2} + n\sum \sin^2 \frac{A}{2}\right)} = \frac{\left(\sum \cos^2 \frac{A}{2}\right)^2}{(m+n)\sum \sin^2 \frac{A}{2}}$$

Because,

$$\sum \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2R-r}{2R},$$

and

$$\sum \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{4R+r}{2R},$$

we obtain the conclusion.

9. If $m, n \in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{\cos^4 \frac{A}{2}}{m\cos^2 \frac{B}{2} + n\cos^2 \frac{C}{2}} + \frac{\cos^4 \frac{B}{2}}{m\cos^2 \frac{C}{2} + n\cos^2 \frac{A}{2}} + \frac{\cos^4 \frac{C}{2}}{m\cos^2 \frac{A}{2} + n\cos^2 \frac{B}{2}} \geq \frac{4R+r}{2(m+n)R}$$

Proof. By Bergström's inequality we have

$$\sum \frac{\cos^4 \frac{A}{2}}{m\cos^2 \frac{B}{2} + n\cos^2 \frac{C}{2}} = \sum \frac{\left(\cos^2 \frac{A}{2}\right)^2}{\left(m\cos^2 \frac{B}{2} + n\cos^2 \frac{C}{2}\right)} \geq$$

$$\geq \frac{\left(\sum \cos^2 \frac{A}{2}\right)^2}{\left(m\sum \cos^2 \frac{A}{2} + n\sum \cos^2 \frac{A}{2}\right)} = \frac{\left(\sum \cos^2 \frac{A}{2}\right)^2}{(m+n)\sum \cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{\sum \cos^2 \frac{A}{2}}{m+n}$$

Since,

$$\sum \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{4R+r}{2R},$$

completes the proof.

10. If $m,n \in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{\cos^4 \frac{A}{2}}{m\sin^2 \frac{B}{2} + n\cos^2 \frac{C}{2}} + \frac{\cos^4 \frac{B}{2}}{m\sin^2 \frac{C}{2} + n\cos^2 \frac{A}{2}} + \frac{\cos^4 \frac{C}{2}}{m\sin^2 \frac{A}{2} + n\cos^2 \frac{B}{2}} \geq \geq \frac{(4R+r)^2}{2R(2(m+2n)R+(n-m)r)}$$

Proof. By Bergström's inequality we have

$$\sum \frac{\cos^4 \frac{A}{2}}{m\sin^2 \frac{B}{2} + n\cos^2 \frac{C}{2}} = \sum \frac{\left(\cos^2 \frac{A}{2}\right)^2}{\left(m\sin^2 \frac{B}{2} + n\cos^2 \frac{C}{2}\right)} \geq$$

$$\geq \frac{\left(\sum \cos^2 \frac{A}{2}\right)^2}{\left(m\sum \sin^2 \frac{A}{2} + n\sum \cos^2 \frac{A}{2}\right)}$$

Since,

$$\sum \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2R-r}{2R},$$

and

$$\sum \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{4R+r}{2R},$$

we obtain the conclusion.

11. If $m,n \in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{\cos^4 \frac{A}{2}}{m \cdot \frac{4R+r}{2R} + n\sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{\cos^4 \frac{B}{2}}{m \cdot \frac{4R+r}{2R} + n\sin^2 \frac{B}{2}} + \frac{\cos^4 \frac{C}{2}}{m \cdot \frac{4R+r}{2R} + n\sin^2 \frac{C}{2}} \geq$$

$$\geq \frac{(4R+r)^2}{2R(2(3m+n)R+(3m-n)r)}.$$

Proof. By Bergström's inequality we have

$$\sum \frac{\cos^4 \frac{A}{2}}{m \cdot \frac{4R+r}{2R} + n \sin^2 \frac{A}{2}} \geq \frac{\left(\sum \cos^2 \frac{A}{2}\right)^2}{3m \cdot \frac{4R+r}{2R} + n \sum \sin^2 \frac{A}{2}}$$

But,

$$\sum \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2R-r}{2R},$$

and

$$\sum \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{4R+r}{2R},$$

and we are done.

2. Inegalitatea lui Bernoulli

Marin Chirciu [1]

Articolul prezintă inegalitatea lui Bernoulli și aplicatii ale acesteia, selectate din diverse publicații de specialitate.

Inegalitatea lui Bernoulli:

$(1+x)^r \geq 1+rx\,;\, x\geq -1\,;\, r\in(-\infty,0]\cup[1,\infty)$.

$(1+x)^r \leq 1+rx\,;\, x\geq -1\,;\, r\in[0,1]$.

Aplicația1.

1) If $x,y,z>0$, $x^2+y^2+z^2=3$ then

$$\sum \frac{x^{2009}-2008(x-1)}{y+z} \geq \frac{1}{2}(x+y+z).$$

China Northern ,MO 2009

Soluție.

Lema

If $x>0$ then

$$\frac{x^{2009}-2008(x-1)}{y+z} \geq \frac{x}{y+z}.$$

Demonstrație.

Folosim Inegalitatea lui Bernoulli obținem:

$$x^{2009}=\left[1+(x-1)\right]^{2009} \overset{Bernoulli}{\geq} 1+2009(x-1)=2009x-2008 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{2009}-2008(x-1)\geq 2009x-2008-2008(x-1)=x.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

[1] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”Pitești*

$$LHS=\sum\frac{x^{2009}-2008(x-1)}{y+z}\overset{Lema}{\geq}\sum\frac{x}{y+z}\overset{(1)}{\geq}\frac{1}{2}(x+y+z)=RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow\sum\frac{x}{y+z}\geq\frac{1}{2}(x+y+z)$, care rezultă din:

$$\sum\frac{x}{y+z}=\sum\frac{x^2}{x(y+z)}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum x(y+z)}=\frac{\left(\sum x\right)^2}{2\sum yz}\overset{(2)}{\geq}\frac{1}{2}\sum x,$$

unde (2) $\Leftrightarrow\frac{\left(\sum x\right)^2}{2\sum yz}\geq\frac{1}{2}\sum x\Leftrightarrow\sum x\geq\sum yz$, adevărată din:

$\sum x\geq\sum yz\Leftrightarrow\left(\sum x\right)^2\geq\left(\sum yz\right)^2\Leftrightarrow 3\left(\sum x\right)^2\geq 3\left(\sum yz\right)^2\Leftrightarrow\sum x^2\left(\sum x\right)^2\geq 3\left(\sum yz\right)^2$, care rezultă din $\sum x^2\geq\sum yz$ și $\left(\sum x\right)^2\geq 3\sum yz$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

2) If $x,y,z>0$, $x^2+y^2+z^2=3$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\sum\frac{x^{n+1}-n(x-1)}{y+z}\geq\frac{1}{2}(x+y+z).$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema

If $x>0$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\frac{x^{n+1}-n(x-1)}{y+z}\geq\frac{x}{y+z}.$$

Demonstrație.

Folosim Inegalitatea lui Bernoulli obținem:

$$x^{n+1}=\left[1+(x-1)\right]^{n+1}\overset{Bernoulli}{\geq}1+(n+1)(x-1)=(n+1)x-n\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{n+1}-n(x-1)\geq(n+1)x-n-n(x-1)=x.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$LHS=\sum\frac{x^{n+1}-n(x-1)}{y+z}\overset{Lema}{\geq}\sum\frac{x}{y+z}\overset{(1)}{\geq}\frac{1}{2}(x+y+z)=RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \sum \frac{x}{y+z} \geq \frac{1}{2}(x+y+z)$, care rezultă din:

$$\sum \frac{x}{y+z} = \sum \frac{x^2}{x(y+z)} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum x(y+z)} = \frac{\left(\sum x\right)^2}{2\sum yz} \overset{(2)}{\geq} \frac{1}{2}\sum x,$$

unde (2) $\Leftrightarrow \frac{\left(\sum x\right)^2}{2\sum yz} \geq \frac{1}{2}\sum x \Leftrightarrow \sum x \geq \sum yz$, adevărată din:

$\sum x \geq \sum yz \Leftrightarrow \left(\sum x\right)^2 \geq \left(\sum yz\right)^2 \Leftrightarrow 3\left(\sum x\right)^2 \geq 3\left(\sum yz\right)^2 \Leftrightarrow \sum x^2 \left(\sum x\right)^2 \geq 3\left(\sum yz\right)^2$, care rezultă din $\sum x^2 \geq \sum yz$ și $\left(\sum x\right)^2 \geq 3\sum yz$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 1$.

Nota.

Pentru $n = 2008$ se obține Problema propusă China Northern MO 2009.

Aplicația2.

In ΔABC

$$\left(\frac{r}{r_a}\right)^{\frac{r}{r_a}} + \left(\frac{r}{r_b}\right)^{\frac{r}{r_b}} + \left(\frac{r}{r_c}\right)^{\frac{r}{r_c}} \leq \frac{3p^2 - 2r^2 - 8Rr}{p^2}.$$

Radu Diaconu, Sibiu,RMM 7/2022

Soluție.

Lema

1) If $x \geq -1$ and $0 \leq k \leq 1$ then

$$(1+x)^k \leq 1 + kx.$$

Inegalitatea lui Bernoulli

Punem $x = \frac{r}{r_a} - 1 > -1$ și $k = \frac{r}{r_a} = \frac{r}{\frac{S}{p-a}} = \frac{r(p-a)}{rp} = \frac{p-a}{p} < 1$.

Obținem:

$$LHS = \sum \left(\frac{r}{r_a}\right)^{\frac{r}{r_a}} = \sum \left(1 + \left(\frac{r}{r_a} - 1\right)\right)^{\frac{r}{r_a}} = \sum (1+x)^k \overset{Bernoulli}{\leq} \sum (1+kx) = \sum \left(1 + \frac{r}{r_a}\left(\frac{r}{r_a} - 1\right)\right) =$$

$$=\frac{3p^2-2r^2-8Rr}{p^2}=RHS.$$

Inegalitatea este strictă.

2) In ΔABC

$$\left(\frac{r}{h_a}\right)^{\frac{r}{h_a}}+\left(\frac{r}{h_b}\right)^{\frac{r}{h_b}}+\left(\frac{r}{h_c}\right)^{\frac{r}{h_c}}\le\frac{5p^2-r^2-4Rr}{2p^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema

If $x\ge -1$ and $0\le k\le 1$ then

$$(1+x)^k\le 1+kx.$$

Inegalitatea lui Bernoulli

Punem $x=\frac{r}{h_a}-1>-1$ și $k=\frac{r}{h_a}=\frac{r}{\frac{2S}{a}}=\frac{ra}{2rp}=\frac{a}{2p}<1$.

Obținem:

$$LHS=\sum\left(\frac{r}{h_a}\right)^{\frac{r}{h_a}}=\sum\left(1+\left(\frac{r}{h_a}-1\right)\right)^{\frac{r}{h_a}}=\sum(1+x)^k\overset{Bernoulli}{\le}\sum(1+kx)=\sum\left(1+\frac{r}{h_a}\left(\frac{r}{h_a}-1\right)\right)=$$

$$=\frac{5p^2-r^2-4Rr}{2p^2}=RHS.$$

Am folosit mai sus $\sum\frac{1}{h_a}=\frac{1}{r}$ și $\sum\frac{1}{h_a^2}=\frac{p^2-r^2-4Rr}{2p^2r^2}$.

Inegalitatea este strictă.

3) In ΔABC

$$\left(\frac{r}{m_a}\right)^{\frac{r}{m_a}}+\left(\frac{r}{m_b}\right)^{\frac{r}{m_b}}+\left(\frac{r}{m_c}\right)^{\frac{r}{m_c}}\le 3+\frac{R}{6r}-\frac{2r}{R}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema

If $x\ge -1$ and $0\le k\le 1$ then

$$(1+x)^k \le 1+kx.$$

Inegalitatea lui Bernoulli

Punem $x=\frac{r}{m_a}-1>-1$ și $k=\frac{r}{m_a}\le\frac{r}{h_a}=\frac{r}{\frac{2S}{a}}=\frac{ra}{2rp}=\frac{a}{2p}<1.$

Obținem:

$$LHS=\sum\left(\frac{r}{m_a}\right)^{\frac{r}{m_a}}=\sum\left(1+\left(\frac{r}{m_a}-1\right)\right)^{\frac{r}{m_a}}=\sum(1+x)^k\overset{Bernoulli}{\le}\sum(1+kx)=\sum\left(1+\frac{r}{m_a}\left(\frac{r}{m_a}-1\right)\right)=$$

$$=3+r^2\sum\frac{1}{m_a^2}-r\sum\frac{1}{m_a}\le 3+r^2\cdot\frac{p^2-r^2-4Rr}{2p^2r^2}-r\cdot\frac{2}{R}=3+\frac{1}{2}\cdot\frac{p^2-r^2-4Rr}{p^2}-\frac{2r}{R}\overset{Gerretsen}{\le}$$

$$\overset{Gerretsen}{\le}3+\frac{1}{2}\cdot\frac{R}{3r}-\frac{2r}{R}=3+\frac{R}{6r}-\frac{2r}{R}.$$

Am folosit mai sus $\sum\frac{1}{m_a}\ge\frac{2}{R}$ și $\sum\frac{1}{m_a^2}\le\sum\frac{1}{h_a^2}=\frac{p^2-r^2-4Rr}{2p^2r^2}$.

Inegalitatea este strictă.

