WWW.MATEINFO.RO

REVISTA ELECTRONICA MATEINFO.RO

IUNIE 2023
ISSN 2065 - 6432

REVISTĂ DIN FEBRUARIE 2009

COORDONATOR:
ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ȘI SUSȚINĂTORI PERMANENȚI AI REVISTEI

NECULAI STANCIU
MARIN CHIRCIU
ROXANA MIHAELA STANCIU

ARTICOLE

R.E.M.I. IUNIE 2023

PUTEȚI TRIMITE ARTICOLE ÎN FOMAT WORD PE REVISTA.MATEINFO@YAHOO.COM

1. Some applications of H. Bergström's inequality and J. Radon' s inequality in triangle

D.M. Bătineţu-Giurgiu and Neculai Stanciu

In this paper we present some new inequalities in a triangle, which follows by Harald Bergström' s inequality and by Johann Radon's inequality.

Theorem 1.

1.1) In any triangle ABC holds

$$\frac{a^2}{(p-b)\cdot(p-c)}+\frac{b^2}{(p-c)\cdot(p-a)}+\frac{c^2}{(p-a)\cdot(p-b)}\geq\frac{4p^2}{(4R+r)r};$$

1.2) If $m,n\in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{tg\frac{A}{2}}{m\cdot(4R+r)+n\cdot p\cdot tg\frac{B}{2}}+\frac{tg\frac{B}{2}}{m\cdot(4R+r)+n\cdot p\cdot tg\frac{C}{2}}+\frac{tg\frac{C}{2}}{m\cdot(4R+r)+n\cdot p\cdot tg\frac{A}{2}}\geq$$

$$\geq\frac{(4R+r)^2}{p(m(4R+r)^2+np^2)};$$

1.3) If $x,y\in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{tg^2\frac{A}{2}}{x\cdot tg\frac{A}{2}+y\cdot tg\frac{B}{2}}+\frac{tg^2\frac{B}{2}}{x\cdot tg\frac{B}{2}+y\cdot tg\frac{C}{2}}+\frac{tg^2\frac{C}{2}}{x\cdot tg\frac{C}{2}+y\cdot tg\frac{A}{2}}\geq\frac{4R+r}{(x+y)p};$$

1.4) If $m,n\in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{tg^3\frac{A}{2}}{m\cdot tg\frac{B}{2}+n\cdot tg\frac{C}{2}}+\frac{tg^3\frac{B}{2}}{m\cdot tg\frac{C}{2}+n\cdot tg\frac{A}{2}}+\frac{tg^3\frac{C}{2}}{m\cdot tg\frac{A}{2}+n\cdot tg\frac{B}{2}}\geq\frac{\left((4R+r)^2-2p^2\right)^2}{(m+n)p^4};$$

1.5) If $m,n\in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{tg\frac{A}{2}}{m+n\cdot tg\frac{B}{2}\cdot tg\frac{C}{2}}+\frac{tg\frac{B}{2}}{m+n\cdot tg\frac{C}{2}\cdot tg\frac{A}{2}}+\frac{tg\frac{C}{2}}{m+n\cdot tg\frac{A}{2}\cdot tg\frac{B}{2}}\geq\frac{(4R+r)^2}{p(m(4R+r)+3nr)};$$

1.6) If $m,n\in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{tg^3\frac{A}{2}}{m\cdot ctg\frac{B}{2}+n\cdot ctg\frac{C}{2}}+\frac{tg^3\frac{B}{2}}{m\cdot ctg\frac{C}{2}+n\cdot ctg\frac{A}{2}}+\frac{tg^3\frac{C}{2}}{m\cdot ctg\frac{A}{2}+n\cdot ctg\frac{B}{2}}\geq\frac{(4R+r)r}{(m+n)p^2};$$

1.7) If $m,n\in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{ctg^3\frac{A}{2}}{m\cdot tg\frac{B}{2}+n\cdot tg\frac{C}{2}}+\frac{ctg^3\frac{B}{2}}{m\cdot tg\frac{C}{2}+n\cdot tg\frac{A}{2}}+\frac{ctg^3\frac{C}{2}}{m\cdot tg\frac{A}{2}+n\cdot tg\frac{B}{2}}\geq\frac{p^2}{(m+n)r^2};$$

1.8) If $m,n\in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{ctg\frac{A}{2}}{m+n\cdot tg^2\frac{A}{2}}+\frac{ctg\frac{B}{2}}{m+n\cdot tg^2\frac{B}{2}}+\frac{ctg\frac{C}{2}}{m+n\cdot tg^2\frac{C}{2}}\geq\frac{p^3}{(mp^2+n(4Rr+r^2))r};$$

1.9) If $m,n\in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{tg\frac{A}{2}}{m+n\cdot ctg^2\frac{A}{2}}+\frac{tg\frac{B}{2}}{m+n\cdot ctg^2\frac{B}{2}}+\frac{tg\frac{C}{2}}{m+n\cdot ctg^2\frac{C}{2}}\geq\frac{(4R+r)^2r}{(np^2+mr(4R+r))r};$$

1.10) If $x,y,z\in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{tg^4\frac{A}{2}}{x\sin^2\frac{A}{2}+y\sin^2\frac{B}{2}+z\cos^2\frac{C}{2}}+\frac{tg^4\frac{B}{2}}{x\sin^2\frac{B}{2}+y\sin^2\frac{C}{2}+z\cos^2\frac{A}{2}}+$$
$$+\frac{tg^4\frac{C}{2}}{x\sin^2\frac{C}{2}+y\sin^2\frac{A}{2}+z\cos^2\frac{B}{2}}\geq\frac{2R(16R^2+8Rr+r^2-p^2)^2}{\left(2(x+y+2z)R-(x+y-z)r\right)p^4};$$

1.11) If $x,y,z\in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{ctg^3\frac{A}{2}}{xctg\frac{A}{2}+yctg\frac{B}{2}+zctg\frac{C}{2}}+\frac{ctg^3\frac{B}{2}}{xctg\frac{B}{2}+yctg\frac{C}{2}+zctg\frac{A}{2}}+\frac{ctg^3\frac{C}{2}}{xctg\frac{C}{2}+yctg\frac{A}{2}+zctg\frac{B}{2}}\geq ;$$

$$\geq\frac{p^2}{(3x+y+z)r^2}$$

1.12) If $x,y,z\in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{ctg^3\frac{A}{2}}{xtg\frac{A}{2}+ytg\frac{B}{2}+ztg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}}+\frac{ctg^3\frac{B}{2}}{xtg\frac{B}{2}+ytg\frac{C}{2}+ztg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}}+ ;$$

$$+\frac{ctg^3\frac{C}{2}}{xtg\frac{C}{2}+ytg\frac{A}{2}+ztg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}}\geq\frac{p^4}{\left((4R+r)^2x+(y-2x)p^2+3zpr\right)r^2}$$

1.13) If $x,y,z\in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{ctg^3\frac{A}{2}}{x+ytg\frac{B}{2}+ztg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}}+\frac{ctg^3\frac{B}{2}}{x+ytg\frac{C}{2}+ztg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}}+\frac{ctg^3\frac{C}{2}}{x+ytg\frac{A}{2}+ztg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}}\geq ;$$

$$\geq\frac{p^3}{\left((4R+r)x+py+3zr\right)r^2}$$

1.14) If $m,n\in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{ctg\frac{A}{2}}{m+n\cdot tg\frac{B}{2}\cdot tg\frac{C}{2}}+\frac{ctg\frac{B}{2}}{m+n\cdot tg\frac{C}{2}\cdot tg\frac{A}{2}}+\frac{ctg\frac{C}{2}}{m+n\cdot tg\frac{A}{2}\cdot tg\frac{B}{2}}\geq\frac{9p}{4mR+(m+3n)r};$$

1.15) If $m,n\in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{tg\frac{A}{2}\cdot tg^2\frac{B}{2}}{m\cdot tg\frac{A}{2}+n\cdot tg\frac{B}{2}}+\frac{tg\frac{B}{2}\cdot tg^2\frac{C}{2}}{m\cdot tg\frac{B}{2}+n\cdot tg\frac{C}{2}}+\frac{tg\frac{C}{2}\cdot tg^2\frac{A}{2}}{m\cdot tg\frac{C}{2}+n\cdot tg\frac{A}{2}}\geq ;$$

$$\geq\frac{p^2}{(4R+r)^2\cdot m+p^2\cdot(n-2m)}$$

1.16) If $m,n\in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{tg^2\frac{A}{2}\cdot tg^2\frac{B}{2}}{m+n\cdot tg^2\frac{B}{2}\cdot tg^2\frac{C}{2}}+\frac{tg^2\frac{B}{2}\cdot tg^2\frac{C}{2}}{m+n\cdot tg^2\frac{C}{2}\cdot tg^2\frac{A}{2}}+\frac{tg^2\frac{C}{2}\cdot tg^2\frac{A}{2}}{m+n\cdot tg^2\frac{A}{2}\cdot tg^2\frac{B}{2}}\geq ;$$
$$\geq\frac{p^2}{(3m+n)\cdot p^2-2\cdot n\cdot r\cdot(4R+r)}$$

1.17) If $m,n\in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{tg^2\frac{A}{2}\cdot tg^2\frac{B}{2}}{m+n\cdot tg\frac{B}{2}\cdot tg\frac{C}{2}}+\frac{tg^2\frac{B}{2}\cdot tg^2\frac{C}{2}}{m+n\cdot tg\frac{C}{2}\cdot tg\frac{A}{2}}+\frac{tg^2\frac{C}{2}\cdot tg^2\frac{A}{2}}{m+n\cdot tg\frac{A}{2}\cdot tg\frac{B}{2}}\geq\frac{1}{3m+n};$$

1.18) If $m,n\in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{tg\frac{A}{2}\cdot tg\frac{B}{2}}{m+n\cdot tg^2\frac{C}{2}}+\frac{tg\frac{B}{2}\cdot tg\frac{C}{2}}{m+n\cdot tg^2\frac{A}{2}}+\frac{tg\frac{C}{2}\cdot tg\frac{A}{2}}{m+n\cdot tg^2\frac{B}{2}}\geq\frac{p^2}{m\cdot p^2+n\cdot(4R+r)\cdot r};$$

1.19) If $m,n\in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{tg^2\frac{A}{2}\cdot tg\frac{B}{2}}{m\cdot tg\frac{A}{2}+n\cdot tg\frac{B}{2}}+\frac{tg^2\frac{B}{2}\cdot tg\frac{C}{2}}{m\cdot tg\frac{B}{2}+n\cdot tg\frac{C}{2}}+\frac{tg^2\frac{C}{2}\cdot tg\frac{A}{2}}{m\cdot tg\frac{C}{2}+n\cdot tg\frac{A}{2}}\geq\frac{p^2}{(m-2n)\cdot p^2+n\cdot(4R+r)^2};$$

1.20) If $m,n\in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{tg^2\frac{A}{2}\cdot tg\frac{B}{2}}{m\cdot tg\frac{A}{2}+n\cdot tg\frac{B}{2}}+\frac{tg^2\frac{B}{2}\cdot tg\frac{C}{2}}{m\cdot tg\frac{B}{2}+n\cdot tg\frac{C}{2}}+\frac{tg^2\frac{C}{2}\cdot tg\frac{A}{2}}{m\cdot tg\frac{C}{2}+n\cdot tg\frac{A}{2}}\geq\frac{p^2}{(m-2n)\cdot p^2+n\cdot(4R+r)^2};$$