4) In ΔABC

$$\left(\frac{r}{w_a}\right)^{\frac{r}{w_a}}+\left(\frac{r}{w_b}\right)^{\frac{r}{w_b}}+\left(\frac{r}{w_c}\right)^{\frac{r}{w_c}}\le 3+\frac{R}{6r}-\frac{2r}{R}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema

If $x\ge -1$ and $0\le k\le 1$ then

$$(1+x)^k \le 1+kx.$$

Inegalitatea lui Bernoulli

Punem $x=\frac{r}{w_a}-1>-1$ și $k=\frac{r}{w_a}\le\frac{r}{h_a}=\frac{r}{\frac{2S}{a}}=\frac{ra}{2rp}=\frac{a}{2p}<1.$

Obținem:

$$LHS=\sum\left(\frac{r}{w_a}\right)^{\frac{r}{w_a}}=\sum\left(1+\left(\frac{r}{w_a}-1\right)\right)^{\frac{r}{w_a}}=\sum(1+x)^k\overset{Bernoulli}{\le}\sum(1+kx)=\sum\left(1+\frac{r}{w_a}\left(\frac{r}{w_a}-1\right)\right)=$$

$$=3+r^2\sum\frac{1}{w_a^2}-r\sum\frac{1}{w_a}\le 3+r^2\cdot\frac{p^2-r^2-4Rr}{2p^2r^2}-r\cdot\frac{2}{R}=3+\frac{1}{2}\cdot\frac{p^2-r^2-4Rr}{p^2}-\frac{2r}{R}\overset{Gerretsen}{\le}$$

$$\overset{Gerretsen}{\le}3+\frac{1}{2}\cdot\frac{R}{3r}-\frac{2r}{R}=3+\frac{R}{6r}-\frac{2r}{R}.$$

Am folosit mai sus $\sum\frac{1}{w_a}\ge\sum\frac{1}{m_a}\ge\frac{2}{R}$ și $\sum\frac{1}{w_a^2}\le\sum\frac{1}{h_a^2}=\frac{p^2-r^2-4Rr}{2p^2r^2}$.

Inegalitatea este strictă.

5) In ΔABC

$$\left(\frac{r}{s_a}\right)^{\frac{r}{s_a}}+\left(\frac{r}{s_b}\right)^{\frac{r}{s_b}}+\left(\frac{r}{s_c}\right)^{\frac{r}{s_c}}\le 3+\frac{R}{6r}-\frac{2r}{R}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema

If $x\ge -1$ and $0\le k\le 1$ then

$$(1+x)^k\le 1+kx.$$

Inegalitatea lui Bernoulli

Punem $x=\frac{r}{s_a}-1>-1$ și $k=\frac{r}{s_a}\le\frac{r}{h_a}=\frac{r}{\frac{2S}{a}}=\frac{ra}{2rp}=\frac{a}{2p}<1$.

Obținem:

$$LHS=\sum\left(\frac{r}{s_a}\right)^{\frac{r}{s_a}}=\sum\left(1+\left(\frac{r}{s_a}-1\right)\right)^{\frac{r}{s_a}}=\sum(1+x)^k\overset{Bernoulli}{\le}\sum(1+kx)=\sum\left(1+\frac{r}{s_a}\left(\frac{r}{s_a}-1\right)\right)=$$

$$=3+r^2\sum\frac{1}{s_a^2}-r\sum\frac{1}{s_a}\le 3+r^2\cdot\frac{p^2-r^2-4Rr}{2p^2r^2}-r\cdot\frac{2}{R}=3+\frac{1}{2}\cdot\frac{p^2-r^2-4Rr}{p^2}-\frac{2r}{R}\overset{Gerretsen}{\le}$$

$$\overset{Gerretsen}{\le}3+\frac{1}{2}\cdot\frac{R}{3r}-\frac{2r}{R}=3+\frac{R}{6r}-\frac{2r}{R}.$$

Am folosit mai sus $\sum\frac{1}{s_a}\ge\sum\frac{1}{m_a}\ge\frac{2}{R}$ și $\sum\frac{1}{s_a^2}\le\sum\frac{1}{h_a^2}=\frac{p^2-r^2-4Rr}{2p^2r^2}$.

Inegalitatea este strictă.

Aplicația3.

1) If $0<a,b,c\le 1$ then

$$\frac{1}{a+a^a}+\frac{1}{b+b^b}+\frac{1}{c+c^c}\geq\frac{9}{3+a^2+b^2+c^2}.$$

Daniel Sitaru,Math Phenomenon Reloaded,A.029

Soluție.

Lema

If $0<a\leq 1$ then

$$\frac{1}{a+a^a}\geq\frac{1}{1+a^2}.$$

Demonstrație

$$a^a=(1+a-1)^a\overset{Bernoulli}{\leq}1+a(a-1)=a^2-a+1\Rightarrow a+a^a\leq a+a^2-a+1=a^2+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{a+a^a}\geq\frac{1}{1+a^2}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$LHS=\sum\frac{1}{a+a^a}\overset{Lema}{\geq}\sum\frac{1}{1+a^2}\overset{Bergstrom}{\geq}\frac{\left(\sum 1\right)^2}{\sum\left(1+a^2\right)}=\frac{9}{3+a^2+b^2+c^2}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

2) If $0<a,b,c,d\leq 1$ then

$$\frac{1}{a+a^a}+\frac{1}{b+b^b}+\frac{1}{c+c^c}+\frac{1}{d+d^d}\geq\frac{16}{4+a^2+b^2+c^2+d^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema

If $0<a\leq 1$ then

$$\frac{1}{a+a^a}\geq\frac{1}{1+a^2}.$$

Demonstrație

$$a^a=(1+a-1)^a\overset{Bernoulli}{\leq}1+a(a-1)=a^2-a+1\Rightarrow a+a^a\leq a+a^2-a+1=a^2+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{a+a^a}\geq\frac{1}{1+a^2}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$LHS=\sum\frac{1}{a+a^a}\overset{Lema}{\geq}\sum\frac{1}{1+a^2}\overset{Bergstrom}{\geq}\frac{\left(\sum 1\right)^2}{\sum\left(1+a^2\right)}=\frac{16}{4+a^2+b^2+c^2+d^2}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=1$.

3) If $0<a_1,a_2,...,a_n\leq 1$ then

$$\frac{1}{a_1+a_1^{a_1}}+\frac{1}{a_2+a_2^{a_2}}+...+\frac{1}{a_n+a_n^{a_n}}\geq\frac{n^2}{n+a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema

If $0<a\leq 1$ then

$$\frac{1}{a+a^a}\geq\frac{1}{1+a^2}.$$

Demonstrație

$$a^a=(1+a-1)^a\overset{Bernoulli}{\leq}1+a(a-1)=a^2-a+1\Rightarrow a+a^a\leq a+a^2-a+1=a^2+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{a+a^a}\geq\frac{1}{1+a^2}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$LHS=\sum\frac{1}{a_1+a_1^{a_1}}\overset{Lema}{\geq}\sum\frac{1}{1+a_1^2}\overset{Bergstrom}{\geq}\frac{\left(\sum 1\right)^2}{\sum\left(1+a_1^2\right)}=\frac{n^2}{4+a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1=a_2=...=a_n=1$.

Nota.

Pentru $n=3$ se obține Problema A.029 din Math Phenomenon Reloaded.

Aplicația4.

1) If $a,b>0$ then

$$\left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)^{\frac{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}}{a+b}}+\left(\frac{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}}{a+b}\right)^{\frac{2ab}{a^2+b^2}}\leq 1+\frac{2\sqrt{2}\cdot ab}{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Daniel Sitaru,Math Phenomenon Reloaded,A.030

Soluție.

Lema

If $0 < x \le 1$ and $y \ge 1$ then

$$x^y + y^x \le 1 + xy.$$

Demonstrație

$$y^x = (1+y-1)^x \overset{Bernoulli}{\le} 1 + x(y-1) = xy - x + 1 \Rightarrow y^x \le xy - x + 1, (1).$$

Apoi $0 < x \le 1 \Rightarrow x^y \le x$, (2).

Din (1) și (2) $\Rightarrow x^y + y^x \le xy - x + 1 + x = 1 + xy$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Avem $0 < \dfrac{2ab}{a^2+b^2} \le 1$ și $\dfrac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{a+b} \ge 1 \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0$, cu egalitate pentru $a = b$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y) = \left(\dfrac{2ab}{a^2+b^2}, \dfrac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{a+b} \right)$ obținem:

$$LHS = \left(\frac{2ab}{a^2+b^2} \right)^{\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{a+b}} + \left(\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{a+b} \right)^{\frac{2ab}{a^2+b^2}} \overset{Lema}{\le} 1 + \frac{2ab}{a^2+b^2} \cdot \frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{a+b} =$$

$$= 1 + \frac{2\sqrt{2} \cdot ab}{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b$.

2) If $a, b, c > 0$ then

$$\left(\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \right)^{\frac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{a+b+c}} + \left(\frac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{a+b+c} \right)^{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \le 1 + \frac{\sqrt{3} \cdot (ab+bc+ca)}{(a+b+c)\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema

If $0 < x \le 1$ and $y \ge 1$ then

$$x^y + y^x \le 1 + xy.$$

Demonstrație

$$y^x = (1+y-1)^x \overset{Bernoulli}{\le} 1 + x(y-1) = xy - x + 1 \Rightarrow y^x \le xy - x + 1, (1).$$

Apoi $0 < x \le 1 \Rightarrow x^y \le x$, (2).

Din (1) și (2) $\Rightarrow x^y + y^x \le xy - x + 1 + x = 1 + xy$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Avem $0 < \dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \le 1$ și $\dfrac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{a+b+c} \ge 1 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \ge 0$,

cu egalitate pentru $a = b = c$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y) = \left(\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}, \dfrac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{a+b+c} \right)$ obținem:

$$LHS = \left(\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \right)^{\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{a+b}} + \left(\frac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{a+b+c} \right)^{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \overset{Lema}{\le} 1 + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \cdot \frac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{a+b+c} =$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{3} \cdot (ab+bc+ca)}{(a+b+c)\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c$.

Aplicația5.

1) If $x, y, z > 1$, $xyz = 2\sqrt{2}$ then

$$x^y + y^z + z^x + y^x + z^y + x^z > 9.$$

Daniel Sitaru, Math Phenomenon Reloaded,A.035

Soluție.

Lema

If $x, y > 1$ then

$$x^y + y^x \ge 1 + xy.$$

Demonstrație

$$x^y = (1+x-1)^x \overset{Bernoulli}{\ge} 1 + y(x-1) = xy - y + 1 \Rightarrow x^y \ge xy - y + 1, (1).$$

$y^x=(1+y-1)^x \overset{Bernoulli}{\geq} 1+x(y-1)=xy-x+1 \Rightarrow y^x \geq xy-x+1$,(1).

Din (1) și (2) $\Rightarrow x^y+y^x \geq xy-y+1+xy-y+1=1+xy+(1-x)(1-y) \geq 1+xy$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$LHS=\sum(x^y+y^x) \overset{Lema}{\geq} \sum(1+xy)=3+\sum xy \overset{AM-GM}{\geq} 3+3\sqrt[3]{(xyz)^2}=3+3\sqrt[3]{(2\sqrt{2})^2}=9=RHS.$$

Inegalitatea este strictă.

2) If $x,y,z \geq 1$,then

$$x^y+y^z+z^x+y^x+z^y+x^z \geq 3+3(xyz)^{\frac{2}{3}}.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție.</u>

<u>Lema</u>

If $x,y \geq 1$then

$$x^y+y^x \geq 1+xy.$$

<u>Demonstrație</u>

$x^y=(1+x-1)^x \overset{Bernoulli}{\geq} 1+y(x-1)=xy-y+1 \Rightarrow x^y \geq xy-y+1$, (1).

$y^x=(1+y-1)^x \overset{Bernoulli}{\geq} 1+x(y-1)=xy-x+1 \Rightarrow y^x \geq xy-x+1$,(1).

Din (1) și (2) $\Rightarrow x^y+y^x \geq xy-y+1+xy-y+1=1+xy+(1-x)(1-y) \geq 1+xy$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$LHS=\sum(x^y+y^x) \overset{Lema}{\geq} \sum(1+xy)=3+\sum xy \overset{AM-GM}{\geq} 3+3\sqrt[3]{(xyz)^2}=3+3(xyz)^{\frac{2}{3}}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

<u>Aplicația6.</u>

1) If $a,b,c>0$ then

$$\sum\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right)^{\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}}\geq 6-\sum\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}.$$

Daniel Sitaru, Math Phenomenon Reloaded,A.090

Soluție.

Lema

If $a,b>0$ then

$$\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right)^{\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}}\geq 2-\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}.$$

Demonstrație

Din inegalitatea lui Benoulli pentru $x>0$ și $r\geq 1$ avem:

$x^r=(1+x-1)^r\geq 1+r(x-1)=1+rx-r\Rightarrow x^r\geq 1+rx-r$, (1).

Punând în (1) : $x=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}>0$ și $r=\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\geq 1\Rightarrow\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right)^{\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}}\geq 1+\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\cdot\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}-\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}=$

$=2-\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$LHS=\sum\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right)^{\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}}\overset{Lema}{\geq}\sum\left(2-\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\right)=6-\sum\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b$.

2) If $a,b,c>0$ then

$$\left(\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\right)^{\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}}\geq 2-\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema

If $a,b>0$ then

$$\left(\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\right)^{\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}} \geq 2-\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}.$$

Demonstrație

Din inegalitatea lui Benoulli pentru $x>0$ și $r\geq 1$ avem:

$x^r=(1+x-1)^r \geq 1+r(x-1)=1+rx-r \Rightarrow x^r \geq 1+rx-r$, (1).

Punând în (1) : $x=\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}>0$ și $r=\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}\geq 1 \Rightarrow$

$$\left(\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\right)^{\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}} \geq 1+\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}\cdot\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}-\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}=$$

$$=2-\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}} \Rightarrow \left(\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\right)^{\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}} \geq 2-\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right)^{\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}} \geq 6-\sum\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}.$$

Daniel Sitaru, Math Phenomenon Reloaded,A.090

Soluție.