1.21) If $m,n\in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\left(\frac{tg^2\frac{A}{2}\cdot tg\frac{B}{2}}{m\cdot tg^3\frac{B}{2}+n\cdot tg\frac{C}{2}}+\frac{tg^2\frac{B}{2}\cdot tg\frac{C}{2}}{m\cdot tg^3\frac{C}{2}+n\cdot tg\frac{A}{2}}+\frac{tg^2\frac{C}{2}\cdot tg\frac{A}{2}}{m\cdot tg^3\frac{A}{2}+n\cdot tg\frac{B}{2}}\right)\cdot \left(m\cdot\left(tg^4\frac{A}{2}+tg^4\frac{B}{2}+tg^4\frac{C}{2}\right)+n\right)\geq 1;$$

1.22) If $m,n\in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{\sin^2 A}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}+\frac{\sin^2 B}{\cos^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{\sin^2 C}{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}}\geq\frac{16p^2}{p^2+(4R+r)^2};$$

1.23) În orice triunghi ABC:

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}+\frac{\sin^2 B}{\sin^2\frac{C}{2}\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{\sin^2 C}{\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}}\geq\frac{16p^2}{p^2+r^2-8R^2};$$

1.24) If $x,y\in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{\sin^4 A}{x\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}+y\cos^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{\sin^4 B}{x\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}+y\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}}+$$
$$+\frac{\sin^4 C}{x\sin^2\frac{C}{2}\sin^2\frac{A}{2}+y\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}\geq\frac{4(p^2-4Rr-r^2)^2}{R^2\left((x+y)p^2+(x+y)r^2+8(2y-x)R^2+8Rry\right)};$$

1.25) If $x,y\in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{\sin^2 A}{x\sin^2\frac{A}{2}+y\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}+\frac{\sin^2 B}{x\sin^2\frac{B}{2}+y\cos^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{\sin^2 C}{x\sin^2\frac{C}{2}+y\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}}\geq$$
$$\geq\frac{4p^2}{16(x+y)R^2+8(2y-x)Rr+yp^2};$$

1.26) If $x,y\in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{\sin^2 A}{x\cos^2\frac{A}{2}+y\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}+\frac{\sin^2 B}{x\cos^2\frac{B}{2}+y\sin^2\frac{C}{2}\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{\sin^2 C}{x\cos^2\frac{C}{2}+y\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}}\geq$$
$$\geq\frac{16p^2}{8(4x-y)R^2+8Rrx+y(p^2+r^2)};$$

1.27) If $x, y, z \in R_+^*$, then in any acute triangle ABC holds

$$\frac{1}{x+y\sin A+z\cos B}+\frac{1}{x+y\sin B+z\cos C}+\frac{1}{x+y\sin C+zcoA}\geq\frac{9R}{(3x+z)R+yp+zr};$$

1.28) Dacă $m, n \in R_+^*$, atunci în orice triunghi ABC:

$$\left(m+n\cdot ctg\frac{A}{2}\cdot ctg\frac{B}{2}\right)^2+\left(m+n\cdot ctg\frac{B}{2}\cdot ctg\frac{C}{2}\right)^2+\left(m+n\cdot ctg\frac{C}{2}\cdot ctg\frac{A}{2}\right)^2\geq$$
$$\geq\frac{(3m+n)^2r^2+8n(3m+n)Rr+16n^2R^2}{3r^2};$$

1.29) In any triangle ABC holds

$$a^2tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}+b^2tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}+c^2tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\geq\frac{4p^2r}{4R+r};$$

1.30) In any triangle ABC holds

$$a^2ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2}+b^2ctg\frac{C}{2}ctg\frac{A}{2}+c^2ctg\frac{A}{2}ctg\frac{B}{2}\geq 4p^2;$$

1.31) If $x, y, z \in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{1}{x+y\sin^2\frac{A}{2}+z\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{x+y\sin^2\frac{B}{2}+z\cos^2\frac{C}{2}}+\frac{1}{x+y\sin^2\frac{C}{2}+z\cos^2\frac{A}{2}}\geq$$
$$\geq\frac{18R}{2(3x+y+2z)R+(z-y)r};$$

1.32) If $m, n \in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{\sin^4\frac{A}{2}}{m\cos^2\frac{B}{2}+n\cos^2\frac{C}{2}}+\frac{\sin^4\frac{B}{2}}{m\cos^2\frac{C}{2}+n\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{\sin^4\frac{C}{2}}{m\cos^2\frac{A}{2}+n\cos^2\frac{B}{2}}\geq\frac{(2R-r)^2}{2(m+n)R(4R+r)};$$

1.33) If $m, n \in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{\sin^4\frac{A}{2}}{m\sin^2\frac{B}{2}+n\cos^2\frac{C}{2}}+\frac{\sin^4\frac{B}{2}}{m\sin^2\frac{C}{2}+n\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{\sin^4\frac{C}{2}}{m\sin^2\frac{A}{2}+n\cos^2\frac{B}{2}}\geq\geq\frac{(2R-r)^2}{2R(2(m+2n)R+(n-m)r))};$$

1.34) If $m, n \in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{\sin^4\frac{A}{2}}{m\sin^2\frac{B}{2}+n\sin^2\frac{C}{2}}+\frac{\sin^4\frac{B}{2}}{m\sin^2\frac{C}{2}+n\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{\sin^4\frac{C}{2}}{m\sin^2\frac{A}{2}+n\sin^2\frac{B}{2}}\ge\frac{2R-r}{2(m+n)R};$$

1.35) If $m,n\in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{\sin^4\frac{A}{2}}{m\cdot\frac{2R-r}{2R}+n\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{\sin^4\frac{B}{2}}{m\cdot\frac{2R-r}{2R}+n\cos^2\frac{C}{2}}+\frac{\sin^4\frac{C}{2}}{m\cdot\frac{2R-r}{2R}+n\cos^2\frac{A}{2}}\ge$$

$$\ge\frac{(2R-r)^2}{2R\big(2(3m+2n)R+(n-3m)r\big)};$$

1.36) If $m,n\in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{\cos^4\frac{A}{2}}{m\sin^2\frac{B}{2}+n\sin^2\frac{C}{2}}+\frac{\cos^4\frac{B}{2}}{m\sin^2\frac{C}{2}+n\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{\cos^4\frac{C}{2}}{m\sin^2\frac{A}{2}+n\sin^2\frac{B}{2}}\ge\frac{(4R+r)^2}{2(m+n)R(2R-r)};$$

1.37) If $m,n\in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{\cos^4\frac{A}{2}}{m\cos^2\frac{B}{2}+n\cos^2\frac{C}{2}}+\frac{\cos^4\frac{B}{2}}{m\cos^2\frac{C}{2}+n\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{\cos^4\frac{C}{2}}{m\cos^2\frac{A}{2}+n\cos^2\frac{B}{2}}\ge\frac{4R+r}{2(m+n)R};$$

1.38) If $m,n\in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{\cos^4\frac{A}{2}}{m\sin^2\frac{B}{2}+n\cos^2\frac{C}{2}}+\frac{\cos^4\frac{B}{2}}{m\sin^2\frac{C}{2}+n\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{\cos^4\frac{C}{2}}{m\sin^2\frac{A}{2}+n\cos^2\frac{B}{2}}\ge$$

$$\ge\frac{(4R+r)^2}{2R(2(m+2n)R+(n-m)r)};$$

1.39) If $m,n\in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{\cos^4\frac{A}{2}}{m\cdot\frac{4R+r}{2R}+n\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{\cos^4\frac{B}{2}}{m\cdot\frac{4R+r}{2R}+n\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{\cos^4\frac{C}{2}}{m\cdot\frac{4R+r}{2R}+n\sin^2\frac{C}{2}}\ge$$

$$\ge\frac{(4R+r)^2}{2R(2(3m+n)R+(3m-n)r)}.$$

Proof of 1.1) By H. Bergström's inequality we have

$$U=\sum\frac{a^2}{(p-b)(p-c)}\geq\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum(p-b)(p-c)}=\frac{4p^2}{\sum(p-a)(p-b)}.$$

Since,

$$\sum(p-a)(p-b)=(4R+r)r,$$

we deduce the conclusion.

Proof of 1.2) We have

$$U=\sum\frac{tg\frac{A}{2}}{m(4R+r)+np\cdot tg\frac{B}{2}}=\sum\frac{tg^2\frac{A}{2}}{m(4R+r)tg\frac{A}{2}+nptg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}}.$$

So by H. Bergström's inequality we deduce

$$U\geq\frac{\left(tg\frac{A}{2}\right)^2}{m(4R+r)\sum tg\frac{A}{2}+np\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}}$$

Because,

$$\sum tg\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{p}\ \text{and}\ \sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}=1,$$

we obtain the desired result.

Proof of 1.3) By H. Bergström's inequality we have

$$\sum\frac{tg^2\frac{A}{2}}{xtg\frac{A}{2}+ytg\frac{B}{2}}\geq\frac{\left(\sum tg\frac{A}{2}\right)^2}{(x+y)\sum tg\frac{A}{2}}=\frac{\sum tg\frac{A}{2}}{x+y},$$

Since,

$$\sum tg\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{p},$$

we get the conclusion.

Proof of 1.4) We have

$$U=\sum\frac{tg^3\frac{A}{2}}{\left(mtg\frac{B}{2}+ntg\frac{C}{2}\right)}=\sum\frac{tg^4\frac{A}{2}}{\left(mtg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+ntg\frac{A}{2}tg\frac{C}{2}\right)},$$

where we apply H. Bergström's inequality and we deduce that,

$$U\geq\frac{\left(\sum tg^2\frac{A}{2}\right)^2}{(m+n)\left(\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\right)}$$

Because,

$$\sum tg^2\frac{A}{2}=\frac{(4R+r)^2}{p^2}-2 \text{ and } \sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}=1,$$

we get the result.

Proof of 1.5) We have

$$V=\sum\frac{tg\frac{A}{2}}{m+n\cdot tg\frac{B}{2}\cdot tg\frac{C}{2}}=\sum\frac{tg^2\frac{A}{2}}{m\cdot tg\frac{A}{2}+n\cdot tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}},$$

and by H. Bergström's inequality we deduce

$$V\geq\frac{\left(tg\frac{A}{2}\right)^2}{m\sum tg\frac{A}{2}+3n\cdot tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}}$$

Because,

$$\sum tg\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{p} \text{ and } \prod tg\frac{A}{2}=\frac{r}{p},$$

we get the result.

Proof of 1.6) We have

$$U=\sum\frac{tg^3\frac{A}{2}}{mctg\frac{B}{2}+nctg\frac{C}{2}}=\sum\frac{tg^2\frac{A}{2}}{mctg\frac{A}{2}ctg\frac{B}{2}+nctg\frac{A}{2}ctg\frac{C}{2}}$$

and applying H. Bergström's inequality we get

$$U \geq \frac{\left(\sum tg\frac{A}{2}\right)^2}{(m+n)\left(\sum ctg\frac{A}{2}ctg\frac{B}{2}\right)}$$

Since,

$$\sum tg\frac{A}{2} = \frac{4R+r}{p} \text{ and } \sum ctg\frac{A}{2}ctg\frac{B}{2} = \frac{4R+r}{r},$$

we obtain the desired result.

Proof of 1.7) We have

$$U = \sum \frac{ctg^3\frac{A}{2}}{mtg\frac{B}{2}+ntg\frac{C}{2}} = \sum \frac{ctg^2\frac{A}{2}}{mtg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+ntg\frac{A}{2}tg\frac{C}{2}}.$$

By H. Bergström's inequality we obtain

$$U \geq \frac{\left(\sum ctg\frac{A}{2}\right)^2}{(m+n)\left(\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\right)}$$

Since,

$$\sum ctg\frac{A}{2} = \frac{p}{r} \text{ and } \sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2} = 1,$$

we get the conclusion.

Proof of 1.8) We have

$$U = \sum \frac{ctg\frac{A}{2}}{m+ntg^2\frac{A}{2}} = \sum \frac{ctg^2\frac{A}{2}}{mctg\frac{A}{2}+ntg\frac{A}{2}}.$$

By H. Bergström's inequality we obtain

$$U \geq \frac{\left(\sum ctg\frac{A}{2}\right)^2}{m\sum ctg\frac{A}{2}+n\sum tg\frac{A}{2}}$$

Because,

$$\sum tg\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{p} \text{ and } \sum ctg\frac{A}{2}=\frac{p}{r},$$

we deduce the result.

Proof of 1.9) We have

$$U=\sum\frac{tg\frac{A}{2}}{m+nctg^2\frac{A}{2}}=\sum\frac{tg^2\frac{A}{2}}{mtg\frac{A}{2}+nctg\frac{A}{2}}.$$

So by H. Bergström's inequality we obtain

$$U\geq\frac{\left(\sum tg\frac{A}{2}\right)^2}{m\sum tg\frac{A}{2}+n\sum ctg\frac{A}{2}}$$

Since,

$$\sum tg\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{p} \text{ and } \sum ctg\frac{A}{2}=\frac{p}{r},$$

we obtain the conclusion.

Proof of 1.10) Applying H. Bergström's inequality we deduce that

$$\sum\frac{tg^4\frac{A}{2}}{x\sin^2\frac{A}{2}+y\sin^2\frac{B}{2}+z\cos^2\frac{C}{2}}=\sum\frac{\left(tg^2\frac{A}{2}\right)^2}{x\sin^2\frac{A}{2}+y\sin^2\frac{B}{2}+z\cos^2\frac{C}{2}}\geq$$

$$\geq\frac{\left(\sum tg^2\frac{A}{2}\right)^2}{(x+y)\sum\sin^2\frac{A}{2}+z\sum\cos^2\frac{A}{2}}.$$

But we have

$$\sum\sin^2\frac{A}{2}=\frac{2R-r}{2R}, \sum\cos^2\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{2R} \text{ and } \sum tg^2\frac{A}{2}=\frac{(4R+r)^2-2p^2}{p^2}$$

and we obtain the result.

Proof of 1.11) By H. Bergström's inequality we obtain

$$\sum \frac{ctg^3\frac{A}{2}}{xctg\frac{A}{2}+ytg\frac{B}{2}+ztg\frac{C}{2}}=\sum \frac{ctg^2\frac{A}{2}}{x+ytg\frac{B}{2}tg\frac{A}{2}+ztg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}}\geq$$

$$\geq \frac{\left(\sum ctg\frac{A}{2}\right)^2}{3x+(y+z)\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}}$$

Using the formulas

$$\sum \sin^2\frac{A}{2}=\frac{2R-r}{2R} \quad \text{and} \quad \sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}=1$$

we get the result.

Proof of 1.12) Applying H. Bergström's inequality we deduce that

$$\sum \frac{ctg^3\frac{A}{2}}{xtg\frac{A}{2}+ytg\frac{B}{2}+ztg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}}=\sum \frac{ctg^2\frac{A}{2}}{xtg^2\frac{A}{2}+ytg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+ztg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}}\geq$$

$$\geq \frac{\left(\sum ctg\frac{A}{2}\right)^2}{x\sum tg^2\frac{A}{2}+y\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+3ztg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}}$$

Since,

$$\sum ctg\frac{A}{2}=\frac{p}{r},\ \sum tg^2\frac{A}{2}=\frac{(4R+r)^2-2p^2}{p^2},\ \sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}=1 \text{ and } \prod tg\frac{A}{2}=\frac{r}{p}$$

it follows the conclusion.

Proof of 1.13) By H. Bergström's inequality we obtain

$$\sum \frac{ctg^3\frac{A}{2}}{x+ytg\frac{B}{2}+ztg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}}=\sum \frac{ctg^2\frac{A}{2}}{xtg\frac{A}{2}+ytg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+ztg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}}\geq$$

$$\geq \frac{\left(\sum ctg\frac{A}{2}\right)^2}{x\sum tg\frac{A}{2}+y\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+3ztg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}}$$

Using the well-known

$$\sum ctg\frac{A}{2}=\frac{p}{r},\ \sum tg\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{p},\ \sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}=1 \text{ and } \prod tg\frac{A}{2}=\frac{r}{p}$$

we get the desired result.

Proof of 1.14) We have

$$U=\sum\frac{ctg\frac{A}{2}}{m+ntg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}}=\sum\frac{1}{mtg\frac{A}{2}+ntg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}}.$$

Therefore By H. Bergström's inequality we get

$$U\geq\frac{9}{m\sum tg\frac{A}{2}+3n\prod tg\frac{A}{2}}$$

Because,

$$\sum tg\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{p} \text{ and } \prod tg\frac{A}{2}=\frac{r}{p},$$

we obtain the conclusion.

Proof of 1.15) Applying H. Bergström's inequality we deduce that

$$\sum\frac{tg\frac{A}{2}tg^2\frac{B}{2}}{mtg\frac{A}{2}+ntg\frac{B}{2}}=\sum\frac{tg^2\frac{A}{2}tg^2\frac{B}{2}}{mtg^2\frac{A}{2}+ntg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}}\geq\frac{\left(\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\right)^2}{m\sum tg^2\frac{A}{2}+n\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}}.$$

Since,

$$\sum tg^2\frac{A}{2}=\frac{(4R+r)^2-2p^2}{p^2} \text{ and } \sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}=1,$$

we get the result.

Proof of 1.16) By H. Bergström's inequality we obtain

$$\sum\frac{tg^2\frac{A}{2}tg^2\frac{B}{2}}{m+ntg^2\frac{B}{2}tg^2\frac{C}{2}}\geq\frac{\left(\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\right)^2}{3m+n\sum tg^2\frac{A}{2}tg^2\frac{B}{2}}.$$

Since,

$$\sum tg^2\frac{A}{2}tg^2\frac{B}{2}=\frac{p^2-2r^2-8Rr}{p^2} \text{ and } \sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}=1,$$

we get the result.

Proof of 1.17) By H. Bergström's inequality we deduce

$$\sum \frac{tg^2\frac{A}{2}tg^2\frac{B}{2}}{m+ntg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}} \geq \frac{\left(\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\right)^2}{3m+n\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}}.$$

Because

$$\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}=1,$$

we obtain the conclusion.

Proof of 1.18) Applying H. Bergström's inequality we deduce that

$$\sum \frac{tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}}{m+ntg^2\frac{C}{2}} = \sum \frac{tg^2\frac{A}{2}tg^2\frac{B}{2}}{mtg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+ntg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}tg\frac{C}{2}} \geq$$

$$\geq \frac{\left(\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\right)^2}{m\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+n\prod tg\frac{A}{2}\sum tg\frac{C}{2}}$$

Since,

$$\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}=1,\ \prod tg\frac{A}{2}=\frac{r}{p} \text{ and } \sum tg\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{p},$$

we get the result.

Proof of 1.19) By H. Bergström's inequality we deduce

$$\sum \frac{tg^2\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}}{mtg\frac{A}{2}+ntg\frac{B}{2}} = \sum \frac{tg^2\frac{A}{2}tg^2\frac{B}{2}}{mtg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+ntg^2\frac{B}{2}} \geq \frac{\left(\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\right)^2}{m\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+n\sum tg^2\frac{B}{2}}.$$

Since,

$$\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}=1 \text{ and } \sum tg^2\frac{A}{2}=\frac{(4R+r)^2}{p^2}-2,$$

we obtain the conclusion.

Proof of 1.20) By H. Bergström's inequality we obtain

$$\sum \frac{tg^2\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}}{mtg\frac{A}{2}+ntg\frac{B}{2}}=\sum \frac{tg^2\frac{A}{2}tg^2\frac{B}{2}}{mtg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+ntg^2\frac{B}{2}}\geq \frac{\left(\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\right)^2}{m\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+n\sum tg^2\frac{B}{2}}.$$

Using

$$\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}=1 \text{ and } \sum tg^2\frac{A}{2}=\frac{(4R+r)^2}{p^2}-2,$$

we get the result.

Proof of 1.21) Applying H. Bergström's inequality we deduce that

$$\sum \frac{tg^2\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}}{mtg^3\frac{B}{2}+ntg\frac{C}{2}}=\sum \frac{\left(tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\right)^2}{mtg^4\frac{B}{2}+ntg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}}\geq \frac{\left(\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\right)^2}{m\sum tg^4\frac{A}{2}+n\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}},$$

and because we have

$$\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}=1,$$

we obtain the conclusion.

Proof of 1.22) By H. Bergström's inequality we deduce

$$\sum \frac{\sin^2 A}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}\geq \frac{\left(\sum \sin A\right)^2}{\sum \cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}},$$

Since,

$$\sum \sin A=\frac{p}{R} \quad \text{and} \quad \sum \cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}=\frac{(4R+r)^2+p^2}{16R^2},$$

we obtain the conclusion.

Proof of 1.23) By H. Bergström's inequality we deduce

$$\sum \frac{\sin^2 A}{\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}\geq \frac{\left(\sum \sin A\right)^2}{\sum \sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}},$$

Since,

$$\sum \sin A=\frac{p}{R} \quad \text{and} \quad \sum \sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}=\frac{p^2+r^2-8R^2}{16R^2},$$

we get the result.

Proof of 1.24) By H. Bergström's inequality we obtain

$$\sum \frac{\sin^4 A}{x\sin^2 \frac{A}{2}\sin^2 \frac{B}{2} + y\cos^2 \frac{C}{2}\cos^2 \frac{A}{2}} = \sum \frac{\left(\sin^2 A\right)^2}{x\sin^2 \frac{A}{2} + y\sin^2 \frac{B}{2} + z\cos^2 \frac{C}{2}} \geq$$

$$\geq \frac{\left(\sum \sin^2 A\right)^2}{x\sum \sin^2 \frac{A}{2}\sin^2 \frac{B}{2} + y\sum \cos^2 \frac{A}{2}\cos^2 \frac{B}{2}}$$

From,

$$\sum \sin^2 A = \frac{p^2 - 4Rr - r^2}{2R^2}, \sum \sin^2 \frac{A}{2}\sin^2 \frac{B}{2} = \frac{p^2 + r^2 - 8R^2}{16R^2} \text{ and}$$

$$\sum \cos^2 \frac{A}{2}\cos^2 \frac{B}{2} = \frac{(4R+r)^2 + p^2}{16R^2}$$

we deduce the result.

Proof of 1.25) From H. Bergström's inequality we obtain

$$\sum \frac{\sin^2 A}{x\sin^2 \frac{A}{2} + y\cos^2 \frac{B}{2}\cos^2 \frac{C}{2}} \geq \frac{\left(\sum \sin A\right)^2}{x\sum \sin^2 \frac{A}{2} + y\sum \cos^2 \frac{A}{2}\cos^2 \frac{B}{2}}$$

Because we have

$$\sum \sin A = \frac{p}{R}, \sum \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2R-r}{2R} \text{ and } \sum \cos^2 \frac{A}{2}\cos^2 \frac{B}{2} = \frac{(4R+r)^2 + p^2}{16R^2}$$

we get the result.

Proof of 1.26) By H. Bergström's inequality we deduce

$$\sum \frac{\sin^2 A}{x\cos^2 \frac{A}{2} + y\sin^2 \frac{B}{2}\sin^2 \frac{C}{2}} \geq \frac{\left(\sum \sin A\right)^2}{x\sum \cos^2 \frac{A}{2} + y\sum \sin^2 \frac{A}{2}\sin^2 \frac{B}{2}}$$

Using the following formulas

$$\sum \sin A = \frac{p}{R}, \sum \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{4R+r}{2R} \text{ and } \sum \sin^2 \frac{A}{2}\sin^2 \frac{B}{2} = \frac{p^2 + r^2 - 8R^2}{16R^2}$$

we get the conclusion.