Lema

If $a,b>0$ then

$$\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right)^{\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}} \geq 2-\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}.$$

Demonstrație

Din inegalitatea lui Benoulli pentru $x>0$ și $r\geq 1$ avem:

$x^r=(1+x-1)^r \geq 1+r(x-1)=1+rx-r \Rightarrow x^r \geq 1+rx-r$, (1).

Punând în (1) : $x=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}>0$ și $r=\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\geq 1\Rightarrow\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right)^{\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}}\geq 1+\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\cdot\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}-\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}=$

$=2-\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$LHS=\sum\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right)^{\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}}\overset{Lema}{\geq}\sum\left(2-\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\right)=6-\sum\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b$.

Remarca.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c>0$ then

$$\left(\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\right)^{\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}}\geq 2-\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema

If $a,b>0$ then

$$\left(\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\right)^{\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}}\geq 2-\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}.$$

Demonstrație

Din inegalitatea lui Benoulli pentru $x>0$ și $r\geq 1$ avem:

$x^r=(1+x-1)^r\geq 1+r(x-1)=1+rx-r\Rightarrow x^r\geq 1+rx-r$, (1).

Punând în (1) : $x=\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}>0$ și $r=\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}\geq 1\Rightarrow$

$\left(\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\right)^{\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}}\geq 1+\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}\cdot\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}-\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}=$

$$=2-\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}\Rightarrow\left(\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\right)^{\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}}\geq 2-\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Bibliografie:

1. C.Năstăsescu, C.Niță, M.Brandiburu, D. Joița , Exerciții de algebră, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1992.
2. China Northern ,MO 2009.
3. Radu Diaconu, Sibiu,RMM 7/2022.
4. Daniel Sitaru, Romania, Math Phenomenon Reloaded , Editura Studis, Iasi 2020.
5. Marin Chirciu, Inegalități algebrice 2, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2021.
6. Marin Chirciu, Inegalități geometrice 2, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2021.

Art 4700

4 Martie 2023

3. Inegalitatea lui Chebyshev

Marin Chirciu [2]

Articolul prezintă inegalitatea lui Chebyshev și aplicatii ale acesteia, selectate din diverse publicații de specialitate.

Inegalitatea lui Chebyshev:

Dacă n-uplurile $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ și $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ de numere reale sunt la fel ordonate , atunci

$$x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n \geq \frac{1}{n}(x_1+x_2+...+x_n)(y_1+y_2+...+y_n).$$

Dacă n-uplurile $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ și $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ de numere reale sunt invers ordonate , atunci

$$x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n \leq \frac{1}{n}(x_1+x_2+...+x_n)(y_1+y_2+...+y_n).$$

Aplicația1.

1) Să se demonstreze că:

$$x\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)+y\left(\sqrt{z}+\sqrt{x}\right)+z\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\leq 2\sqrt{3\left(x^3+y^3+z^3\right)},$$

oricare ar fi $x,y,z\in[0,\infty)$.

Ștefan Smarandache, București,GM 2/2019,E:1549

Soluție:

Folosim inegalitatea CBS și Cebâșev obținem succesiv:

$$M_s=\sum x\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\overset{CBS}{\leq}\sum x\sqrt{2(y+z)}=\sqrt{2}\sum x\sqrt{y+z}=\sqrt{2}\sum\sqrt{x}\sqrt{x(y+z)}\overset{CBS}{\leq}$$

$$\overset{CBS}{\leq}\sqrt{2}\sqrt{\sum x\cdot\sum x(y+z)}=\sqrt{2}\sqrt{\sum x\cdot 2\sum yz}=2\sqrt{\sum x\sum yz}\leq 2\sqrt{\sum x\sum x^2}\overset{Cebasev}{\leq}$$

$$\overset{Cebasev}{\leq}2\sqrt{3\sum x^3}=M_d$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z$.

2) Să se demonstreze că:

$$x\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sqrt{t}\right)+y\left(\sqrt{z}+\sqrt{t}+\sqrt{x}\right)+z\left(\sqrt{t}+\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)+z\left(\sqrt{t}+\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\leq 6\sqrt{\left(x^3+y^3+z^3+t^3\right)}$$

oricare ar fi $x,y,z,t\in[0,\infty)$.

[2] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”Pitești*

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

Folosim inegalitatea CBS și Cebâșev obținem succesiv:

$$M_s=\sum x\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sqrt{t}\right)\overset{CBS}{\leq}\sum x\sqrt{3(y+z+t)}=\sqrt{3}\sum x\sqrt{y+z+t}=\sqrt{3}\sum\sqrt{x}\sqrt{x(y+z+t)}\overset{CBS}{\leq}$$

$$\overset{CBS}{\leq}\sqrt{3}\sqrt{\sum x\cdot\sum x(y+z+t)}\leq\sqrt{3}\sqrt{\sum x\cdot 3\sum x^2}=3\sqrt{\sum x\sum x^2}\overset{Cebasev}{\leq}$$

$$\overset{Cebasev}{\leq}3\sqrt{4\sum x^3}=6\sqrt{\sum x^3}=M_d$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=t$.

3) Să se demonstreze că:

$$x_1\left(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}+\ldots+\sqrt{x_n}\right)+x_2\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_3}+\ldots+\sqrt{x_n}\right)+\ldots+x_n\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\ldots+\sqrt{x_{n-1}}\right)\leq$$

$$\leq(n-1)\sqrt{n\left(x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3\right)},$$

oricare ar fi $x_1,x_2,\ldots,x_n\in[0,\infty)$, unde $n\geq 2$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

Folosim inegalitatea CBS și Cebâșev obținem succesiv:

$$M_s=\sum x_1\left(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}+\ldots+\sqrt{x_n}\right)\overset{CBS}{\leq}\sum x_1\sqrt{(n-1)(x_2+x_3+\ldots+x_n)}=\sqrt{n-1}\sum x_1\sqrt{x_2+x_3+\ldots+x_n}=$$

$$=\sqrt{n-1}\sum\sqrt{x_1}\sqrt{x_1(x_2+x_3+\ldots+x_n)}\overset{CBS}{\leq}\sqrt{n-1}\sqrt{\sum x_1\cdot\sum x_1(x_2+x_3+\ldots+x_n)}\leq$$

$$\leq\sqrt{n-1}\sqrt{\sum x_1\cdot(n-1)\sum x_1^2}=(n-1)\sqrt{\sum x_1\sum x_1^2}\overset{Cebasev}{\leq}(n-1)\sqrt{n\sum x_1^3}=M_d$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

Aplicația2.

1) Fie $x,y,z>0$ astfel încât $xyz=1$. Arătați că

$$\sum x\sqrt{\frac{x^2}{y^2+z^2}}\geq\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Rahim Shahbazov,RMM 12/2019

Soluție .

Inegalitatea se scrie $\sum x^2\sqrt{\frac{1}{y^2+z^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Tripletele $\left(x^2, y^2, z^2\right)$ și $\left(\sqrt{\frac{1}{y^2+z^2}}, \sqrt{\frac{1}{z^2+x^2}}, \sqrt{\frac{1}{x^2+y^2}}\right)$ sunt la fel ordonate.

Folosind inegalitatea lui Chebyshev obținem:

$$M_s = \sum x^2\sqrt{\frac{1}{y^2+z^2}} \geq \frac{1}{3}\sum x^2 \sum\sqrt{\frac{1}{y^2+z^2}} = \frac{1}{3}\sum x^2 \sum\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}} \overset{(1)}{\geq} \frac{1}{3}\sum x^2 \frac{9}{\sum\sqrt{y^2+z^2}} =$$

$= \sum x^2 \frac{3}{\sum\sqrt{y^2+z^2}} \overset{(2)}{\geq} \frac{3}{\sqrt{2}} = M_d$, unde (1) rezultă din inegalitatea lui Bergstrőm, iar (2) este echivalentă cu $\sqrt{2}\sum x^2 \geq \sum\sqrt{y^2+z^2}$, (3).

Folosind inegalitatea lui Minkowski obținem

$\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{y^2+b^2}+\sqrt{z^2+c^2} \geq \sqrt{(x+y+z)^2+(a+b+c)^2}$, de unde

$\sum\sqrt{y^2+z^2} \geq (x+y+z)\sqrt{2}$, (4).

Din (3) și (4) este suficient să arătăm că:

$\sqrt{2}\sum x^2 \geq (x+y+z)\sqrt{2} \Leftrightarrow \sum x^2 \geq \sum x$, care rezultă din inegalitatea lui Chebyshev, inegalitatea mediilor și condiția din ipoteză $xyz=1$.

Într-adevăr:

$$\sum x^2 \geq \frac{1}{3}\sum x \sum x \geq \sqrt[3]{xyz}\sum x = \sum x.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

2) Fie $x, y, z > 0$ astfel încât $xyz=1$. Arătați că

$$\sum\sqrt{\frac{2x^2}{y+z}} \geq 3.$$

Marin Chirciu

Soluție .

Inegalitatea se scrie $\sum x\sqrt{\frac{1}{y+z}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Tripletele (x,y,z) și $\left(\sqrt{\frac{1}{y+z}},\sqrt{\frac{1}{z+x}},\sqrt{\frac{1}{x+y}}\right)$ sunt la fel ordonate.

Folosind inegalitatea lui Chebyshev obținem:

$$M_s=\sum x\sqrt{\frac{1}{y+z}}\geq\frac{1}{3}\sum x\sum\sqrt{\frac{1}{y+z}}=\frac{1}{3}\sum x\sum\frac{1}{\sqrt{y+z}}\overset{(1)}{\geq}\frac{1}{3}\sum x\frac{9}{\sum\sqrt{y+z}}=$$

$=\sum x\frac{3}{\sum\sqrt{y+z}}\overset{(2)}{\geq}\frac{3}{\sqrt{2}}=M_d$, unde (1) rezultă din inegalitatea lui Bergstrőm, iar (2) este echivalentă cu $\sqrt{2}\sum x\geq\sum\sqrt{y+z}$, (3).

Folosind inegalitatea lui Minkowski obținem

$\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{y^2+b^2}+\sqrt{z^2+c^2}\geq\sqrt{(x+y+z)^2+(a+b+c)^2}$, de unde

$\sum\sqrt{y+z}\geq\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\sqrt{2}$, (4).

Din (3) și (4) este suficient să arătăm că:

$\sqrt{2}\sum x\geq\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\sqrt{2}\Leftrightarrow\sum x\geq\sum\sqrt{x}$, care rezultă din inegalitatea lui Chebyshev, inegalitatea mediilor și condiția din ipoteză $xyz=1$.

Într-adevăr:

$$\sum x\geq\frac{1}{3}\sum\sqrt{x}\sum\sqrt{x}\geq\sqrt[3]{\sqrt{xyz}}\sum\sqrt{x}=\sum\sqrt{x}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

3) Fie $x,y,z>0$ astfel încât $xyz=1$. Arătați că

$$\sum\sqrt{\frac{2x^4}{y+z}}\geq 3.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție .</u>

Inegalitatea se scrie $\sum x^2\sqrt{\frac{1}{y+z}}\geq\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Tripletele (x^2,y^2,z^2) și $\left(\sqrt{\frac{1}{y+z}},\sqrt{\frac{1}{z+x}},\sqrt{\frac{1}{x+y}}\right)$ sunt la fel ordonate.

Folosind inegalitatea lui Chebyshev obținem:

$$M_s=\sum x^2\sqrt{\frac{1}{y+z}}\geq\frac{1}{3}\sum x^2\sum\sqrt{\frac{1}{y+z}}=\frac{1}{3}\sum x^2\sum\frac{1}{\sqrt{y+z}}\overset{(1)}{\geq}\frac{1}{3}\sum x^2\frac{9}{\sum\sqrt{y+z}}=$$

$=\sum x^2 \frac{3}{\sum\sqrt{y+z}} \overset{(2)}{\geq} \frac{3}{\sqrt{2}} = M_d$, unde (1) rezultă din inegalitatea lui Bergstrőm, iar (2) este echivalentă cu $\sqrt{2}\sum x^2 \geq \sum\sqrt{y+z}$, (3).

Folosind inegalitatea lui Minkowski obținem

$\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{y^2+b^2}+\sqrt{z^2+c^2} \geq \sqrt{(x+y+z)^2+(a+b+c)^2}$, de unde

$\sum\sqrt{y+z} \geq \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\sqrt{2}$, (4).

Din (3) și (4) este suficient să arătăm că:

$\sqrt{2}\sum x^2 \geq \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\sqrt{2} \Leftrightarrow \sum x^2 \geq \sum\sqrt{x}$, care rezultă din inegalitatea lui Chebyshev, inegalitatea mediilor și condiția din ipoteză $xyz=1$.

Într-adevăr:

$$\sum x^2 \geq \frac{1}{3}\sum x\sqrt{x}\sum\sqrt{x} \geq \sqrt{xyz}\sum\sqrt{x} = \sum\sqrt{x}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

4) Fie $x, y, z > 0$ astfel încât $xyz=1$ și $n \in \mathbf{N}^*$. Arătați că

$$\sum\sqrt{\frac{2x^{2n}}{y+z}} \geq 3.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție .</u>

Inegalitatea se scrie $\sum x^n\sqrt{\frac{1}{y+z}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Tripletele $\left(x^n, y^n, z^n\right)$ și $\left(\sqrt{\frac{1}{y+z}}, \sqrt{\frac{1}{z+x}}, \sqrt{\frac{1}{x+y}}\right)$ sunt la fel ordonate.

Folosind inegalitatea lui Chebyshev obținem:

$$M_s = \sum x^n\sqrt{\frac{1}{y+z}} \geq \frac{1}{3}\sum x^n\sum\sqrt{\frac{1}{y+z}} = \frac{1}{3}\sum x^n\sum\frac{1}{\sqrt{y+z}} \overset{(1)}{\geq} \frac{1}{3}\sum x^n\frac{9}{\sum\sqrt{y+z}} =$$

$=\sum x^n \frac{3}{\sum\sqrt{y+z}} \overset{(2)}{\geq} \frac{3}{\sqrt{2}} = M_d$, unde (1) rezultă din inegalitatea lui Bergstrőm, iar (2) este echivalentă cu $\sqrt{2}\sum x^n \geq \sum\sqrt{y+z}$, (3).