Proof of 1.27) By H. Bergström's inequality we have

$$\sum \frac{1}{x + y\sin A + z\cos B} \geq \frac{9}{3x + y\sum \sin A + z\sum \cos B}$$

Since,

$$\sum \sin A = \frac{p}{r} \text{ and } \sum \cos A = \frac{R+r}{R}$$

it follows the conclusion.

Proof of 1.28) By H. Bergström's inequality we have

$$\sum\left(m+n\cdot ctg\frac{A}{2}\cdot ctg\frac{B}{2}\right)^2\geq\frac{\left(\sum\left(m+n\cdot ctg\frac{A}{2}\cdot ctg\frac{B}{2}\right)\right)^2}{3}=\frac{\left(3m+n\sum ctg\frac{A}{2}ctg\frac{B}{2}\right)^2}{3}$$

Since

$$\sum ctg\frac{A}{2}ctg\frac{B}{2}=\frac{4R+r}{r}$$

we are done.

Proof of 1.29) By Bergström's inequality we have:

$$U=\sum a^2 tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}=\sum\frac{a^2}{ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2}}\geq\frac{(a+b+c)^2}{\sum ctg\frac{A}{2}ctg\frac{B}{2}},$$

but,

$$\sum ctg\frac{A}{2}ctg\frac{B}{2}=\frac{4R+r}{r},$$

so q.e.d..

Proof of 1.30) Proof. By Bergström's inequality we have:

$$U=\sum a^2 ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2}=\sum\frac{a^2}{tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}}\geq\frac{(a+b+c)^2}{\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}},$$

but,

$$\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}=1,$$

so, we get the conclusion.

Proof of 1.31) By Bergström's inequality we have

$$\sum\frac{1}{x+y\sin^2\frac{A}{2}+z\cos^2\frac{B}{2}}\geq\frac{9}{3x+y\sum\sin^2\frac{A}{2}+z\sum\cos^2\frac{A}{2}}.$$

Since,

$$\sum\sin^2\frac{A}{2}=\frac{2R-r}{2R},$$

and

$$\sum\cos^2\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{2R},$$

we obtain the conclusion.

Proof of 1.32) By Bergström's inequality we have

$$\sum \frac{\sin^4 \frac{A}{2}}{m\cos^2 \frac{B}{2} + n\cos^2 \frac{C}{2}} \ge \frac{\left(\sum \sin^2 \frac{A}{2}\right)^2}{(m+n)\cdot \sum \cos^2 \frac{A}{2}}.$$

Because,

$$\sum \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2R-r}{2R},$$

and

$$\sum \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{4R+r}{2R},$$

we obtain the desired conclusion.

Proof of 1.33) By Bergström's inequality we have

$$\sum \frac{\sin^4 \frac{A}{2}}{m\sin^2 \frac{B}{2} + n\cos^2 \frac{C}{2}} \ge \frac{\left(\sum \sin^2 \frac{A}{2}\right)^2}{m\sum \sin^2 \frac{A}{2} + n\sum \cos^2 \frac{A}{2}}.$$

Since,

$$\sum \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2R-r}{2R},$$

and

$$\sum \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{4R+r}{2R},$$

the proof is complete.

Proof of 1.34) By Bergström's inequality we have

$$\sum \frac{\sin^4 \frac{A}{2}}{m\sin^2 \frac{B}{2} + n\sin^2 \frac{C}{2}} \ge \frac{\left(\sum \sin^2 \frac{A}{2}\right)^2}{(m+n)\sum \sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{\sum \sin^2 \frac{A}{2}}{m+n}.$$

Because,

$$\sum \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2R-r}{2R},$$

q.e.d.

Proof of 1.35) By Bergström's inequality we have

$$\sum \frac{\sin^4 \frac{A}{2}}{m \cdot \frac{2R-r}{2R} + n\cos^2 \frac{B}{2}} \geq \frac{\left(\sum \sin^2 \frac{A}{2}\right)^2}{3m \cdot \frac{2R-r}{2R} + n\sum \cos^2 \frac{A}{2}}.$$

Since,

$$\sum \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2R-r}{2R}, \text{ and}$$

$$\sum \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{4R+r}{2R},$$

the proof is complete.

Proof of 1.36) By Bergström's inequality we have

$$\sum \frac{\cos^4 \frac{A}{2}}{m\sin^2 \frac{B}{2} + n\sin^2 \frac{C}{2}} = \sum \frac{\left(\cos^2 \frac{A}{2}\right)^2}{\left(m\sin^2 \frac{B}{2} + n\sin^2 \frac{C}{2}\right)} \geq$$

$$\geq \frac{\left(\sum \cos^2 \frac{A}{2}\right)^2}{\left(m\sum \sin^2 \frac{A}{2} + n\sum \sin^2 \frac{A}{2}\right)} = \frac{\left(\sum \cos^2 \frac{A}{2}\right)^2}{(m+n)\sum \sin^2 \frac{A}{2}}$$

Because,

$$\sum \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2R-r}{2R},$$

and

$$\sum \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{4R+r}{2R},$$

we obtain the conclusion.

Proof of 1.37) By Bergström's inequality we have

$$\sum \frac{\cos^4 \frac{A}{2}}{m\cos^2 \frac{B}{2} + n\cos^2 \frac{C}{2}} = \sum \frac{\left(\cos^2 \frac{A}{2}\right)^2}{\left(m\cos^2 \frac{B}{2} + n\cos^2 \frac{C}{2}\right)} \geq$$

$$\geq \frac{\left(\sum \cos^2 \frac{A}{2}\right)^2}{\left(m\sum \cos^2 \frac{A}{2} + n\sum \cos^2 \frac{A}{2}\right)} = \frac{\left(\sum \cos^2 \frac{A}{2}\right)^2}{(m+n)\sum \cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{\sum \cos^2 \frac{A}{2}}{m+n}$$

Since,

$$\sum \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{4R+r}{2R},$$

completes the proof.

Proof of 1.38) By Bergström's inequality we have

$$\sum \frac{\cos^4 \frac{A}{2}}{m\sin^2 \frac{B}{2} + n\cos^2 \frac{C}{2}} = \sum \frac{\left(\cos^2 \frac{A}{2}\right)^2}{\left(m\sin^2 \frac{B}{2} + n\cos^2 \frac{C}{2}\right)} \geq$$

$$\geq \frac{\left(\sum \cos^2 \frac{A}{2}\right)^2}{\left(m\sum \sin^2 \frac{A}{2} + n\sum \cos^2 \frac{A}{2}\right)}$$

Since,

$$\sum \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2R-r}{2R},$$

and

$$\sum \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{4R+r}{2R},$$

we obtain the conclusion.

Proof of 1.39) By Bergström's inequality we have

$$\sum \frac{\cos^4 \frac{A}{2}}{m \cdot \frac{4R+r}{2R} + n\sin^2 \frac{A}{2}} \geq \frac{\left(\sum \cos^2 \frac{A}{2}\right)^2}{3m \cdot \frac{4R+r}{2R} + n\sum \sin^2 \frac{A}{2}}$$

But,

$$\sum \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2R-r}{2R},$$

and

$$\sum \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{4R+r}{2R},$$

and we are done.

Theorem 2.

2.1) If $x, y \in R_+^*$ and $m \in R_+$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{tg\frac{A}{2}}{(x\cdot tg\frac{B}{2}+y\cdot tg\frac{C}{2})^m}+\frac{tg\frac{B}{2}}{(x\cdot tg\frac{C}{2}+y\cdot tg\frac{A}{2})^m}+\frac{tg\frac{C}{2}}{(x\cdot tg\frac{A}{2}+y\cdot tg\frac{B}{2})^m}\geq\frac{(4R+r)^{m+1}}{(x+y)^m p^{m+1}};$$

2.2) If $x, y \in R_+^*$ and $m \in R_+$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{tg^{m+1}\frac{A}{2}}{(x\cdot tg\frac{B}{2}+y\cdot tg\frac{C}{2})^m}+\frac{tg^{m+1}\frac{B}{2}}{(x\cdot tg\frac{C}{2}+y\cdot tg\frac{A}{2})^m}+\frac{tg^{m+1}\frac{C}{2}}{(x\cdot tg\frac{A}{2}+y\cdot tg\frac{B}{2})^m}\geq\frac{4R+r}{(x+y)^m p};$$

2.3) If $x, y \in R_+^*$ and $m \in R_+$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{tg^{2m+1}\frac{A}{2}}{(x\cdot ctg\frac{B}{2}+y\cdot ctg\frac{C}{2})^m}+\frac{tg^{2m+1}\frac{B}{2}}{(x\cdot ctg\frac{C}{2}+y\cdot ctg\frac{A}{2})^m}+\frac{tg^{2m+1}\frac{C}{2}}{(x\cdot ctg\frac{A}{2}+y\cdot ctg\frac{B}{2})^m}\geq$$

$$\geq\frac{(4R+r)r^m}{(x+y)^m p^{m+1}};$$

2.4) If $x, y \in R_+^*$ and $m \in R_+$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{tg\frac{A}{2}}{(x+y\cdot tg\frac{B}{2}\cdot tg\frac{C}{2})^m}+\frac{tg\frac{B}{2}}{(x+y\cdot tg\frac{C}{2}\cdot tg\frac{A}{2})^m}+\frac{tg\frac{C}{2}}{(x+y\cdot tg\frac{A}{2}\cdot tg\frac{B}{2})^m}\geq$$

$$\geq\frac{(4R+r)^{m+1}}{p(x(4R+r)+3ry)^m};$$

2.5) If $x, y, z \in R_+^*$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{ctg^{2m+1}\frac{A}{2}}{(xctg\frac{A}{2}+ytg\frac{B}{2}+ztg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2})^m}+\frac{ctg^{2m+1}\frac{B}{2}}{(xctg\frac{B}{2}+ytg\frac{C}{2}+ztg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2})^m}+$$
$$+\frac{ctg^{2m+1}\frac{C}{2}}{(xctg\frac{C}{2}+ytg\frac{A}{2}+ztg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2})^m}\geq\frac{p^{2m+1}}{((3x+y)p+3zr)^m r^{m+1}};$$

2.6) If $x,y\in R_+^*$ and $m\in R_+$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{ctg^{2m+1}\frac{A}{2}}{(x\cdot tg\frac{B}{2}+y\cdot tg\frac{C}{2})^m}+\frac{ctg^{2m+1}\frac{B}{2}}{(x\cdot tg\frac{C}{2}+y\cdot tg\frac{A}{2})^m}+\frac{ctg^{2m+1}\frac{C}{2}}{(x\cdot tg\frac{A}{2}+y\cdot tg\frac{B}{2})^m}\geq\frac{p^{m+1}}{(x+y)^m r^{m+1}};$$

2.7) If $x,y\in R_+^*$ and $m\in R_+$, then in any triangle ABC holds

$$\frac{tg\frac{A}{2}\cdot tg^{m+1}\frac{B}{2}}{(x\cdot tg\frac{A}{2}+y\cdot tg\frac{B}{2})^m}+\frac{tg\frac{B}{2}\cdot tg^{m+1}\frac{C}{2}}{(x\cdot tg\frac{B}{2}+y\cdot tg\frac{C}{2})^m}+\frac{tg\frac{C}{2}\cdot tg^{m+1}\frac{A}{2}}{(x\cdot tg\frac{C}{2}+y\cdot tg\frac{A}{2})^m}\geq$$
$$\geq\frac{p^{2m}}{\left(x\cdot(4R+r)^2+(y-2x)\cdot p^2\right)^m};$$

Proof of 2.1) We have

$$U=\sum\frac{tg\frac{A}{2}}{\left(xtg\frac{B}{2}+ytg\frac{C}{2}\right)^m}=\sum\frac{tg^{m+1}\frac{A}{2}}{\left(xtg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+ytg\frac{A}{2}tg\frac{C}{2}\right)^m},$$

where applying J. Radon's inequality we deduce that

$$U\geq\frac{\left(\sum tg\frac{A}{2}\right)^{m+1}}{(x+y)^m\left(\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\right)^m}.$$

Since

$$\sum tg\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{p}\text{ and }\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}=1,$$

we get the result.