Folosind inegalitatea lui Minkowski obținem

$\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{y^2+b^2}+\sqrt{z^2+c^2}\geq\sqrt{(x+y+z)^2+(a+b+c)^2}$, de unde

$\sum\sqrt{y+z}\geq\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\sqrt{2}$, (4).

Din (3) și (4) este suficient să arătăm că:

$\sqrt{2}\sum x^n\geq\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\sqrt{2}\Leftrightarrow\sum x^n\geq\sum\sqrt{x}$, care rezultă din inegalitatea lui Chebyshev, inegalitatea mediilor și condiția din ipoteză $xyz=1$.

Într-adevăr:

$$\sum x^n\geq\frac{1}{3}\sum x^{n-\frac{1}{2}}\sum\sqrt{x}\geq\sqrt[3]{(xyz)^{n-\frac{1}{2}}}\sum\sqrt{x}=\sum\sqrt{x}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

5) Fie $x,y,z>0$ astfel încât $xyz=1$ și $n\in\mathbf{N}^*$. Arătați că

$$\sum\sqrt{\frac{2x^{2n}}{y^2+z^2}}\geq 3.$$

<u>Soluție</u>

Inegalitatea se scrie $\sum x^n\sqrt{\frac{1}{y^2+z^2}}\geq\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Tripletele $\left(x^n,y^n,z^n\right)$ și $\left(\sqrt{\frac{1}{y^2+z^2}},\sqrt{\frac{1}{z^2+x^2}},\sqrt{\frac{1}{x^2+y^2}}\right)$ sunt la fel ordonate.

Folosind inegalitatea lui Chebyshev obținem:

$$M_s=\sum x^n\sqrt{\frac{1}{y^2+z^2}}\geq\frac{1}{3}\sum x^n\sum\sqrt{\frac{1}{y^2+z^2}}=\frac{1}{3}\sum x^n\sum\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}\overset{(1)}{\geq}\frac{1}{3}\sum x^n\frac{9}{\sum\sqrt{y^2+z^2}}=$$

$=\sum x^n\frac{3}{\sum\sqrt{y^2+z^2}}\overset{(2)}{\geq}\frac{3}{\sqrt{2}}=M_d$, unde (1) rezultă din inegalitatea lui Bergstrőm, iar (2) este echivalentă cu $\sqrt{2}\sum x^n\geq\sum\sqrt{y^2+z^2}$, (3).

Folosind inegalitatea lui Minkowski obținem

$\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{y^2+b^2}+\sqrt{z^2+c^2}\geq\sqrt{(x+y+z)^2+(a+b+c)^2}$, de unde

$\sum\sqrt{y^2+z^2}\geq(x+y+z)\sqrt{2}$, (4).

Din (3) și (4) este suficient să arătăm că:

$\sqrt{2}\sum x^n \geq (x+y+z)\sqrt{2} \Leftrightarrow \sum x^n \geq \sum x$, care rezultă din inegalitatea lui Chebyshev, inegalitatea mediilor și condiția din ipoteză $xyz=1$.

Într-adevăr:

$$\sum x^n \geq \frac{1}{3}\sum x^{n-1}\sum x \geq \sqrt[3]{(xyz)^{n-1}}\sum x = \sum x.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

6) Fie $x,y,z>0$ astfel încât $xyz=1$. Arătați că

$$\sum\sqrt{\frac{2x}{y+z}} \geq 3.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție .</u>

Inegalitatea se scrie $\sum\sqrt{x}\sqrt{\frac{1}{y+z}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Tripletele $\left(\sqrt{x},\sqrt{y},\sqrt{z}\right)$ și $\left(\sqrt{\frac{1}{y+z}},\sqrt{\frac{1}{z+x}},\sqrt{\frac{1}{x+y}}\right)$ sunt la fel ordonate.

Folosind inegalitatea lui Chebyshev obținem:

$$M_s = \sum\sqrt{x}\sqrt{\frac{1}{y+z}} \geq \frac{1}{3}\sum\sqrt{x}\sum\sqrt{\frac{1}{y+z}} = \frac{1}{3}\sum\sqrt{x}\sum\frac{1}{\sqrt{y+z}} \overset{(1)}{\geq} \frac{1}{3}\sum\sqrt{x}\frac{9}{\sum\sqrt{y+z}} =$$

$= \sum\sqrt{x}\frac{3}{\sum\sqrt{y+z}} \overset{(2)}{\geq} \frac{3}{\sqrt{2}} = M_d$, unde (1) rezultă din inegalitatea lui Bergstrőm, iar (2) este echivalentă cu $\sqrt{2}\sum x \geq \sum\sqrt{y+z}$, (3).

Folosind inegalitatea lui Minkowski obținem

$\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{y^2+b^2}+\sqrt{z^2+c^2} \geq \sqrt{(x+y+z)^2+(a+b+c)^2}$, de unde

$\sum\sqrt{y+z} \geq \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\sqrt{2}$, (4).

Din (3) și (4) rezultă concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

<u>Aplicația3.</u>

1) Fie $a,b,c>0$ astfel încât $abc=1$. Arătați că

$$\sum \frac{\left(a^{10}+b^{10}\right)\left(a^{9}+b^{9}\right)}{\left(a^{4}+b^{4}\right)\left(a^{3}+b^{3}\right)} \geq 3.$$

Daniel Sitaru, Romania, RMM 2/2020

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Chebyshev obținem:

$$a^{10}+b^{10}=a^{6}\cdot a^{4}+b^{6}\cdot b^{4} \geq \frac{1}{2}\left(a^{6}+b^{6}\right)\left(a^{4}+b^{4}\right) \text{ și } a^{9}+b^{9}=a^{6}\cdot a^{3}+b^{6}\cdot b^{3} \geq \frac{1}{2}\left(a^{6}+b^{6}\right)\left(a^{3}+b^{3}\right).$$

Rezultă:

$$M_s=\sum \frac{\left(a^{10}+b^{10}\right)\left(a^{9}+b^{9}\right)}{\left(a^{4}+b^{4}\right)\left(a^{3}+b^{3}\right)} \geq \sum \frac{\frac{1}{2}\left(a^{6}+b^{6}\right)\left(a^{4}+b^{4}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(a^{6}+b^{6}\right)\left(a^{3}+b^{3}\right)}{\left(a^{4}+b^{4}\right)\left(a^{3}+b^{3}\right)}=\sum \frac{\left(a^{6}+b^{6}\right)^{2}}{4} \geq$$

$$\overset{Bergstrom}{\geq} \frac{\left(\sum \frac{a^{6}+b^{6}}{2}\right)^{2}}{3}=\frac{\left(\sum a^{6}\right)^{2}}{3} \overset{AM-GM}{\geq} \frac{\left(3\sqrt[3]{a^{6}b^{6}c^{6}}\right)^{2}}{3} \overset{abc=1}{=} \frac{3^{2}}{3}=3=M_d.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

2) Fie $a,b,c>0$ astfel încât $abc=1$ și $n,k,p\in\mathbf{N}^{*}$. Arătați că

$$\sum \frac{\left(a^{n+p}+b^{n+p}\right)\left(a^{k+p}+b^{k+p}\right)}{\left(a^{n}+b^{n}\right)\left(a^{k}+b^{k}\right)} \geq 3.$$

Marin Chirciu, Romania

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Chebyshev obținem:

$$a^{n+p}+b^{n+p}=a^{n}\cdot a^{p}+b^{n}\cdot b^{p} \geq \frac{1}{2}\left(a^{n}+b^{n}\right)\left(a^{p}+b^{p}\right) \text{și}$$

$$a^{k+p}+b^{k+p}=a^{k}\cdot a^{p}+b^{k}\cdot b^{p} \geq \frac{1}{2}\left(a^{k}+b^{k}\right)\left(a^{p}+b^{p}\right).$$

Rezultă:

$$M_s=\sum \frac{\left(a^{n+p}+b^{n+p}\right)\left(a^{k+p}+b^{k+p}\right)}{\left(a^{n}+b^{n}\right)\left(a^{k}+b^{k}\right)} \geq \sum \frac{\frac{1}{2}\left(a^{n}+b^{n}\right)\left(a^{p}+b^{p}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(a^{k}+b^{k}\right)\left(a^{p}+b^{p}\right)}{\left(a^{n}+b^{n}\right)\left(a^{k}+b^{k}\right)}=\sum \frac{\left(a^{p}+b^{p}\right)^{2}}{4} \geq$$

$$\overset{Bergstrom}{\geq} \frac{\left(\sum \frac{a^{p}+b^{p}}{2}\right)^{2}}{3}=\frac{\left(\sum a^{p}\right)^{2}}{3} \overset{AM-GM}{\geq} \frac{\left(3\sqrt[3]{a^{p}b^{p}c^{p}}\right)^{2}}{3} \overset{abc=1}{=} \frac{3^{2}}{3}=3=M_d.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Notă.

Pentru $n=4, k=3, p=6$ se obține problema propusă de Daniel Sitaru în RMM 2/2020.

Aplicația4.

1) MH-67. Let $a,b,c,d>0$ such that $abcd=16$. Prove that

$$a^2\sqrt{b+c}+b^2\sqrt{c+d}+c^2\sqrt{d+a}+d^2\sqrt{a+b}\le\frac{a^5+b^5+c^5+d^5}{4}.$$

Mihaela Berindeanu, București, Arhimede Mathematical Journal, Vol 6, No.1, Spring 2019

Soluție.

Cu inegalitatea CBS avem:

$\left(\sum a^2\sqrt{b+c}\right)^2\le\sum a^4\sum(b+c)=2\sum a\sum a^4$,de unde $2\sum a\sum a^4\ge\left(\sum a^2\sqrt{b+c}\right)^2$ (1).

Cu inegalitatea Chebyshev avem:

$\sum a^5=\sum a^4\cdot a\ge\frac{1}{4}\sum a^4\sum a$, (2).

Cu inegalitatea mediilor avem:

$\sum a^5\ge 4\sqrt[4]{(abcd)^5}=4\sqrt[4]{(16)^5}=128$, (3).

Din (1), (2) și (3) obținem:

$$a^5+b^5+c^5+d^5=\sqrt{\sum a^5\cdot\sum a^5}\ge\sqrt{128\cdot\frac{1}{4}\sum a^4\sum a}=\sqrt{16\cdot 2\sum a^4\sum a}\ge\sqrt{16\cdot\left(\sum a^2\sqrt{b+c}\right)^2}=$$

$=4\sum a^2\sqrt{b+c}$, de unde $\sum a^2\sqrt{b+c}\le\frac{a^5+b^5+c^5+d^5}{4}$.

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate dacă și numai dacă $a=b=c=d=2$.

Să coborâm numărul variabilelor de la patru variabile a,b,c,d la trei variabile a,b,c

2) Let $a,b,c>0$ such that $abc=8$. Prove that

$$a^2\sqrt{b+c}+b^2\sqrt{c+a}+c^2\sqrt{a+b}\le\frac{a^5+b^5+c^5}{4}.$$

Marin Chirciu, Pitești, Romania

Soluție.

Cu inegalitatea CBS avem:

$\left(\sum a^2\sqrt{b+c}\right)^2 \le \sum a^4 \sum (b+c) = 2\sum a \sum a^4$,de unde $2\sum a \sum a^4 \ge \left(\sum a^2\sqrt{b+c}\right)^2$ (1).

Cu inegalitatea Chebyshev avem:

$\sum a^5 = \sum a^4 \cdot a \ge \frac{1}{3}\sum a^4 \sum a$, (2).

Cu inegalitatea mediilor avem:

$\sum a^5 \ge 3\sqrt[3]{(abc)^5} = 3\sqrt[3]{(8)^5} = 96$, (3).

Din (1), (2) și (3) obținem:

$$a^5+b^5+c^5 = \sqrt{\sum a^5 \cdot \sum a^5} \ge \sqrt{96\cdot\frac{1}{3}\sum a^4 \sum a} = \sqrt{16\cdot 2\sum a^4 \sum a} \ge \sqrt{16\cdot\left(\sum a^2\sqrt{b+c}\right)^2} =$$

$= 4\sum a^2\sqrt{b+c}$, de unde $\sum a^2\sqrt{b+c} \le \frac{a^5+b^5+c^5}{4}$.

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate dacă și numai dacă $a=b=c=2$.

Remarcă.

Să ridicăm numărul variabilelor de la patru variabile a,b,c,d la cinci variabile a,b,c,d,e .

3) Let $a,b,c,d,e>0$ such that $abcde=32$. Prove that

$$a^2\sqrt{b+c}+b^2\sqrt{c+d}+c^2\sqrt{d+e}+d^2\sqrt{e+a}+e^2\sqrt{a+b} \le \frac{a^5+b^5+c^5+d^5+e^5}{4}.$$

Marin Chirciu, Pitești, Romania

Soluție.

Cu inegalitatea CBS avem:

$\left(\sum a^2\sqrt{b+c}\right)^2 \le \sum a^4 \sum (b+c) = 2\sum a \sum a^4$,de unde $2\sum a \sum a^4 \ge \left(\sum a^2\sqrt{b+c}\right)^2$ (1).

Cu inegalitatea Chebyshev avem:

$\sum a^5 = \sum a^4 \cdot a \ge \frac{1}{5}\sum a^4 \sum a$, (2).

Cu inegalitatea mediilor avem:

$\sum a^5 \ge 5\sqrt[5]{(abcde)^5} = 5\sqrt[5]{(32)^5} = 160$, (3).