Proof of 2.2) $U=\sum \dfrac{tg^{m+1}\dfrac{A}{2}}{\left(xtg\dfrac{B}{2}+ytg\dfrac{C}{2}\right)^m}$,

and by J. Radon's inequality we obtain that

$$U\geq \frac{\left(\sum tg\dfrac{A}{2}\right)^{m+1}}{(x+y)^m\left(\sum tg\dfrac{A}{2}\right)^m}=\frac{\sum tg\dfrac{A}{2}}{(x+y)^m}.$$

Using the fact

$$\sum tg\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{p},$$

we get the conclusion

Proof of 2.3) We have

$$U=\sum \frac{tg^{2m+1}\dfrac{A}{2}}{\left(xctg\dfrac{B}{2}+yctg\dfrac{C}{2}\right)^m}=\sum \frac{tg^{m+1}\dfrac{A}{2}}{\left(xctg\dfrac{A}{2}ctg\dfrac{B}{2}+yctg\dfrac{A}{2}ctg\dfrac{C}{2}\right)^m}.$$

By J. Radon's inequality we obtain that

$$U\geq \frac{\left(\sum tg\dfrac{A}{2}\right)^{m+1}}{(x+y)^m\left(\sum ctg\dfrac{A}{2}ctg\dfrac{B}{2}\right)^m}.$$

Since

$$\sum tg\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{p} \text{ and } \sum ctg\frac{A}{2}ctg\frac{B}{2}=\frac{4R+r}{r}$$

we obtain the conclusion.

Proof of 2.4) We have

$$V=\sum \frac{tg\dfrac{A}{2}}{(x+y\cdot tg\dfrac{B}{2}\cdot tg\dfrac{C}{2})^m}=\sum \frac{tg^{m+1}\dfrac{A}{2}}{(x\cdot tg\dfrac{A}{2}+y\cdot tg\dfrac{A}{2}tg\dfrac{B}{2}tg\dfrac{C}{2})^m}.$$

By J. Radon's inequality we obtain that

$$V \geq \frac{\left(tg\frac{A}{2}\right)^{m+1}}{(x\sum tg\frac{A}{2}+3y\cdot tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2})^{m}}$$

Using well-known

$$\sum tg\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{p} \text{ and } \prod tg\frac{A}{2}=\frac{r}{p},$$

we obtain the conclusion.

Proof of 2.5) By J. Radon's inequality we obtain that

$$\sum\frac{ctg^{2m+1}\frac{A}{2}}{(xctg\frac{A}{2}+ytg\frac{B}{2}+ztg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2})^{m}}=\sum\frac{ctg^{m+1}\frac{A}{2}}{(x+ytg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+ztg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2})^{m}}\geq$$

$$\geq\frac{\left(\sum ctg\frac{A}{2}\right)^{m+1}}{\left(3x+y\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+3z\prod tg\frac{A}{2}\right)}$$

Because we have

$$\sum ctg\frac{A}{2}=\frac{p}{r},\ \sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}=1 \text{ and } \prod tg\frac{A}{2}=\frac{r}{p}$$

we get the result.

Proof of 2.6) We have

$$V=\sum\frac{ctg^{2m+1}\frac{A}{2}}{(x\cdot tg\frac{B}{2}+y\cdot tg\frac{C}{2})^{m}}=\sum\frac{ctg^{m+1}\frac{A}{2}}{(x\cdot tg\frac{A}{2}\cdot tg\frac{B}{2}+y\cdot tg\frac{A}{2}tg\frac{C}{2})^{m}}.$$

From J. Radon's inequality we obtain that

$$V\geq\frac{\left(ctg\frac{A}{2}\right)^{m+1}}{(x+y)^{m}\left(\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\right)^{m}}$$

Because

$$\sum ctg\frac{A}{2}=\frac{p}{r} \text{ and } \sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}=1,$$

it follows the conclusion.

Proof of 2.7) By J. Radon's inequality we obtain that

$$\sum \frac{tg\frac{A}{2}tg^{m+1}\frac{B}{2}}{(xtg\frac{A}{2}+ytg\frac{B}{2})^m}=\sum \frac{(tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2})^{m+1}}{(xtg^2\frac{A}{2}+ytg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2})^m}\geq \frac{\left(\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\right)^2}{(x\sum tg^2\frac{A}{2}+y\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2})^m}.$$

Since

$$\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}=1 \text{ and } \sum tg^2\frac{A}{2}=\frac{(4R+r)^2}{p^2}-2,$$

we get the result.

References

[1] Octogon Mathematical Magazine 1993-2023

[2] Romanian Mathematical Magazine 2020-2023

2. Principiul lui Dirichlet

În acest articol este enunțat Principiul lui Dirichlet și sunt atașate probleme selectate din diverse publicații de specialitate, ce se pot rezolva cu acest tip de rationament.

Marin Chirciu[1]

Art 4400

Principiul lui Dirichlet:

Din trei numere pozitive a, b, c există cel puțin două numere care sunt situate de aceeași parte a lui 1. Fie b, c numerele, deci $(1-b)(1-c) \geq 0 \Leftrightarrow 1-b-c+bc \geq 0 \Leftrightarrow b+c-bc \leq 1$.

Aplicația1.

If $a, b, c > 0$, $a^2+b^2+c^2+abc=4$ then

$$ab+bc+ca-abc \leq 2.$$

Bui Anh Khoa, Vietnam

Soluție

Demonstrăm

Lema

If $a, b, c > 0$ then

$$abc \geq bc+ca-c.$$

Soluție

Folosind Principiul lui Dirichlet dintre numerele $a-1, b-1, c-1$ rezultă că două dintre ele au același semn, fie ele $a-1, b-1$, deci $(a-1)(b-1) \geq 0$.

Avem $(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab \geq a+b-1 \Rightarrow abc \geq c(a+b-1) \Leftrightarrow abc \geq bc+ca-c$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Din ipoteză $a^2+b^2+c^2+abc=4 \Leftrightarrow 4-c^2=\left(a^2+b^2\right)+abc \overset{AGM}{\geq} 2ab+abc$.

Rezultă $4-c^2 \geq 2ab+abc \Leftrightarrow (2-c)(2+c) \geq ab(2+c) \Leftrightarrow (2-c) \geq ab \Leftrightarrow ab \leq 2-c$, (1).

Folosind (1) și **Lema** obținem:

[1] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu", Pitești*

$$Ms = ab+bc+ca-abc \overset{(1)}{\le} (2-c)+bc+ca-abc \overset{Lema}{\le} (2-c)+bc+ca-(bc+ca-c) = 2 = Md .$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Aplicația2.

Problema se poate dezvolta.

Let $0 \le \lambda \le 1$. If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2+abc=4$ then

$$ab+\lambda(bc+ca-abc) \le 3-\lambda .$$

Marin Chirciu

Soluție

Demonstrăm

Lema

If $a,b,c>0$ then

$$abc \ge bc+ca-c .$$

Soluție

Folosind Principiul lui Dirichlet dintre numerele $a-1, b-1, c-1$ rezultă că două dintre ele au același semn, fie ele $a-1, b-1$, deci $(a-1)(b-1) \ge 0$.

Avem $(a-1)(b-1) \ge 0 \Leftrightarrow ab \ge a+b-1 \Rightarrow abc \ge c(a+b-1) \Leftrightarrow abc \ge bc+ca-c$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Din ipoteză $a^2+b^2+c^2+abc=4 \Leftrightarrow 4-c^2=(a^2+b^2)+abc \overset{AGM}{\ge} 2ab+abc$.

Rezultă $4-c^2 \ge 2ab+abc \Leftrightarrow (2-c)(2+c) \ge ab(2+c) \Leftrightarrow (2-c) \ge ab \Leftrightarrow ab \le 2-c$, (1).

Folosind (1) și **Lema** obținem:

$$Ms = ab+\lambda bc+\lambda ca-\lambda abc \overset{(1)}{\le} (2-c)+\lambda(bc+ca-abc) \overset{Lema}{\le} (2-c)+\lambda(bc+ca)-\lambda(bc+ca-c) =$$

$$= 2+c(\lambda-1) \overset{\lambda \le 1}{\le} 2 = Md .$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $(a,b,c)=(1,1,1)$ și $\lambda=1$.

Notă.

Pentru $\lambda=1$ se obține Problema propusă de Bui Anh Khoa în THCS 1/2022.

If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2+abc=4$ then

$$ab+bc+ca-abc \le 2 .$$

Bui Anh Khoa, Vietnam

Aplicația3.

Problema se poate dezvolta.

Let $n \geq 1$. If $a, b, c > 0$, $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ then

$$nab + bc + ca - abc \leq 2n.$$

Marin Chirciu

Soluție

Demonstrăm

Lema

If $a, b, c > 0$ then

$$abc \geq bc + ca - c.$$

Soluție

Folosind Principiul lui Dirichlet dintre numerele $a-1, b-1, c-1$ rezultă că două dintre ele au același semn, fie ele $a-1, b-1$, deci $(a-1)(b-1) \geq 0$.

Avem $(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab \geq a+b-1 \Rightarrow abc \geq c(a+b-1) \Leftrightarrow abc \geq bc+ca-c$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Din ipoteză $a^2+b^2+c^2+abc=4 \Leftrightarrow 4-c^2=\left(a^2+b^2\right)+abc \overset{AGM}{\geq} 2ab+abc$.

Rezultă $4-c^2 \geq 2ab+abc \Leftrightarrow (2-c)(2+c) \geq ab(2+c) \Leftrightarrow (2-c) \geq ab \Leftrightarrow ab \leq 2-c$, (1).

Folosind (1) și **Lema** obținem:

$$Ms = nab+bc+ca-bc \overset{(1)}{\leq} n(2-c)+(bc+ca-abc) \overset{Lema}{\leq} n(2-c)+(bc+ca)-(bc+ca-c)=$$

$$=n(2-c)+c=2n+c(1-n) \overset{n\geq 1}{\leq} 2n = Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $(a,b,c)=(1,1,1)$ și $n=1$.

Notă.

Pentru $n=1$ se obține Problema propusă de Bui Anh Khoa în THCS 1/2022.

If $a, b, c > 0$, $a^2+b^2+c^2+abc=4$ then

$$ab+bc+ca-abc \leq 2.$$

Bui Anh Khoa, Vietnam

Aplicația4.

Vasile Cârtoaje , Mathematical Inequalities 1/2022.

If $a,b,c>0$, $2\sum a+\sum bc=9$ then

$$\frac{1}{ab+4}+\frac{1}{ac+4}+\frac{1}{b+4}+\frac{1}{c+4}\ge\frac{4}{5}.$$

Vasile Cârtoaje

Soluție

Folosim Principiul lui Dirichlet:

Din trei numere pozitive a,b,c există cel puțin două numere care sunt situate de aceeași parte a lui 1. Fie b,c numerele, deci $(1-b)(1-c)\ge 0 \Leftrightarrow 1-b-c+bc\ge 0 \Leftrightarrow b+c-bc\le 1$, (1).

Din ipoteză $9=2\sum a+\sum bc\overset{SOS}{\le}2\sum a+\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2\Rightarrow\sum a\ge 3$, (2).

Rezultă $9=2\sum a+\sum bc\ge 2\cdot 3+\sum bc=6+\sum bc\Rightarrow\sum bc\le 3$, (3).

Avem $(a+1)(b+c)=ab+ac+b+c=(ab+ac+bc)+(b+c-bc)=\sum bc+(b+c-bc)\overset{(3),(1)}{\le}$

$\overset{(3),(1)}{\le}3+1=4$, deci $(a+1)(b+c)\le 4$, (4).

Obținem:

$$Ms=\frac{1}{ab+4}+\frac{1}{ac+4}+\frac{1}{b+4}+\frac{1}{c+4}\ge\frac{(1+1+1+1)^2}{(ab+4)+(ac+4)+(b+4)+(c+4)}=$$

$$=\frac{16}{a(b+c)+(b+c)+16}=\frac{16}{(b+c)(a+1)+16}\overset{(4)}{\ge}\frac{16}{4+16}=\frac{4}{5}=Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația5.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c>0$, $2\sum a+\sum bc=9$ and $\lambda\ge 0$ then

$$\frac{1}{ab+\lambda}+\frac{1}{ac+\lambda}+\frac{1}{b+\lambda}+\frac{1}{c+\lambda}\ge\frac{4}{\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Folosim Principiul lui Dirichlet:

Din trei numere pozitive a,b,c există cel puțin două numere care sunt situate de aceeași parte a lui 1. Fie b,c numerele, deci $(1-b)(1-c)\ge 0 \Leftrightarrow 1-b-c+bc\ge 0 \Leftrightarrow b+c-bc\le 1$, (1).

Din ipoteză $9=2\sum a+\sum bc\overset{SOS}{\le}2\sum a+\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2\Rightarrow\sum a\ge 3$, (2).

Rezultă $9=2\sum a+\sum bc\ge 2\cdot 3+\sum bc=6+\sum bc\Rightarrow\sum bc\le 3$, (3).

Avem $(a+1)(b+c)=ab+ac+b+c=(ab+ac+bc)+(b+c-bc)=\sum bc+(b+c-bc)\overset{(3),(1)}{\le}$

$\overset{(3),(1)}{\le}3+1=4$, deci $(a+1)(b+c)\le 4$, (4).

Obținem:

$$Ms=\frac{1}{ab+\lambda}+\frac{1}{ac+\lambda}+\frac{1}{b+\lambda}+\frac{1}{c+\lambda}\ge\frac{(1+1+1+1)^2}{(ab+\lambda)+(ac+\lambda)+(b+\lambda)+(c+\lambda)}=$$

$$=\frac{16}{a(b+c)+(b+c)+4\lambda}=\frac{16}{(b+c)(a+1)+4\lambda}\overset{(4)}{\ge}\frac{16}{4+4\lambda}=\frac{4}{\lambda+1}=Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Notă.

Pentru $\lambda=4$ se obține Problema propusă de Vasile Cârtoaje în Mathematical Inequalities 1/2022.

Aplicația6.

Problema În aceeași clasă de problem.

If $a,b,c>0$, $2\sum a+\sum bc=9$ then

$$\frac{1}{ab+4}+\frac{1}{ac+4}+\frac{1}{b+4}+\frac{1}{c+4}\ge\frac{4}{5}.$$

Vasile Cârtoaje

Soluție

Folosim Principiul lui Dirichlet:

Din trei numere pozitive a,b,c există cel puțin două numere care sunt situate de aceeași parte a lui 1. Fie b,c numerele, deci $(1-b)(1-c)\ge 0\Leftrightarrow 1-b-c+bc\ge 0\Leftrightarrow b+c-bc\le 1$, (1).

Rezultă $\sum bc\le\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2=\frac{1}{3}(3)^2=3\Rightarrow\sum bc\le 3$, (2).

Avem $(a+1)(b+c)=ab+ac+b+c=(ab+ac+bc)+(b+c-bc)=\sum bc+(b+c-bc)\overset{(2),(1)}{\le}$

$\overset{(2),(1)}{\le}3+1=4$, deci $(a+1)(b+c)\le 4$, (3).

Obținem:

$$Ms=\frac{1}{ab+4}+\frac{1}{ac+4}+\frac{1}{b+4}+\frac{1}{c+4}\geq\frac{(1+1+1+1)^2}{(ab+4)+(ac+4)+(b+4)+(c+4)}=$$

$$=\frac{16}{a(b+c)+(b+c)+4\lambda}=\frac{16}{(b+c)(a+1)+16}\overset{(3)}{\geq}\frac{16}{4+16}=\frac{4}{5}=Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația7.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\frac{1}{ab+\lambda}+\frac{1}{ac+\lambda}+\frac{1}{b+\lambda}+\frac{1}{c+\lambda}\geq\frac{4}{\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Folosim Principiul lui Dirichlet:

Din trei numere pozitive a,b,c există cel puțin două numere care sunt situate de aceeași parte a lui 1. Fie b,c numerele, deci $(1-b)(1-c)\geq 0\Leftrightarrow 1-b-c+bc\geq 0\Leftrightarrow b+c-bc\leq 1$, (1).

Rezultă $\sum bc\leq\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2=\frac{1}{3}(3)^2=3\Rightarrow\sum bc\leq 3$, (2).

Avem $(a+1)(b+c)=ab+ac+b+c=(ab+ac+bc)+(b+c-bc)=\sum bc+(b+c-bc)\overset{(2),(1)}{\leq}$

$\overset{(2),(1)}{\leq}3+1=4$, deci $(a+1)(b+c)\leq 4$, (3).

Obținem:

$$Ms=\frac{1}{ab+\lambda}+\frac{1}{ac+\lambda}+\frac{1}{b+\lambda}+\frac{1}{c+\lambda}\geq\frac{(1+1+1+1)^2}{(ab+\lambda)+(ac+\lambda)+(b+\lambda)+(c+\lambda)}=$$

$$=\frac{16}{a(b+c)+(b+c)+4\lambda}=\frac{16}{(b+c)(a+1)+4\lambda}\overset{(3)}{\geq}\frac{16}{4+4\lambda}=\frac{4}{\lambda+1}=Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația8.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then find Min of

$$P=abc+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2.$$

Biswajt Ghosh

Soluție

Principiul lui Dirichlet:

Din trei numere pozitive a,b,c există cel puțin două numere care sunt situate de aceeași parte a lui 1. Fie b,c numerele, deci $(b-1)(c-1)\geq 0$.

Folosind principiul lui Dirichlet obținem:

$$P=abc+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=abc+a^2-2a+1+(b-1)^2+(c-1)^2=$$

$$=a(bc+a-2)+1+(b-1)^2+(c-1)^2=a(bc+3-b-c-2)+1+(b-1)^2+(c-1)^2=$$

$$=a(bc-b-c+1)+1+(b-1)^2+(c-1)^2=a(b-1)(c-1)+(b-1)^2+(c-1)^2+1\geq 1,$$

cu egalitate pentru $a=b=c=1$.

Deducem că: min $P=1$ pentru $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Aplicația9.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda\geq 0$ fixed. If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then find Min of

$$P=abc+(a-1)^2+(b-1)^2+\lambda(c-1)^2.$$

Marin Chirciu

Soluție

Principiul lui Dirichlet:

Din trei numere pozitive a,b,c există cel puțin două numere care sunt situate de aceeași parte a lui 1. Fie b,c numerele, deci $(b-1)(c-1)\geq 0$.

Folosind principiul lui Dirichlet obținem:

$$P=abc+(a-1)^2+(b-1)^2+\lambda(c-1)^2=abc+a^2-2a+1+(b-1)^2+\lambda(c-1)^2=$$

$$=a(bc+a-2)+1+(b-1)^2+\lambda(c-1)^2=a(bc+3-b-c-2)+1+(b-1)^2+\lambda(c-1)^2=$$

$$=a(bc-b-c+1)+1+(b-1)^2+\lambda(c-1)^2=a(b-1)(c-1)+(b-1)^2+\lambda(c-1)^2+1\geq 1,$$

cu egalitate pentru $a=b=c=1$.

Deducem că: min $P=1$ pentru $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Notă.

Pentru $\lambda=1$ se obține Problema propusă în Higher Secondary Mathematics 10/2021.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then find Min of

$$P=abc+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2.$$

Biswajt Ghosh

Aplicația10.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda \geq 0$ fixed. If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then find Min of

$$P=abc+(a-1)^2+\lambda(b-1)^2+(c-1)^2.$$

Marin Chirciu

Soluție

Principiul lui Dirichlet:

Din trei numere pozitive a,b,c există cel puțin două numere care sunt situate de aceeași parte a lui 1. Fie b,c numerele, deci $(b-1)(c-1)\geq 0$.

Folosind principiul lui Dirichlet obținem:

$$P=abc+(a-1)^2+\lambda(b-1)^2+(c-1)^2=abc+a^2-2a+1+\lambda(b-1)^2+(c-1)^2=$$

$$=a(bc+a-2)+1+\lambda(b-1)^2+(c-1)^2=a(bc+3-b-c-2)+1+\lambda(b-1)^2+(c-1)^2=$$

$$=a(bc-b-c+1)+1+\lambda(b-1)^2+(c-1)^2=a(b-1)(c-1)+\lambda(b-1)^2+(c-1)^2+1\geq 1,$$

cu egalitate pentru $a=b=c=1$.

Deducem că: $\min P=1$ pentru $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Notă.

Pentru $\lambda=1$ se obține Problema propusă în Higher Secondary Mathematics 10/2021.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then find Min of

$$P=abc+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2.$$

Biswajt Ghosh

Aplicația11.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda \geq 0$ fixed. If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then find Min of

$$P=abc+(a-1)^2+\lambda(b-1)^2+\lambda(c-1)^2.$$

Marin Chirciu

Soluție

Principiul lui Dirichlet:

Din trei numere pozitive a,b,c există cel puțin două numere care sunt situate de aceeași parte a lui 1. Fie b,c numerele, deci $(b-1)(c-1)\geq 0$.

Folosind principiul lui Dirichlet obținem:

$$P=abc+(a-1)^2+\lambda(b-1)^2+\lambda(c-1)^2=abc+a^2-2a+1+\lambda(b-1)^2+\lambda(c-1)^2=$$

$$=a(bc+a-2)+1+\lambda(b-1)^2+\lambda(c-1)^2=a(bc+3-b-c-2)+1+\lambda(b-1)^2+\lambda(c-1)^2=$$

$$=a(bc-b-c+1)+1+\lambda(b-1)^2+\lambda(c-1)^2=a(b-1)(c-1)+\lambda(b-1)^2+\lambda(c-1)^2+1\geq 1,$$

cu egalitate pentru $a=b=c=1$.

Deducem că: $\min P=1$ pentru $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Notă.

Pentru $\lambda=1$ se obține Problema propusă în Higher Secondary Mathematics 10/2021.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then find Min of

$$P=abc+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2.$$

Biswajt Ghosh

Aplicația12.

Problema se poate dezvolta.

Let $\lambda\geq 0, n\geq 0$ fixed. If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then find Min of

$$P=abc+(a-1)^2+\lambda(b-1)^2+\lambda(c-1)^2.$$

Marin Chirciu

Soluție

Principiul lui Dirichlet:

Din trei numere pozitive a,b,c există cel puțin două numere care sunt situate de aceeași parte a lui 1. Fie b,c numerele, deci $(b-1)(c-1)\geq 0$.

Folosind principiul lui Dirichlet obținem:

$$P=abc+(a-1)^2+\lambda(b-1)^2+n(c-1)^2=abc+a^2-2a+1+\lambda(b-1)^2+n(c-1)^2=$$

$$=a(bc+a-2)+1+\lambda(b-1)^2+n(c-1)^2=a(bc+3-b-c-2)+1+\lambda(b-1)^2+n(c-1)^2=$$

$$=a(bc-b-c+1)+1+\lambda(b-1)^2+n(c-1)^2=a(b-1)(c-1)+\lambda(b-1)^2+n(c-1)^2+1\geq 1,$$

cu egalitate pentru $a=b=c=1$.