Din (1), (2) și (3) obținem:

$$a^5+b^5+c^5+d^5 = \sqrt{\sum a^5 \cdot \sum a^5} \ge \sqrt{160\cdot\frac{1}{5}\sum a^4 \sum a} = \sqrt{16\cdot 2\sum a^4 \sum a} \ge \sqrt{16\cdot\left(\sum a^2\sqrt{b+c}\right)^2} =$$

$=4\sum a^2\sqrt{b+c}$, de unde $\sum a^2\sqrt{b+c}\le\frac{a^5+b^5+c^5+d^5+e^5}{4}$.

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate dacă și numai dacă $a=b=c=d=e=2$.

Remarcă.

Să generalizăm problema.

4) Let $a_1,a_2,...,a_n>0$ such that $a_1a_2...a_n=2^n$. Prove that

$$a_1^2\sqrt{a_2+a_3}+a_2^2\sqrt{a_3+a_4}+...+a_n^2\sqrt{a_1+a_2}\le\frac{a_1^5+a_2^5+...+a_n^5}{4}.$$

Marin Chirciu, Pitești, Romania

Soluție.

Cu inegalitatea CBS avem:

$\left(a_1^2\sqrt{a_2+a_3}\right)^2\le\sum a_1^4\sum(a_2+a_3)=2\sum a_1\sum a_1^4$,de unde $2\sum a_1\sum a_1^4\ge\left(a_1^2\sqrt{a_2+a_3}\right)^2$ (1).

Cu inegalitatea Chebyshev avem:

$\sum a_1^5=\sum a_1^4\cdot a_1\ge\frac{1}{n}\sum a_1^4\sum a_1$, (2).

Cu inegalitatea mediilor avem:

$\sum a_1^5\ge n\sqrt[n]{(a_1a_2...a_n)^5}=n\sqrt[n]{(2^n)^5}=n\cdot 2^5=32n$, (3).

Din (1), (2) și (3) obținem:

$$a_1^5+a_2^5+...+a_n^5=\sqrt{\sum a_1^5\cdot\sum a_1^5}\ge\sqrt{32n\cdot\frac{1}{n}\sum a_1^4\sum a_1}=\sqrt{16\cdot 2\sum a_1^4\sum a_1}\ge\sqrt{16\cdot\left(a_1^2\sqrt{a_2+a_3}\right)^2}=$$

$=4\sum a_1^2\sqrt{a_2+a_3}$, de unde $\sum a_1^2\sqrt{a_2+a_3}\le\frac{a_1^5+a_2^5+...+a_n^5}{4}$.

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate dacă și numai dacă

$a_1=a_2=...=a_n=2$.

Notă.

Pentru $n=4$ se obține Problema MH-67 din Arhimede Mathematical Journal **,**

Volume No.1,Spring 2019, Proposed by Mihela Berindeanu, București, Romania

5) Let $a,b,c>0$ such that $abc=8$. Prove that

$$a^3\sqrt{b+c}+b^3\sqrt{c+a}+c^3\sqrt{a+b}\le\frac{a^7+b^7+c^7}{8}.$$

Marin Chirciu, Pitești, Romania

Soluție.

Cu inegalitatea CBS avem:

$\left(\sum a^3\sqrt{b+c}\right)^2\le\sum a^6\sum(b+c)=2\sum a\sum a^6$,de unde $2\sum a\sum a^6\ge\left(\sum a^3\sqrt{b+c}\right)^2$ (1).

Cu inegalitatea Chebyshev avem:

$\sum a^7=\sum a^6\cdot a\ge\frac{1}{3}\sum a^6\sum a$, (2).

Cu inegalitatea mediilor avem:

$\sum a^7\ge 3\sqrt[3]{(abc)^7}=3\sqrt[3]{(8)^7}=384$, (3).

Din (1), (2) și (3) obținem:

$$a^7+b^7+c^7=\sqrt{\sum a^7\cdot\sum a^7}\ge\sqrt{384\cdot\frac{1}{3}\sum a^4\sum a}=\sqrt{64\cdot 2\sum a^4\sum a}\ge\sqrt{64\cdot\left(\sum a^2\sqrt{b+c}\right)^2}=$$

$=8\sum a^2\sqrt{b+c}$, de unde $\sum a^2\sqrt{b+c}\le\frac{a^7+b^7+c^7}{8}$.

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate dacă și numai dacă $a=b=c=2$.

6) Let $a,b,c>0$ such that $abc=8$ and $n\in\mathbf{N}$. Prove that

$$a^n\sqrt{b+c}+b^n\sqrt{c+a}+c^n\sqrt{a+b}\le\frac{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}{2^n}.$$

Marin Chirciu, Pitești, Romania

Soluție.

Cu inegalitatea CBS avem:

$\left(\sum a^n\sqrt{b+c}\right)^2\le\sum a^{2n}\sum(b+c)=2\sum a\sum a^{2n}$,de unde $2\sum a\sum a^{2n}\ge\left(\sum a^n\sqrt{b+c}\right)^2$ (1).

Cu inegalitatea Chebyshev avem:

$\sum a^{2n+1}=\sum a^{2n}\cdot a\ge\frac{1}{3}\sum a^{2n}\sum a$, (2).

Cu inegalitatea mediilor avem:

$\sum a^{2n+1}\ge 3\sqrt[3]{(abc)^{2n+1}}=3\sqrt[3]{(8)^{2n+1}}=3\cdot 2^{2n+1}$, (3).

Din (1), (2) și (3) obținem:

$$a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}=\sqrt{\sum a^{2n+1}\cdot\sum a^{2n+1}}\geq\sqrt{3\cdot 2^{2n+1}\cdot\frac{1}{3}\sum a^{2n}\sum a}=\sqrt{2^{2n}\cdot 2\sum a^4\sum a}\geq$$

$$\geq\sqrt{2^{2n}\cdot\left(\sum a^2\sqrt{b+c}\right)^2}=2^n\sum a^2\sqrt{b+c}\text{, de unde }\sum a^n\sqrt{b+c}\leq\frac{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}{2^n}.$$

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate dacă și numai dacă $a=b=c=2$.

7) Let $a,b,c,d>0$ such that $abcd=16$ and $n\in\mathbf{N}$. Prove that

$$a^n\sqrt{b+c}+b^n\sqrt{c+d}+c^n\sqrt{d+a}+d^n\sqrt{a+b}\leq\frac{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}+d^{2n+1}}{2^n}.$$

Marin Chirciu, Pitești, Romania

Soluție.

Cu inegalitatea CBS avem:

$$\left(\sum a^n\sqrt{b+c}\right)^2\leq\sum a^{2n}\sum(b+c)=2\sum a\sum a^{2n}\text{ ,de unde }2\sum a\sum a^{2n}\geq\left(\sum a^n\sqrt{b+c}\right)^2\text{ (1).}$$

Cu inegalitatea Chebyshev avem:

$$\sum a^{2n+1}=\sum a^{2n}\cdot a\geq\frac{1}{4}\sum a^{2n}\sum a\text{, (2).}$$

Cu inegalitatea mediilor avem:

$$\sum a^{2n+1}\geq 4\sqrt[4]{(abcd)^{2n+1}}=4\sqrt[4]{(16)^{2n+1}}=4\cdot 2^{2n+1}=2^{2n+3}\text{, (3).}$$

Din (1), (2) și (3) obținem:

$$a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}+d^{2n+1}=\sqrt{\sum a^{2n+1}\cdot\sum a^{2n+1}}\geq\sqrt{4\cdot 2^{2n+1}\cdot\frac{1}{4}\sum a^{2n}\sum a}=\sqrt{2^{2n}\cdot 2\sum a^4\sum a}\geq$$

$$\geq\sqrt{2^{2n}\cdot\left(\sum a^2\sqrt{b+c}\right)^2}=2^n\sum a^2\sqrt{b+c}\text{, de unde }\sum a^n\sqrt{b+c}\leq\frac{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}+d^{2n+1}}{2^n}.$$

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate dacă și numai dacă $a=b=c=d=2$.

Aplicația5.

1) If $x,y,z>0$ such that $xyz=1$ then

$$\frac{1}{x^5(y+z)}+\frac{1}{y^5(z+x)}+\frac{1}{z^5(x+y)}\geq\frac{3}{2}.$$

Rajeev Rastogi, India,RMM5/2020, Cyclic Inequality -749

Soluție.

Notând $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c}$ problema se reformulează:

2) If $a,b,c>0$ such that $abc=1$ then

$$\frac{a^4}{b+c}+\frac{b^4}{c+a}+\frac{c^4}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Demonstrație

Folosim inegalitatea lui Chebyshev pentru tripletele la fel ordonate $\left(a^3,b^3,c^3\right)$ și

$\left(\frac{a}{b+c},\frac{b}{c+a},\frac{c}{a+b}\right)$ obținem:

$M_s=\sum\frac{a^4}{b+c}=\sum a^3\cdot\frac{a}{b+c}\geq\frac{1}{3}\sum a^3\sum\frac{a}{b+c}\overset{(1)}{\geq}1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}=M_d$, unde (1)rezultă din

$\frac{1}{3}\sum a^3\overset{AGM}{\geq}\sqrt[3]{abc}=1$ și $\sum\frac{a}{b+c}\overset{Nesbitt}{\geq}\frac{3}{2}$, cu egalitate pentru $a=b=c=1$.

Deducem că are loc inegalitatea din enunț cu egalitate dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

3) If $x,y,z>0$ such that $xyz=1$ and $n\in\mathbf{N}, n\geq 2$ then

$$\frac{1}{x^n(y+z)}+\frac{1}{y^n(z+x)}+\frac{1}{z^n(x+y)}\geq\frac{3}{2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Notând $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c}$ problema se reformulează:

4) If $a,b,c>0$ such that $abc=1$ $n\in\mathbf{N}, n\geq 2$ then

$$\frac{a^{n-1}}{b+c}+\frac{b^{n-1}}{c+a}+\frac{c^{n-1}}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Demonstrație

Folosim inegalitatea lui Chebyshev pentru tripletele la fel ordonate $\left(a^{n-2},b^{n-2},c^{n-2}\right)$ și

$\left(\frac{a}{b+c},\frac{b}{c+a},\frac{c}{a+b}\right)$ obținem:

$M_s=\sum\frac{a^{n-1}}{b+c}=\sum a^{n-2}\cdot\frac{a}{b+c}\geq\frac{1}{3}\sum a^{n-2}\sum\frac{a}{b+c}\overset{(1)}{\geq}1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}=M_d$, unde (1)rezultă din

$\frac{1}{3}\sum a^{n-2}\overset{AGM}{\geq}\sqrt[3]{(abc)^{n-2}}=1$ și $\sum\frac{a}{b+c}\overset{Nesbitt}{\geq}\frac{3}{2}$, cu egalitate pentru $a=b=c=1$.

Deducem că are loc inegalitatea din enunț cu egalitate dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Notă.

Pentru $n=5$ se obține Cyclic Inequality -749, propusă de Rajeev Rastogi, India în RMM 5/2020.

Aplicația6.

1) If $a,b,c>0$ then find the minimal value of

$$A=\frac{3a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{5c}{a+b}.$$

Anibal Asperphys, Sensei del Algebra 4/2022

Soluție

Folosind inegalitatea lui Cebyshev pentru tripletele la fel ordonate

$(3,4,5)$ și $\left(\frac{a}{b+c},\frac{b}{c+a},\frac{c}{a+b}\right)$ obținem:

$$A=\frac{3a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{5c}{a+b}\overset{Chebyshev}{\geq}\frac{1}{3}(3+4+5)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\overset{Nesbitt}{\geq}4\cdot\frac{3}{2}=6.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Deducem că $\min A=6$ pentru $a=b=c$.

2) Let $\lambda>0$ fixed. If $a,b,c>0$ then find the minimal value of

$$A=\frac{\lambda a}{b+c}+\frac{(\lambda+1)b}{c+a}+\frac{(\lambda+2)c}{a+b}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Folosind inegalitatea lui Cebyshev pentru tripletele la fel ordonate

$(\lambda,\lambda+1,\lambda+2)$ și $\left(\frac{a}{b+c},\frac{b}{c+a},\frac{c}{a+b}\right)$ obținem:

$$A=\frac{\lambda a}{b+c}+\frac{(\lambda+1)b}{c+a}+\frac{(\lambda+2)c}{a+b}\overset{Chebyshev}{\geq}\frac{1}{3}(\lambda+\lambda+1+\lambda+2)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\overset{Nesbitt}{\geq}(\lambda+1)\cdot\frac{3}{2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Deducem că $\min A=\frac{3}{2}(\lambda+1)$ pentru $a=b=c$.

Aplicația7.

1) If $a,b,c>0$, $ab+bc+ca+2abc=1$ then

$$\sum \frac{b^2+c^2}{(a+1)^2} \geq \frac{2(abc+1)}{a+b+c-abc+2}.$$

Phan Nguoc Chau, Vietnam, RMM 11/2022

Soluție.

Lema

If $a,b,c>0$, $ab+bc+ca+2abc=1$ then

$$\sum \frac{b^2+c^2}{(a+1)^2} \geq \frac{2}{3}.$$

Demonstrație.

$$ab+bc+ca+2abc=1 \Leftrightarrow \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2.$$

Tripletele $\left(b^2+c^2, c^2+a^2, a^2+b^2\right)$ și $\left(\frac{1}{(a+1)^2}, \frac{1}{(b+1)^2}, \frac{1}{(c+1)^2}\right)$ sunt la fel ordonate.