Deducem că: min $P=1$ pentru $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Notă.

Pentru $\lambda=1, n=1$ se obține Problema propusă în Higher Secondary Mathematics 10/2021.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then find Min of

$$P=abc+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2.$$

Biswajt Ghosh

Aplicația12.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\sum\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{2}{\prod(a+1)}\geq 1.$$

Ha Thanh Dat, Vietnam

Soluție

Principiul lui Dirichlet:

Din trei numere pozitive a,b,c există cel puțin două numere care sunt situate de aceeași parte a lui 1. Fie a,b numerele, deci $(1-a)(1-b)\geq 0$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosim Principiul lui Dirichlet

Din trei numere pozitive a,b,c există cel puțin două numere care sunt situate de aceeași parte a lui 1. Fie a,b numerele, deci $(1-a)(1-b)\geq 0 \Leftrightarrow 1-a-b+ab\geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a+b\leq ab+1 \; a+b\leq ab+1=\frac{c+1}{c}.$$

Rezultă:

$$\prod(a+1)=(a+b+ab+1)(c+1)\leq 2(ab+1)(c+1)\leq\frac{2(c+1)^2}{c}\Rightarrow\prod(a+1)\leq\frac{2(c+1)^2}{c},(1).$$

Lema.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}\geq\frac{c}{c+1}.$$

Demonstrație

$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}\overset{CBS}{\geq}\frac{1}{(1+ab)\left(1+\frac{a}{b}\right)}+\frac{1}{(1+ab)\left(1+\frac{b}{a}\right)}=\frac{b}{(1+ab)(a+b)}+\frac{a}{(1+ab)(a+b)}=$$

$$=\frac{1}{1+ab}=\frac{c}{c+1}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** și (1)obținem:

$$LHS=\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{2}{\prod(a+1)}\overset{Lema}{\geq}\frac{c}{c+1}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{2}{\prod(a+1)}\overset{(1)}{\geq}$$

$$\overset{(1)}{\geq}\frac{c}{c+1}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{2}{\frac{2(c+1)^2}{c}}=\frac{c}{c+1}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{c}{(c+1)^2}=1.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația13.

Inegalitatea se poate dezvolta.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $0\leq\lambda\leq 2$ then

$$\sum\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{\lambda}{\prod(a+1)}\geq\frac{\lambda+6}{8}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Principiul lui Dirichlet:

Din trei numere pozitive a,b,c există cel puțin două numere care sunt situate de aceeași parte a lui 1. Fie a,b numerele, deci $(1-a)(1-b)\geq 0$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosim Principiul lui Dirichlet

Din trei numere pozitive a,b,c există cel puțin două numere care sunt situate de aceeași parte a lui 1. Fie a,b numerele, deci $(1-a)(1-b)\geq 0 \Leftrightarrow 1-a-b+ab\geq 0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a+b\leq ab+1\ a+b\leq ab+1=\frac{c+1}{c}.$$

Rezultă:

$$\prod(a+1)=(a+b+ab+1)(c+1)\leq 2(ab+1)(c+1)\leq\frac{2(c+1)^2}{c}\Rightarrow\prod(a+1)\leq\frac{2(c+1)^2}{c}, (1).$$

Lema.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}\ge\frac{c}{c+1}.$$

Demonstrație

$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}\overset{CBS}{\ge}\frac{1}{(1+ab)\left(1+\frac{a}{b}\right)}+\frac{1}{(1+ab)\left(1+\frac{b}{a}\right)}=\frac{b}{(1+ab)(a+b)}+\frac{a}{(1+ab)(a+b)}=$$

$$=\frac{1}{1+ab}=\frac{c}{c+1}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** şi (1)obținem:

$$LHS=\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{\lambda}{\prod(a+1)}\overset{Lema}{\ge}\frac{c}{c+1}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{\lambda}{\prod(a+1)}\overset{(1)}{\ge}$$

$$\overset{(1)}{\ge}\frac{c}{c+1}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{\lambda}{\frac{2(c+1)^2}{c}}=\frac{c}{c+1}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{\lambda c}{2(c+1)^2}\overset{(2)}{\ge}\frac{\lambda+6}{8},$$

unde (2) $\Leftrightarrow\frac{c}{c+1}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{\lambda c}{2(c+1)^2}\ge\frac{\lambda+6}{8}\Leftrightarrow(2-\lambda)(c-1)^2\ge0$, care rezultă din condiția din ipoteză $0\le\lambda\le2$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Nota.

Pentru $\lambda=2$ se obține Problema propusă în THCS 1/2023.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\sum\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{2}{\prod(a+1)}\ge1.$$

Ha Thanh Dat, Vietnam

Aplicația14.

Cazul $\lambda=1$

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\sum\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{\prod(a+1)}\ge\frac{7}{8}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Principiul lui Dirichlet:

Din trei numere pozitive a,b,c există cel puțin două numere care sunt situate de aceeași parte a lui 1. Fie a,b numerele, deci $(1-a)(1-b)\ge 0$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosim Principiul lui Dirichlet.

Din trei numere pozitive a,b,c există cel puțin două numere care sunt situate de aceeași parte a lui 1. Fie a,b numerele, deci $(1-a)(1-b)\ge 0 \Leftrightarrow 1-a-b+ab\ge 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a+b\le ab+1 \; a+b\le ab+1=\frac{c+1}{c}.$$

Rezultă:

$$\prod(a+1)=(a+b+ab+1)(c+1)\le 2(ab+1)(c+1)\le\frac{2(c+1)^2}{c}\Rightarrow\prod(a+1)\le\frac{2(c+1)^2}{c},(1).$$

Lema.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}\ge\frac{c}{c+1}.$$

Demonstrație

$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}\overset{CBS}{\ge}\frac{1}{(1+ab)\left(1+\frac{a}{b}\right)}+\frac{1}{(1+ab)\left(1+\frac{b}{a}\right)}=\frac{b}{(1+ab)(a+b)}+\frac{a}{(1+ab)(a+b)}=$$

$$=\frac{1}{1+ab}=\frac{c}{c+1}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** și (1)obținem:

$$LHS=\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{\lambda}{\prod(a+1)}\overset{Lema}{\ge}\frac{c}{c+1}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{1}{\prod(a+1)}\overset{(1)}{\ge}$$

$$\overset{(1)}{\ge}\frac{c}{c+1}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{1}{\frac{2(c+1)^2}{c}}=\frac{c}{c+1}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{c}{2(c+1)^2}\overset{(2)}{\ge}\frac{7}{8},$$

unde (2) $\Leftrightarrow \frac{c}{c+1}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{c}{2(c+1)^2}\geq\frac{7}{8} \Leftrightarrow 2(c-1)^2\geq 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația15.

If $a,b,c\in(0,1)$, $abc=(1-a)(1-b)(1-c)$ then

$$\sum\frac{a^2+b^4}{b}\geq\frac{15}{8}.$$

Ha Thanh Dat, Vietnam

Soluție

$$abc=(1-a)(1-b)(1-c) \Leftrightarrow \frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{abc}=1 \Leftrightarrow \frac{1-a}{a}\cdot\frac{1-b}{b}\cdot\frac{1-c}{c}=1 \Leftrightarrow xyz=1,$$

unde $x=\frac{1-a}{a}, y=\frac{1-b}{b}, z=\frac{1-c}{c} \Leftrightarrow a=\frac{1}{1+x}, b=\frac{1}{1+y}, c=\frac{1}{1+z}$.

Principiul lui Dirichlet:

Din trei numere pozitive x,y,z există cel puțin două numere care sunt situate de aceeași parte a lui 1. Fie x,y numerele, deci $(1-x)(1-y)\geq 0$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosim Principiul lui Dirichlet

Din trei numere pozitive x,y,z există cel puțin două numere care sunt situate de aceeași parte a lui 1. Fie x,y numerele, deci $(1-x)(1-y)\geq 0 \Leftrightarrow 1-x-y+xy\geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x+y\leq xy+1 \Leftrightarrow x+y\leq xy+1=\frac{z+1}{z}.$$

Lema.

If $x,y,z>0$, $xyz=1$ then

$$\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}\geq\frac{z}{z+1}.$$

Demonstrație

$$\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}\overset{CBS}{\geq}\frac{1}{(1+xy)\left(1+\frac{x}{y}\right)}+\frac{1}{(1+xy)\left(1+\frac{y}{x}\right)}=\frac{y}{(1+xy)(x+y)}+\frac{x}{(1+xy)(x+y)}=$$

$$=\frac{1}{1+xy}=\frac{z}{z+1}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$a^2+b^2+c^2=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{1}{(z+1)^2}\overset{Lema}{\geq}\frac{z}{z+1}+\frac{1}{(z+1)^2}=\frac{z^2+z+1}{(z+1)^2}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{4},$$

unde(1) $\Leftrightarrow \frac{z^2+z+1}{(z+1)^2}\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow(z-1)^2\geq 0\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq\frac{3}{4}$, (2).

Inegalitatea de demonstrat $\sum\frac{a^2+b^4}{b}\geq\frac{15}{8}\Leftrightarrow\sum\frac{a^2}{b}+\sum a^3\geq\frac{15}{8}$.

Vom arăta că $\sum\frac{a^2}{b}\geq\frac{3}{2}$ și $\sum a^3\geq\frac{3}{8}$.

Să demonstrăm că: $\sum\frac{a^2}{b}\geq\frac{3}{2}$.

$$\sum\frac{a^2}{b}=\sum\frac{a^4}{a^2b}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum a^2b}\overset{(3)}{\geq}\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sqrt{\sum a^2\cdot\frac{1}{3}\sum a^2}}=\frac{\left(\sum a^2\right)}{\sqrt{\frac{1}{3}\sum a^2}}=\sqrt{3\sum a^2}\overset{(2)}{\geq}\sqrt{3\cdot\frac{3}{4}}=\frac{3}{2}, \text{ vezi(3):}$$

$$\sum a^2b=\sum a\cdot ab\overset{CBS}{\leq}\sqrt{\sum a^2\sum a^2b^2}\overset{SOS}{\leq}\sqrt{\sum a^2\cdot\frac{1}{3}\left(\sum a^2\right)^2}=\sum a^2\sqrt{\frac{1}{3}\sum a^2}.$$

Să demonstrăm că: $\sum a^3\geq\frac{3}{8}$.

$$\sum a^3=\sum\frac{a^4}{a}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum a}\overset{CBS}{\geq}\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sqrt{3\sum a^2}}=\sqrt{\frac{\left(\sum a^2\right)^3}{3}}\overset{(2)}{\geq}\sqrt{\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3}{3}}=\frac{3}{8}.$$

Din $\sum\frac{a^2}{b}\geq\frac{3}{2}$ și $\sum a^3\geq\frac{3}{8}\Rightarrow\sum\frac{a^2}{b}+\sum a^3\geq\frac{3}{2}+\frac{3}{8}=\frac{15}{8}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{2}$.

<u>Aplicația15.</u>

Inegalitatea se poate dezvolta.

If $a,b,c\in(0,1)$, $abc=(1-a)(1-b)(1-c)$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\sum\frac{a^2+\lambda b^4}{b}\geq\frac{3(\lambda+4)}{8}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$abc=(1-a)(1-b)(1-c)\Leftrightarrow \frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{abc}=1\Leftrightarrow \frac{1-a}{a}\cdot\frac{1-b}{b}\cdot\frac{1-c}{c}=1\Leftrightarrow xyz=1,$$

unde $x=\dfrac{1-a}{a},y=\dfrac{1-b}{b},z=\dfrac{1-c}{c}\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{1+x},b=\dfrac{1}{1+y},c=\dfrac{1}{1+z}$.