Cu inegalitatea lui Chebyshev obținem:

$$\sum \frac{b^2+c^2}{(a+1)^2} \geq \frac{1}{3}\sum\left(b^2+c^2\right)\sum \frac{1}{(a+1)^2} = \frac{2}{3}\sum a^2 \sum \frac{1}{(a+1)^2} \overset{CS}{\geq} \frac{2}{3}\sum a^2 \frac{\left(\sum \frac{1}{a+1}\right)^2}{3} =$$

$$= \frac{2}{3}\sum a^2 \cdot \frac{2^2}{3} = \frac{8}{9}\sum a^2 \overset{(1)}{\geq} \frac{8}{9}\cdot\frac{3}{4} = \frac{2}{3},$$ unde (1) $\Leftrightarrow \sum a^2 \geq \frac{3}{4}$, care rezultă din:

$$1 = ab+bc+ca+2abc \overset{AM-GM}{\geq} 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+2abc = 3t^2+2t^3 \Rightarrow t \leq \frac{1}{2} \Rightarrow abc \leq \frac{1}{8}, (2).$$

$$ab+bc+ca = 1-2abc \overset{(2)}{\geq} 1-2\cdot\frac{1}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow ab+bc+ca \geq \frac{3}{4}, (3).$$

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \overset{(3)}{\geq} 3\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow a+b+c \geq \frac{3}{2}, (4).$$

Din $\sum a^2 \geq \sum ab \geq \frac{3}{4} \Rightarrow \sum a^2 \geq \frac{3}{4}$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** și $\frac{2(abc+1)}{a+b+c-abc+2} \leq \frac{2}{3}$, vezi (2), (3), (4) obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{2}$.

2) If $a,b,c>0$, $ab+bc+ca+2abc=1$ then

$$\sum\frac{b^2+c^2}{(a+1)^2}\geq\frac{2}{3}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema

If $a,b,c>0$, $ab+bc+ca+2abc=1$ then

$$\sum\frac{b^2+c^2}{(a+1)^2}\geq\frac{2}{3}.$$

Demonstrație.

$$ab+bc+ca+2abc=1\Leftrightarrow\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2.$$

Tripletele $\left(b^2+c^2,c^2+a^2,a^2+b^2\right)$ și $\left(\frac{1}{(a+1)^2},\frac{1}{(b+1)^2},\frac{1}{(c+1)^2}\right)$ sunt la fel ordonate.

Cu inegalitatea lui Chebyshev obținem:

$$\sum\frac{b^2+c^2}{(a+1)^2}\geq\frac{1}{3}\sum\left(b^2+c^2\right)\sum\frac{1}{(a+1)^2}=\frac{2}{3}\sum a^2\sum\frac{1}{(a+1)^2}\overset{CS}{\geq}\frac{2}{3}\sum a^2\frac{\left(\sum\frac{1}{a+1}\right)^2}{3}=$$

$=\frac{2}{3}\sum a^2\cdot\frac{2^2}{3}=\frac{8}{9}\sum a^2\overset{(1)}{\geq}\frac{8}{9}\cdot\frac{3}{4}=\frac{2}{3}$, unde (1) $\Leftrightarrow\sum a^2\geq\frac{3}{4}$, care rezultă din:

$$1=ab+bc+ca+2abc\overset{AM-GM}{\geq}3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+2abc=3t^2+2t^3\Rightarrow t\leq\frac{1}{2}\Rightarrow abc\leq\frac{1}{8},(2).$$

$$ab+bc+ca=1-2abc\overset{(2)}{\geq}1-2\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{4}\Rightarrow ab+bc+ca\geq\frac{3}{4},(3).$$

$$(a+b+c)^2\geq3(ab+bc+ca)\overset{(3)}{\geq}3\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{4}\Rightarrow a+b+c\geq\frac{3}{2},(4).$$

Din $\sum a^2\geq\sum ab\geq\frac{3}{4}\Rightarrow\sum a^2\geq\frac{3}{4}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{2}$.

3) If $a,b,c>0$, $ab+bc+ca+2abc=1$ then

$$\sum \frac{b^2+c^2}{(a+1)^2} \geq \frac{8abc}{a+b+c}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema

If $a,b,c>0$, $ab+bc+ca+2abc=1$ then

$$\sum \frac{b^2+c^2}{(a+1)^2} \geq \frac{2}{3}.$$

Demonstrație.

$$ab+bc+ca+2abc=1 \Leftrightarrow \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2.$$

Tripletele $\left(b^2+c^2, c^2+a^2, a^2+b^2\right)$ și $\left(\frac{1}{(a+1)^2}, \frac{1}{(b+1)^2}, \frac{1}{(c+1)^2}\right)$ sunt la fel ordonate.

Cu inegalitatea lui Chebyshev obținem:

$$\sum \frac{b^2+c^2}{(a+1)^2} \geq \frac{1}{3}\sum\left(b^2+c^2\right)\sum \frac{1}{(a+1)^2} = \frac{2}{3}\sum a^2 \sum \frac{1}{(a+1)^2} \overset{CS}{\geq} \frac{2}{3}\sum a^2 \frac{\left(\sum \frac{1}{a+1}\right)^2}{3} =$$

$$= \frac{2}{3}\sum a^2 \cdot \frac{2^2}{3} = \frac{8}{9}\sum a^2 \overset{(1)}{\geq} \frac{8}{9}\cdot\frac{3}{4} = \frac{2}{3},$$ unde (1) $\Leftrightarrow \sum a^2 \geq \frac{3}{4}$, care rezultă din:

$$1 = ab+bc+ca+2abc \overset{AM-GM}{\geq} 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+2abc = 3t^2+2t^3 \Rightarrow t \leq \frac{1}{2} \Rightarrow abc \leq \frac{1}{8}, (2).$$

$$ab+bc+ca = 1-2abc \overset{(2)}{\geq} 1-2\cdot\frac{1}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow ab+bc+ca \geq \frac{3}{4}, (3).$$

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \overset{(3)}{\geq} 3\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow a+b+c \geq \frac{3}{2}, (4).$$

Din $\sum a^2 \geq \sum ab \geq \frac{3}{4} \Rightarrow \sum a^2 \geq \frac{3}{4}$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** și $\frac{8abc}{a+b+c} \leq \frac{2}{3}$, vezi(2),(3),(4) obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{2}$.

4) If $a,b,c>0$, $ab+bc+ca+abc=4$ then

$$\sum\frac{b^2+c^2}{(a+2)^2}\geq\frac{2abc}{a+b+c}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema

If $a,b,c>0$, $ab+bc+ca+abc=4$ then

$$\sum\frac{b^2+c^2}{(a+2)^2}\geq\frac{2}{3}.$$

Demonstrație.

$$ab+bc+ca+abc=4\Leftrightarrow\Leftrightarrow\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}=1.$$

Tripletele $\left(b^2+c^2,c^2+a^2,a^2+b^2\right)$ și $\left(\frac{1}{(a+2)^2},\frac{1}{(b+2)^2},\frac{1}{(c+2)^2}\right)$ sunt la fel ordonate.

Cu inegalitatea lui Chebyshev obținem:

$$\sum\frac{b^2+c^2}{(a+2)^2}\geq\frac{1}{3}\sum\left(b^2+c^2\right)\sum\frac{1}{(a+2)^2}=\frac{2}{3}\sum a^2\sum\frac{1}{(a+2)^2}\overset{CS}{\geq}\frac{2}{3}\sum a^2\frac{\left(\sum\frac{1}{a+2}\right)^2}{3}=$$

$=\frac{2}{3}\sum a^2\cdot\frac{1^2}{3}=\frac{2}{9}\sum a^2\overset{(1)}{\geq}\frac{2}{9}\cdot 3=\frac{2}{3}$, unde (1) $\Leftrightarrow\sum a^2\geq 3$, care rezultă din:

$4=ab+bc+ca+abc\overset{AM-GM}{\geq}4\sqrt[4]{a^3b^3c^3}\Rightarrow abc\leq 1$, (2).

$ab+bc+ca=4-abc\overset{(2)}{\geq}4-1=3\Rightarrow ab+bc+ca\geq 3$, (3).

$(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)\overset{(3)}{\geq}3\cdot 3=9\Rightarrow a+b+c\geq 3$, (4).

Din $\sum a^2\geq\sum ab\geq 3\Rightarrow\sum a^2\geq 3$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** și $\frac{2abc}{a+b+c}\leq\frac{2}{3}$, vezi (2), (3), (4) obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

5) If $a,b,c>0$, $a+b+c+2=abc$ then

$$\sum \frac{b^2+c^2}{(a+1)^2} \geq \frac{32}{ab+bc+ca}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema

If $a,b,c>0$, $a+b+c+2=abc$ then

$$\sum \frac{b^2+c^2}{(a+1)^2} \geq \frac{8}{3}.$$

Demonstrație.

$a+b+c+2=abc \Leftrightarrow \frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=1$.

Tripletele $\left(b^2+c^2, c^2+a^2, a^2+b^2\right)$ și $\left(\frac{1}{(a+1)^2}, \frac{1}{(b+1)^2}, \frac{1}{(c+1)^2}\right)$ sunt la fel ordonate.

Cu inegalitatea lui Chebyshev obținem:

$$\sum \frac{b^2+c^2}{(a+1)^2} \geq \frac{1}{3}\sum\left(b^2+c^2\right)\sum \frac{1}{(a+1)^2} = \frac{2}{3}\sum a^2 \sum \frac{1}{(a+1)^2} \overset{CS}{\geq} \frac{2}{3}\sum a^2 \frac{\left(\sum \frac{1}{a+1}\right)^2}{3} =$$

$= \frac{2}{3}\sum a^2 \cdot \frac{1^2}{3} = \frac{2}{9}\sum a^2 \overset{(1)}{\geq} \frac{2}{9}\cdot 12 = \frac{8}{3}$, unde (1) $\Leftrightarrow \sum a^2 \geq 12$, care rezultă din:

$abc = a+b+c+2 \overset{AM-GM}{\geq} 4\sqrt[4]{2abc} \Rightarrow abc \geq 8$, (2).

$ab+bc+ca \overset{AM-GM}{\geq} 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \overset{(2)}{\geq} 3\sqrt[3]{8^2} = 12 \Rightarrow ab+bc+ca \geq 12$, (3).

$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \overset{(3)}{\geq} 3\cdot 12 = 36 \Rightarrow a+b+c \geq 6$, (4).

Din $\sum a^2 \geq \sum ab \geq 12 \Rightarrow \sum a^2 \geq 12$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** și $\frac{32}{ab+bc+ca} \leq \frac{8}{3}$, vezi (2), (3), (4), obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=2$.

Aplicația8.

1) If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 4046$ then

$$\sum \frac{x^3}{y^2 + z^2} \geq 2023.$$

Elton Papanikolla,Mathematical Olympiads, 1/2023

Soluție

Lema.

Tripletele (x, y, z) și $\left(\frac{x^2}{y^2+z^2}, \frac{y^2}{z^2+x^2}, \frac{z^2}{x^2+y^2}\right)$ sunt la fel ordonate.

Folosind inegalitatea lui Chebyshev obținem:

$$LHS = \sum \frac{x^3}{y^2+z^2} = \sum x \cdot \frac{x^2}{y^2+z^2} \overset{Chebyshev}{\geq} \frac{1}{3} \sum x \sum \frac{x^2}{y^2+z^2} \overset{Nesbitt}{\geq} \frac{1}{3} \cdot 4046 \cdot \frac{3}{2} = 2023 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{4046}{3}$.

2) If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ and $n \in \mathbf{N}$ then

$$\sum \frac{x^{n+1}}{y^n + z^n} \geq \frac{1}{2}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Tripletele (x, y, z) și $\left(\frac{x^n}{y^n+z^n}, \frac{y^n}{z^n+x^n}, \frac{z^n}{x^n+y^n}\right)$ sunt la fel ordonate.

Folosind inegalitatea lui Chebyshev obținem:

$$LHS = \sum \frac{x^{n+1}}{y^n+z^n} = \sum x \cdot \frac{x^n}{y^n+z^n} \overset{Chebyshev}{\geq} \frac{1}{3} \sum x \sum \frac{x^n}{y^n+z^n} \overset{Nesbitt}{\geq} \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Aplicația19.

1) In acute ΔABC

$$\sum m_a \sqrt{\cot A} > 6r.$$

Vasile Mircea Popa,RMM 2/2023

Soluție

Tripletele (m_a, m_b, m_c) și $\left(\sqrt{\cot A}, \sqrt{\cot B}, \sqrt{\cot C}\right)$ in acute sunt la fel ordonate.

Cu inegalitatea lui Chebyshev obținem:

$$LHS = \sum m_a \sqrt{\cot A} \overset{Chebyshev}{\geq} \frac{1}{3} \sum m_a \sum \sqrt{\cot A} > \frac{1}{3} \cdot 9r \cdot 2 = 6r = RHS.$$

Am folosit mai sus $\sum m_a \geq 9r$ și $\sum \sqrt{\cot A} > 2$, care rezultă din:

Cu substituția $(x, y, z) = (\cot A, \cot B, \cot C)$, $xy + yz + zx = 1$ avem:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \overset{AM-GM}{\geq} 2\sqrt{\sqrt{x}\left(\sqrt{y} + \sqrt{z}\right)} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}{2}\right)^4 \geq x\left(\sqrt{y} + \sqrt{z}\right)^2 = x\left(y + z + 2\sqrt{yz}\right) > xy + yz + zx = 1.$$

2) In acute ΔABC

$$\sum m_a \cot A \geq 3\sqrt{3}r.$$

Marin Chirciu

Soluție

Tripletele (m_a, m_b, m_c) și $(\cot A, \cot B, \cot C)$ in acute sunt la fel ordonate.

Cu inegalitatea lui Chebyshev obținem:

$$LHS = \sum m_a \cot A \overset{Chebyshev}{\geq} \frac{1}{3} \sum m_a \sum \cot A \geq \frac{1}{3} \cdot 9r \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}r = RHS.$$

Am folosit mai sus $\sum m_a \geq 9r$ și $\sum \cot A \geq 3\sqrt{3}$, care rezultă din:

$$\sum \cot A = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2pr} \geq 3\sqrt{3}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3) In acute ΔABC

$$\sum h_a \cot A \geq 3\sqrt{3}r.$$

Marin Chirciu

Soluție

Tripletele (h_a, h_b, h_c) și $(\cot A, \cot B, \cot C)$ in acute sunt la fel ordonate.

Cu inegalitatea lui Chebyshev obținem:

$$LHS = \sum h_a \cot A \overset{Chebyshev}{\geq} \frac{1}{3} \sum h_a \sum \cot A \geq \frac{1}{3} \cdot 9r \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}r = RHS.$$

Am folosit mai sus $\sum h_a \geq 9r$ și $\sum \cot A \geq 3\sqrt{3}$, care rezultă din:

$$\sum \cot A = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2pr} \geq 3\sqrt{3}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

4) In acute ΔABC

$$\sum w_a \cot A \geq 3\sqrt{3}r.$$

Marin Chirciu

Soluție

Tripletele (w_a, w_b, w_c) și $(\cot A, \cot B, \cot C)$ in acute sunt la fel ordonate.

Cu inegalitatea lui Chebyshev obținem:

$$LHS = \sum w_a \cot A \overset{Chebyshev}{\geq} \frac{1}{3}\sum w_a \sum \cot A \geq \frac{1}{3}\cdot 9r \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}r = RHS.$$

Am folosit mai sus $\sum w_a \geq 9r$ și $\sum \cot A \geq 3\sqrt{3}$, care rezultă din:

$$\sum \cot A = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2pr} \geq 3\sqrt{3}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

5) In acute ΔABC

$$\sum s_a \cot A \geq 3\sqrt{3}r.$$

Marin Chirciu

Soluție

Tripletele (s_a, s_b, s_c) și $(\cot A, \cot B, \cot C)$ in acute sunt la fel ordonate.

Cu inegalitatea lui Chebyshev obținem:

$$LHS = \sum s_a \cot A \overset{Chebyshev}{\geq} \frac{1}{3}\sum s_a \sum \cot A \geq \frac{1}{3}\cdot 9r \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}r = RHS.$$

Am folosit mai sus $\sum w_a \geq 9r$ și $\sum \cot A \geq 3\sqrt{3}$, care rezultă din:

$$\sum \cot A = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2pr} \geq 3\sqrt{3}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

6) In acute ΔABC

$$\sum r_a \cot A \geq 3\sqrt{3}r.$$

Marin Chirciu

Soluție

Tripletele (r_a, r_b, r_c) și $(\cot A, \cot B, \cot C)$ in acute sunt la fel ordonate.

Cu inegalitatea lui Chebyshev obținem:

$$LHS = \sum r_a \cot A \overset{Chebyshev}{\geq} \frac{1}{3}\sum r_a \sum \cot A \geq \frac{1}{3}\cdot 9r\cdot\sqrt{3} = 3\sqrt{3}r = RHS .$$

Am folosit mai sus $\sum r_a \geq 9r$ și $\sum \cot A \geq 3\sqrt{3}$, care rezultă din:

$$\sum \cot A = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2pr} \geq 3\sqrt{3} .$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

7) In acute ΔABC

$$\sum m_a \cos A \geq 3r\left(1+\frac{r}{R}\right).$$

Marin Chirciu

Soluție

Tripletele (m_a, m_b, m_c) și $(\cos A, \cos B, \cos C)$ in acute sunt la fel ordonate.

Cu inegalitatea lui Chebyshev obținem:

$$LHS = \sum m_a \cos A \overset{Chebyshev}{\geq} \frac{1}{3}\sum m_a \sum \cos A \geq \frac{1}{3}\cdot 9r\cdot\left(1+\frac{r}{R}\right) = 3r\left(1+\frac{r}{R}\right) = RHS .$$

Am folosit mai sus $\sum m_a \geq 9r$ și $\sum \cos A = 1+\frac{r}{R}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

In acute ΔABC

$$\sum h_a \cos A \geq 3r\left(1+\frac{r}{R}\right).$$

Marin Chirciu

Soluție

Tripletele (h_a, h_b, h_c) și $(\cos A, \cos B, \cos C)$ in acute sunt la fel ordonate.

Cu inegalitatea lui Chebyshev obținem:

$$LHS = \sum h_a \cos A \overset{Chebyshev}{\geq} \frac{1}{3}\sum h_a \sum \cos A \geq \frac{1}{3}\cdot 9r\cdot\left(1+\frac{r}{R}\right) = 3r\left(1+\frac{r}{R}\right) = RHS .$$

Am folosit mai sus $\sum h_a \geq 9r$ și $\sum \cos A = 1 + \frac{r}{R}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

8) In acute ΔABC

$$\sum w_a \cos A \geq 3r\left(1+\frac{r}{R}\right).$$

Marin Chirciu

Soluție

Tripletele (w_a, w_b, w_c) și $(\cos A, \cos B, \cos C)$ in acute sunt la fel ordonate.

Cu inegalitatea lui Chebyshev obținem:

$$LHS = \sum w_a \cos A \overset{Chebyshev}{\geq} \frac{1}{3}\sum w_a \sum \cos A \geq \frac{1}{3}\cdot 9r \cdot \left(1+\frac{r}{R}\right) = 3r\left(1+\frac{r}{R}\right) = RHS.$$

Am folosit mai sus $\sum w_a \geq 9r$ și $\sum \cos A = 1 + \frac{r}{R}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

9) In acute ΔABC

$$\sum s_a \cos A \geq 3r\left(1+\frac{r}{R}\right).$$

Marin Chirciu

Soluție

Tripletele (s_a, s_b, s_c) și $(\cos A, \cos B, \cos C)$ in acute sunt la fel ordonate.

Cu inegalitatea lui Chebyshev obținem:

$$LHS = \sum s_a \cos A \overset{Chebyshev}{\geq} \frac{1}{3}\sum s_a \sum \cos A \geq \frac{1}{3}\cdot 9r \cdot \left(1+\frac{r}{R}\right) = 3r\left(1+\frac{r}{R}\right) = RHS.$$

Am folosit mai sus $\sum s_a \geq 9r$ și $\sum \cos A = 1 + \frac{r}{R}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

10) In acute ΔABC

$$\sum r_a \cos A \geq 3r\left(1+\frac{r}{R}\right).$$

Marin Chirciu

Soluție

Tripletele (r_a, r_b, r_c) și $(\cos A, \cos B, \cos C)$ in acute sunt la fel ordonate.

Cu inegalitatea lui Chebyshev obținem:

$$LHS = \sum r_a \cos A \overset{Chebyshev}{\geq} \frac{1}{3}\sum r_a \sum \cos A \geq \frac{1}{3}\cdot 9r \cdot \left(1+\frac{r}{R}\right) = 3r\left(1+\frac{r}{R}\right) = RHS .$$

Am folosit mai sus $\sum r_a \geq 9r$ și $\sum \cos A = 1+\frac{r}{R}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Bibliografie:

7. C.Năstăsescu, C.Niță, M.Brandiburu, D. Joița , Exerciții de algebră, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1992.
8. Ștefan Smarandache, București,GM 2/2019.
9. Rahim Shahbazov,Azerbaijan, RMM 12/2019.
10. Daniel Sitaru, Romania,RMM 2/2020.
11. Rajeev Rastogi, India,RMM5/2020, Cyclic Inequality -749.
12. Mihaela Berindeanu, București, Arhimede Mathematical Journal, Vol 6, No.1, Spring 2019.
13. Anibal Asperphys, Sensei del Algebra 4/2022.
14. Phan Nguoc Chau, Vietnam, RMM 11/2022.
15. Elton Papanikolla,Mathematical Olympiads,1/2023.
16. Vasile Mircea Popa, RMM 2/2023.
17. Marin Chirciu, Inegalități algebrice 2, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2021.
18. Marin Chirciu, Inegalități geometrice 2, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2021.

Art 4600

4 Martie 2023

4. Începuturile învăţământului matematic în Moldova şi Ţara Românească

de Adrian Stan, Buzău

Elemente de matematică elementară într-o formă incipientă se cunoşteau cu siguranţă de învăţaţii de la curţile regilor daci întrucât erau preocupaţi de domeniul astronomiei, calendarul dac era format din 360 de zile pe an cu 12 luni a câte 30 de zile fiecare, şi fiecare lună era împărţită în câte 5 perioade a câte 6 zile.

Până la curţile domneşti ale lui **Petru Cercel** şi a lui **Petru Şchiopul** (sfârşitul sec XVI) nu există dovezi ale unei preocupări către cunoştinţele matematice, formarea şi dezvoltarea voievodatelor şi mai apoi a celor trei ţări româneşti este anevoioasă fiind în strânsă legătura cu cultura slavonă care se practica în şcolile bisericeşti. Mai înainte, **Despot Vodă** (1561- 1563) înfiinţase o şcoală în latină la Cotnari în care se studia latina dar şi cunoştinţe minimale de aritmetică.

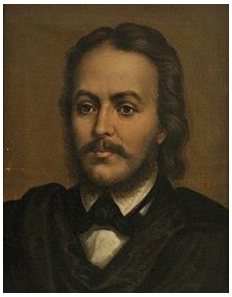
După 1600, o dată cu înlăturarea limbii slavone din biserici şi cancelariile domneşti învăţământul a trecut la folosirea limbii neogreceşti deoarece boierimea era sub influenţa culturii greceşti mulţi din ei provenid din afara ţărilor româneşti.

Se înfiinţează atunci în **1640 Academia Domnească de la Iaşi** cu ajutorul mitropolitului Kievului, **Petru Movilă** care trimite un fost rector de la Kiev, pe Sofronie Poceaţki pentru a da ajutor la organizarea şi funcţionarea academiei iar la Bucureşti în perioada anilor **1679-1694** ia fiinţă **Academia Domnească** cu sprijinul domnitorului **Şerban Cantacuzino** la stăruinţa fratelui său stolnicul **Constantin Cantacuzino** unul din cei mai eruditi români pe care i-a avut ţara Românească înainte de 1821. Constantin învăţase la Padova în Italia şi apoi la Veneţia şi Viena iar printre cursurile studiate figurau şi matematicile.

În aceste academii care aveau caracterul unui gimnaziu de mai târziu se preda în limba greacă de către profesori străini care aveau studiile făcute la academiile de la Viena, Roma, Constantinopole, Halle, Leipzig. Cunoştinţele matematice erau minime, cursurile erau direcţionate către învăţarea limbilor, a logicii, retoricii şi filozofiei. De abia în **1777** la Academia din Bucureşti se menţionează un curs de matematică predat de **Manasse Eliad** după cărţile matematicianului italian **Vito Caravelli**.

După **1776**, domnitorul **A. Ipsilanti** construieşte o nouă clădire a Academiei chiar în faţa Universităţii Bucureşti de astăzi. În **1815** figura aici ca elev şi **Ion Heliade Rădulescu** fondatorul şi viitorul preşedinte al Academiei Române, continuatorul luptei lui **Gheorghe Lazăr** pentru emanciparea poporului român.

În preajma revoluţiei din 1821 cele două academii sunt desfiinţate de turci dar spiritul de renaştere
naţională inspirat de elitele vremii printre care **Gheorghe Lazăr** în Muntenia şi **Gheorghe Asachi** în Moldova va continua.



Unul dintre cei mai eruditi oameni de ştiinţă care au profesat la Academia Domnească din Bucureşti a fost grecul **Chrysant Notara**, care a realizat în **1716,** prima lucrare în latină şi greacă cu caracter ştiinţific conţinând elemente de matematică aplicate pentru Moldova şi Muntenia, după ce în prealabil studiase la Padova fiind trimis de domnitorul **Constantin Brâncoveanu**. Apoi a studiat şi la Constantinopole, la Paris şi chiar la Moscova şi în Anglia.
El a fost primul care a stabilit longitudinea şi latitudinea oraşelor Bucureşti şi Târgovişte şi pe lângă faptul că era un mare orator şi teolog ortodox a fost şi profesorul copiilor lui Brâncoveanu care a devenit ulterior patriarh al Ierusalimului, poziţie din care a contribuit la dotarea Academiei din Iaşi cu cărţi.

Un profesor renumit de matematică la Academia din Iaşi a fost grecul **Nichifor Theotochi** (1736-1800) care a fost adus din Constantinopole de către domnitorul **Al. Ghika** după ce fusese numit domn, pentru ai învăţa pe copii săi dar îl numeşte şi director la Academie. Aici, Theotochi predă logica, psihologia, fizica şi geografia dar introduce şi un curs de aritmetică (1758) şi un curs de geometrie(1764) scrise în limba greacă.

În toate capitalele de judeţe după **1790** existau şcoli elemenatre, cele mai multe înfiinţate pe lângă episcopii sau mânăstiri, dar nu se putea vorbi de un învăţământ organizat.

Primele cărţi de matematică româneşti au fost acele manuscrise ale unor matematici străine care au fost traduse şi apoi copiate din greacă sau latină în româneşte dar scrise cu litere chirilice. Unul din ele a fost cel copiat între 1780- 1808 de ieromonahul **Grigore Rîmniceanu** după un tratat grecesc al lui **Manuil Glyzonios din Hios** şi era prima încercare de a forma o terminologie matematică în limba română. Acest manuscris în limba română a fost găsit la episcopul **Dionisie Romano** (1806-1872) care a fost profesor la Şcoala Naţională Primară de la Buzău, perioadă în care scrie o carte de aritmetică tipărită în **1838**.

Gheorghe Lazăr (1779 - 1823) este figura cea mai importantă din Ţara Românească care a contribuit la punerea bazelor învăţământului naţional prin deschiderea primei şcoli româneşti în august **1818**, "**Scoala naţională de inginerie**" de la **Sf. Sava din Bucureşti**. Lazăr a fost un dascăl progresist pentru acele timpuri, şi un patriot care a insuflat elevilor săi sentimentele patriotice şi respect pentru trecutul istoric. Elevii săi, **Petrache Poenaru, Ion Heliade Rădulescu** i-au continuat activitatea patriotică cât şi cea matematică.

Primele manuscrise de matematică scrise în română ne-au rămas de la Şcoala de inginerie a lui Asachi de la Iaşi şi erau copii ale unor cărţi străine de care se foloseau profesorii şi elevii lor. Acestea datau probabil din perioada 1788 - 1795 şi se păstrează la Biblioteca Academiei Române.

Însă, prima carte de matematică şi anume o aritmetică scrisă în româneşte şi tipărită în Moldova este cea din **1795** a episcopului **Amfilohie Hotinul**, fost bursier la Roma (cca 1772) care s-a inspirat din cărţile lui **Alessandro Conti** (1730) şi **Rutilio Benincasa** (1593). Cartea lui Amfilohie este mult mai bine elaborată şi transpune multe noţiuni de aritmetică şi geometrie în terminologie românească.

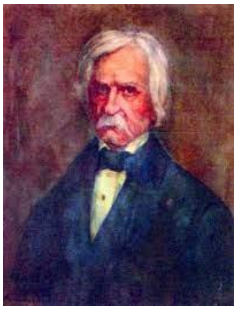
În **1803** s-a înfiinţat Seminarul de la Socola - Iaşi unde se preda şi matematica în limba română. Înainte de această dată matematica se făcea în casele boiereşti de către profesori particulari străini la început în limba greacă şi latină şi apoi în limba română. Se pare că se cunoşteau cărţile de aritmetică din 1795 ale lui Amfilochie Hotinul şi chiar al celor din Transilvania tipărite în 1777

la Viena, traduceri româneşti ale lui **Teodor Iancovici** după o carte germană scrisă cel mai probabil în **1758** de **I. Van Felbiger** profesorul de la Viena în perioada anilor 1779, a lui **Gheorghe Şincai** (1754- 1816).

Însuşi **Şincai** va traduce ulterior această carte şi o va tipări în **1785** la Blaj, în centrul culturii româneşti din Transilvania pe când era directorul şcolilor româneşti din Transilvania, devenind astfel a doua carte de matematică tipărită în limba română. ([1], pag.97)

Şincai traduce cartea lui Felbiger fără să ştie de prima traducere a lui Iancovici, lucrarea sa fiind mult mai bună şi folosind termeni matematici mai uşor de folosit. De la Şincai ne-au rămas cel mai vechi manuscris românesc de mecanică tradus de Şincai după Helmuth (1809). Tot din acea perioadă ni s-a păstrat o carte tradusă şi scrisă de **Samuel Micu Klein** şi tipărită la Buda în 1806, "Povăţuirea către arithmetica sau învăţătura numerelor".

Deşi scrierea cărţilor de matematică începuseră să se facă în româneşte, acestea erau scrise cu litere chirilice până aproximativ în anii 1850. Oficial, de abia în anii 1856- 1859 Eforia Şcolilor, instituţia care se ocupa cu întregul învăţământ în Ţara Românească, introduce alfabetul latin. Pentru scrierea numerelor cu cifre arabe şcolile lui Lazăr şi Asachi au grăbit cu mult înainte introducerea acestora în uzul comun.



Gheorghe Asachi (1788- 1869) a fost celălalt român care şi-a pus amprenta asupra întemeierii învăţământului în limba română de această dată în Moldova şi fiind şi de formaţie inginerească a avut meritul de a dezvolta învăţământul matematic prin realizarea primelor cărţi de matematică tipărite în Moldova.

Plecat cu părinţii de mic în afara Moldovei, el urmează cursurile de filozofie şi arhitectură a Universităţii din Lyow, în perioada 1802- 1804 , apoi în 1805 îl găsim la Viena unde participă la cursurile de astronomie şi de matematici ale profesorului Felbiger. În 1808 studiază la Roma literatura şi arheologia. Reîntors în ţară, deschide pe lângă Academia Domnească din Iaşi prima şcoală de inginerie în limba română, cu 5 ani mai devreme decât şcoala lui Lazăr din Ţara Românească, la 15 noiembrie 1813 începând efectiv în ianuarie 1814.

Momentul înfiinţării acestei şcoli aprobată foarte uşor de ocârmuirea vremii din 1813, era unul stringent economic, social şi politic întrucât era nevoie urgentă de ingineri care să măsoare pământurile moşierilor sau ţăranilor, să descifreze documentele din slavonă sau greacă şi să le traducă în română pentru ţărani sau boieri. Aici el era profesor de matematici şi se ocupa cu aplicaţii de geodezie şi arhitectură. Datorită acestui fapt, el se preocupă la început să traducă cărţile lui Etienne Bezout. Chiar dacă şcoala a fost închisă în 1818 sub pretextul că s-au format suficienţi ingineri. Asachi a continuat să elaboreze materiale originale de matematică culminând cu apariţia primelor sale lucrări originale tipărite, „Aritmetica" (1836), „Algebra" (1837), o prelucrare originală după Bezout, „Elementele geometriei teoretice" (1838)- o prelucrare după Bezout, Legendre şi Terquem, cu introducerea unei vaste terminologii matematice româneşti (plan, linie, suprafaţă, triunghi, dreptunghi, geometrie, algebră şi altele).

În timpul revoluţiei de la 1821, Gheorghe Asachi căruia îi era închisă şcoala încă din 1818 se refugiase în Bucovina şi apoi la Chişinău şi se reîntoarce la Iaşi în 1822 când este numit **Ioniţă Sturza** domn al Moldovei. Acesta îl trimite pe Asachi la Viena ca ambasador. Reîntors de la Viena

în 1827 este avansat până la rangul de director al Şcolilor din Moldova, timp în care se redeschide la Iaşi o şcoală naţională numită **Şcoala Vasiliană** la **1 ianuarie 1828** după numele domnitorului **Vasile Lupu**.

În perioada 1829- 1830 Gh. Asachi participă la Bucureşti ca secretar al Comisiei din partea Moldovei ce lucra pentru realizarea Regulamentului Organic. Acesta trebuia să fie actul prin care cele două ţări româneşti trebuiau să se guverneze după pacea încheiată la Adrianopole din 1829 în urma războiului ruso-turc.

Întrat în vigoare în 1831, pentru învăţământul public se prevedea: şcoli începătoare (adică clase de primar sau elementar cu 4 ani de studii), şcoli cu umanioare (adică gimnaziul de mai tîrziu cu 4 ani de studiu), şcoli cu învăţături complementare (viitoare clase de liceu cu 3 ani) şi şcoli cu cursuri speciale (adică învăţămîntul superior cu 3 ani).

La şcolile cu cursuri speciale erau trei secţii la care se studiau: matematicile aplicate, studiul legilor şi agricultura practică.

Numărul de clase de la aceste şcoli au crescut ulterior prin străruinţa lui **Petrache Poenaru** director al **Colegiului Sf. Sava** în perioada 1832- 1847, ca de la 4 clase să se ajungă la 6 clase de umanioare pentru a fi mai de folos pentru ce se făcea la cursurile superioare.

De abia din **1831** încep să funcţioneze şcoli primare în fiecare capitală de judeţ iar la sate de abia din 1838 dar acestea erau aproape inexistente la sate. Înainte de acestea doar marii boieri îşi puteau permite să îşi deschidă pe moşiile lor unele şcoli pentru fii de boieri. În **1846** se dă o nouă organizare a învăţământului şi se înfiinţează şcoli săteşti, şcoli elementare la oraşe, şcoli de fete sau şcoli academice cu grad superior, mai mult, se înfiinţează Colegiul francez cu predare numai în franceză a tuturor disciplinelor, urmând ca să se desfiinţeze treptat Colegiul de la Sf. Sava.

Gheorghe Asachi se întoarce la Iaşi în 1832 şi după modelul Colegiului Sf. Sava din Bucureşti pe care îl vizitase, reuşeşte cu ajutorul domnitorului Mihai Sturza, să înfiinţeze pe lângă Şcoala Vasiliană din Iaşi în 16 iunie 1835 un Colegiu numit **Academia Mihăileană** după penumele domnitorului. Aici au început să predea foarte mulţi din cei care fuseseră trimişi las studii la Viena şi Paris: Teodor Stamati, Alexandru Costinescu, Leon Filipescu, Dimitrie Asachi-fiul lui Gh. Asachi, Ion Ghica.

În 1847 această academie se desfiinţează de frica valului revoluţionar care cuprindea întreaga Europă şi de faptul că boierii retrograzi nu acceptau ca fii lor să înveţe alături de fii de negustori şi ţărăni şi de aceea se înfiinţează Colegiul francez în locul acesteia.

Moştenirea lăsată de şcolile lui Asachi şi Lazăr a fost că elita culturală românească a înţeles că şi în Ţările Româneşti se poate dezvolta un sistem naţional de învăţământ în limba română iar cei trimişi la studii în afară înainte şi după 1821 au contribuit la ridicarea învăţământului elementar şi secundar la sate şi oraşe în timpul Regulamentului Organic (1831/1832-1848), scriind cărţi originale şi ţinând cursuri de specialitate ridicând în acelaşi timp şi invăţământul superior. Este cazul matematicienilor, Poteca, Marcovici, Moroiu, Poenaru, Dimitrie Asachi, Emanoil Bacaloglu. Dimitrie era fiul lui Gh. Asachi şi este autorul primei cărţi de matematică superioară, originală.

Ion Heliade Rădulescu urmaş al lui Gheorgeh Lazăr la Şcoala de la Sf. Sava, îl câştigă de partea sa pe domnitorul Grigore Ghica numit de turci în 1822 şi redeschide această şcoală după ce în prealabil sunt reconstituite clădirile

dărâmate. **I. Rădulescu** a învăţat singur limbile italiană, franceză, latină pentru a putea traduce cărţile din aceste limbi predând apoi la Şcoala de la Sf. Sava nu doar matematicile dar şi logica, filozofia, istoria, geografia şi retorica.

În 1827 s-a împrietenit cu boierul **Dinicu Golescu** un erudit al vremii care îşi dorea o emancipare a ţării şi împreună pun bazele „**Societăţii literare**" cu scopul propăşirii neamului românesc având principii clar stabilite:

- Şcoala de la Sf. Sava să devină colegiu;
- crearea şcolilor normale în fiecare capitală de judeţ;
- crearea şcolilor primare în fiecare sat;
- realizarea de gazete în limba română;
- abandonarea regimului fanariot;

Dinicu Golescu nu a mai apucat să vadă puse în practică aceste principii deoarece a murit în 1829 dar I. Rădulescu a continuat această luptă realizând câteva lucruri foarte importante:
- tipărirea la Sibiu a cărţii sale „Gramatica" (1828);
- scoaterea primului ziar românesc din Ţara Românească „Curierul românesc" (1829- 1848) la propria sa editură din Bucureşti;
- traduce şi tipăreşte în 1832 "Aritmetica" lui I.B. Francoeur, terminologia folosită aici este foarte bine aleasă întrucât termenii folosiţi s-au păstrat până astăzi : adunare, scădere, inmulţire, împărţire, putere, rădăcină, abstract, plus, minus, pozitiv, ecuaţie şi altele;
- tipăreşte lucrările lui Petrache Poenaru;

Din cauza evenimentelor revoluţionare în perioada 1848- 1850 şcolile erau aproape toate închise. Venirea lui **Barbu Ştirbei** domn al Ţării Româneşti care făcuse studii la Paris a dus la o nouă organizare a învăţământului astfel că începând cu 1851. Învăţământul public prevedea şcoli primare, colegii sau gimnazii şi facultăţi iar la această organizare şi-a adus aportul şi S. Marcovici, C. Brăilou şi Petrache Poenaru, şi în calitate de consilier al lui Barbu Ştirbei. Se reinfinţează Şcoala de la Sf. Sava pe 8 ianuarie 1851 şi o şcoală de viitori ingineri pentru lucrările publice condusă de inginerul francez Louis L. Lalanne, şcoală ce avea să devină renumita Şcoală de poduri şi şosele din 1881.

În 1859 avea să se înfăptuiască un vis revoluţionar al românilor şi anume Unirea Principatelor Moldovei şi Ţării Româneşti sub **A. I. Cuza**, pe 24 ianuarie. Deja era o perioadă în care învăţământul românesc luase amploare existau numeroşi oameni de ştiinţă întorşi de la studii din Europa, care tipăresc foarte multe studii şi cărţi ale lor în limba română iar condiţiile economice, sociale , politice au permis ca mai întâi sub Cuza să crească numărul de şcoli din sate şi oraşe.

Începând cu 26 octombrie **1860** ia fiinţă **prima universitate românească** cea **de la Iaşi**, apoi pe 25 noiembrie **1864** ia fiinţă **Universitatea de la Bucureşti** cu 3 secţii: Facultatea de Drept, Fac. de Filozofie şi Fac de Ştiinţe fizice, matematice şi naturale. Dintre ştiinţele matematice care se predau la Fac. de Ştiinţe erau algebra superioară, calculul diferenţial şi integral şi mecanica elemenatară şi raţională, geometria descripivă, geodezia teoretică şi astronomie.

Şi Cuza avea să reorganizeze învăţământul public dând pentru aceasta legea de organizare a învăţămîntului de toate gradele. În **1864** erau 288 şcoli din Moldova şi 2000 în Ţara Românească. organizate astfel: şcolile comunale, şcoli primare, şcoli secundare, şcoli superioare sau de specialitate.

Până la reforma sistemului de învăţământ realizată în **1898** de către ministrul învăţământului de atunci, **Spiru Haret**, la nivel superior existau 2 universităţi, două şcoli de arte frumoase, o şcoală militară, o şcoală de medicină, 2 şcoli comerciale, o şcoală de arte şi meserii şi două conservatoare.

Bibliografie:

1. George Şt. Andonie. Istoria Matematicii în Româna. Editura Ştiinţifică. Bucureşti. 1965.
2. www.descoperă.ro