Principiul lui Dirichlet:

Din trei numere pozitive x,y,z există cel puțin două numere care sunt situate de aceeași parte a lui 1. Fie x,y numerele, deci $(1-x)(1-y)\geq 0$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosim Principiul lui Dirichlet

Din trei numere pozitive x,y,z există cel puțin două numere care sunt situate de aceeași parte a lui 1. Fie x,y numerele, deci $(1-x)(1-y)\geq 0\Leftrightarrow 1-x-y+xy\geq 0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x+y\leq xy+1\Leftrightarrow x+y\leq xy+1=\frac{z+1}{z}.$$

Lema.

If $x,y,z>0$, $xyz=1$ then

$$\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}\geq\frac{z}{z+1}.$$

Demonstrație

$$\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}\overset{CBS}{\geq}\frac{1}{(1+xy)\left(1+\frac{x}{y}\right)}+\frac{1}{(1+xy)\left(1+\frac{y}{x}\right)}=\frac{y}{(1+xy)(x+y)}+\frac{x}{(1+xy)(x+y)}=$$

$$=\frac{1}{1+xy}=\frac{z}{z+1}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$a^2+b^2+c^2=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{1}{(z+1)^2}\overset{Lema}{\geq}\frac{z}{z+1}+\frac{1}{(z+1)^2}=\frac{z^2+z+1}{(z+1)^2}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{4},$$

unde(1) $\Leftrightarrow \dfrac{z^2+z+1}{(z+1)^2}\geq\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow (z-1)^2\geq 0\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq\dfrac{3}{4}$, (2).

Inegalitatea de demonstrat $\sum\dfrac{a^2+\lambda b^4}{b}\geq\dfrac{3(\lambda+4)}{8}\Leftrightarrow\sum\dfrac{a^2}{b}+\lambda\sum a^3\geq\dfrac{3(\lambda+4)}{8}$.

Vom arăta că $\sum \frac{a^2}{b} \geq \frac{3}{2}$ și $\sum a^3 \geq \frac{3}{8}$.

Să demonstrăm că: $\sum \frac{a^2}{b} \geq \frac{3}{2}$.

$$\sum \frac{a^2}{b} = \sum \frac{a^4}{a^2 b} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum a^2 b} \overset{(3)}{\geq} \frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sqrt{\sum a^2 \cdot \frac{1}{3} \sum a^2}} = \frac{\left(\sum a^2\right)}{\sqrt{\frac{1}{3} \sum a^2}} = \sqrt{3 \sum a^2} \overset{(2)}{\geq} \sqrt{3 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{3}{2}, \text{ vezi(3):}$$

$$\sum a^2 b = \sum a \cdot ab \overset{CBS}{\leq} \sqrt{\sum a^2 \sum a^2 b^2} \overset{SOS}{\leq} \sqrt{\sum a^2 \cdot \frac{1}{3}\left(\sum a^2\right)^2} = \sum a^2 \sqrt{\frac{1}{3} \sum a^2}.$$

Să demonstrăm că: $\sum a^3 \geq \frac{3}{8}$.

$$\sum a^3 = \sum \frac{a^4}{a} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum a} \overset{CBS}{\geq} \frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sqrt{3 \sum a^2}} = \sqrt{\frac{\left(\sum a^2\right)^3}{3}} \overset{(2)}{\geq} \sqrt{\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3}{3}} = \frac{3}{8}.$$

Din $\sum \frac{a^2}{b} \geq \frac{3}{2}$ și $\sum a^3 \geq \frac{3}{8} \Rightarrow \sum \frac{a^2}{b} + \lambda \sum a^3 \geq \frac{3}{2} + \lambda \frac{3}{8} = \frac{3(\lambda+4)}{8}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Nota.

Pentru $\lambda = 1$ se obține Problema propusă în THCS 1/2023.

If $a, b, c \in (0,1)$, $abc = (1-a)(1-b)(1-c)$ then

$$\sum \frac{a^2 + b^4}{b} \geq \frac{15}{8}.$$

Ha Thanh Dat, Vietnam

Aplicația16.

Cazul $\lambda = 4$

If $a, b, c \in (0,1)$, $abc = (1-a)(1-b)(1-c)$ then

$$\sum \frac{a^2 + 4b^4}{b} \geq 3.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$abc=(1-a)(1-b)(1-c) \Leftrightarrow \frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{abc}=1 \Leftrightarrow \frac{1-a}{a}\cdot\frac{1-b}{b}\cdot\frac{1-c}{c}=1 \Leftrightarrow xyz=1,$$

unde $x=\frac{1-a}{a}, y=\frac{1-b}{b}, z=\frac{1-c}{c} \Leftrightarrow a=\frac{1}{1+x}, b=\frac{1}{1+y}, c=\frac{1}{1+z}$.

Principiul lui Dirichlet:

Din trei numere pozitive x,y,z există cel puțin două numere care sunt situate de aceeași parte a lui 1. Fie x,y numerele, deci $(1-x)(1-y)\geq 0$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosim Principiul lui Dirichlet

Din trei numere pozitive x,y,z există cel puțin două numere care sunt situate de aceeași parte a lui 1. Fie x,y numerele, deci $(1-x)(1-y)\geq 0 \Leftrightarrow 1-x-y+xy\geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x+y\leq xy+1 \Leftrightarrow x+y\leq xy+1=\frac{z+1}{z}.$$

Lema.

If $x,y,z>0$, $xyz=1$ then

$$\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}\geq\frac{z}{z+1}.$$

Demonstrație

$$\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}\overset{CBS}{\geq}\frac{1}{(1+xy)\left(1+\frac{x}{y}\right)}+\frac{1}{(1+xy)\left(1+\frac{y}{x}\right)}=\frac{y}{(1+xy)(x+y)}+\frac{x}{(1+xy)(x+y)}=$$

$$=\frac{1}{1+xy}=\frac{z}{z+1}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$a^2+b^2+c^2=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{1}{(z+1)^2}\overset{Lema}{\geq}\frac{z}{z+1}+\frac{1}{(z+1)^2}=\frac{z^2+z+1}{(z+1)^2}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{4},$$

unde(1) $\Leftrightarrow \frac{z^2+z+1}{(z+1)^2}\geq\frac{3}{4} \Leftrightarrow (z-1)^2\geq 0 \Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq\frac{3}{4}$, (2).

Inegalitatea de demonstrat $\sum\frac{a^2+4b^4}{b}\geq 3 \Leftrightarrow \sum\frac{a^2}{b}+4\sum a^3\geq 3$.

Vom arăta că $\sum \frac{a^2}{b} \geq \frac{3}{2}$ și $\sum a^3 \geq \frac{3}{8}$.

Să demonstrăm că: $\sum \frac{a^2}{b} \geq \frac{3}{2}$.

$$\sum \frac{a^2}{b} = \sum \frac{a^4}{a^2 b} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum a^2 b} \overset{(3)}{\geq} \frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sqrt{\sum a^2 \cdot \frac{1}{3}\sum a^2}} = \frac{\left(\sum a^2\right)}{\sqrt{\frac{1}{3}\sum a^2}} = \sqrt{3\sum a^2} \overset{(2)}{\geq} \sqrt{3 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{3}{2}, \text{ vezi(3):}$$

$$\sum a^2 b = \sum a \cdot ab \overset{CBS}{\leq} \sqrt{\sum a^2 \sum a^2 b^2} \overset{SOS}{\leq} \sqrt{\sum a^2 \cdot \frac{1}{3}\left(\sum a^2\right)^2} = \sum a^2 \sqrt{\frac{1}{3}\sum a^2}.$$

Să demonstrăm că: $\sum a^3 \geq \frac{3}{8}$.

$$\sum a^3 = \sum \frac{a^4}{a} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum a} \overset{CBS}{\geq} \frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sqrt{3\sum a^2}} = \sqrt{\frac{\left(\sum a^2\right)^3}{3}} \overset{(2)}{\geq} \sqrt{\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3}{3}} = \frac{3}{8}.$$

Din $\sum \frac{a^2}{b} \geq \frac{3}{2}$ și $\sum a^3 \geq \frac{3}{8} \Rightarrow \sum \frac{a^2}{b} + 4\sum a^3 \geq \frac{3}{2} + 4 \cdot \frac{3}{8} = 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Aplicația17.

If $a,b,c \in (0,1)$, $abc = (1-a)(1-b)(1-c)$ then

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{3}{4}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$abc = (1-a)(1-b)(1-c) \Leftrightarrow \frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{abc} = 1 \Leftrightarrow \frac{1-a}{a} \cdot \frac{1-b}{b} \cdot \frac{1-c}{c} = 1 \Leftrightarrow xyz = 1,$$

unde $x = \frac{1-a}{a}, y = \frac{1-b}{b}, z = \frac{1-c}{c} \Leftrightarrow a = \frac{1}{1+x}, b = \frac{1}{1+y}, c = \frac{1}{1+z}$.

Principiul lui Dirichlet:

Din trei numere pozitive x, y, z există cel puțin două numere care sunt situate de aceeași parte a lui 1. Fie x, y numerele, deci $(1-x)(1-y) \geq 0$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosim Principiul lui Dirichlet

Din trei numere pozitive x,y,z există cel puțin două numere care sunt situate de aceeași parte a lui 1. Fie x,y numerele, deci $(1-x)(1-y)\ge 0 \Leftrightarrow 1-x-y+xy\ge 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x+y\le xy+1 \Leftrightarrow x+y\le xy+1=\frac{z+1}{z}.$$

Lema.

If $x,y,z>0$, $xyz=1$ then

$$\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}\ge\frac{z}{z+1}.$$

Demonstrație

$$\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}\overset{CBS}{\ge}\frac{1}{(1+xy)\left(1+\frac{x}{y}\right)}+\frac{1}{(1+xy)\left(1+\frac{y}{x}\right)}=\frac{y}{(1+xy)(x+y)}+\frac{x}{(1+xy)(x+y)}=$$

$$=\frac{1}{1+xy}=\frac{z}{z+1}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$a^2+b^2+c^2=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{1}{(z+1)^2}\overset{Lema}{\ge}\frac{z}{z+1}+\frac{1}{(z+1)^2}=\frac{z^2+z+1}{(z+1)^2}\overset{(1)}{\ge}\frac{3}{4},$$

unde(1) $\Leftrightarrow \frac{z^2+z+1}{(z+1)^2}\ge\frac{3}{4}\Leftrightarrow (z-1)^2\ge 0\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge\frac{3}{4}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Aplicația18.

If $a,b,c\in(0,1)$, $abc=(1-a)(1-b)(1-c)$ then

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge\frac{3}{2}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$abc=(1-a)(1-b)(1-c)\Leftrightarrow\frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{abc}=1\Leftrightarrow\frac{1-a}{a}\cdot\frac{1-b}{b}\cdot\frac{1-c}{c}=1\Leftrightarrow xyz=1,$$

unde $x=\dfrac{1-a}{a}, y=\dfrac{1-b}{b}, z=\dfrac{1-c}{c} \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{1+x}, b=\dfrac{1}{1+y}, c=\dfrac{1}{1+z}$.

Principiul lui Dirichlet:

Din trei numere pozitive x, y, z există cel puțin două numere care sunt situate de aceeași parte a lui 1. Fie x, y numerele, deci $(1-x)(1-y)\geq 0$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosim Principiul lui Dirichlet

Din trei numere pozitive x, y, z există cel puțin două numere care sunt situate de aceeași parte a lui 1. Fie x, y numerele, deci $(1-x)(1-y)\geq 0 \Leftrightarrow 1-x-y+xy\geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x+y\leq xy+1 \Leftrightarrow x+y\leq xy+1=\frac{z+1}{z}.$$

Lema.

If $x, y, z>0$, $xyz=1$ then

$$\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}\geq\frac{z}{z+1}.$$

Demonstrație

$$\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}\overset{CBS}{\geq}\frac{1}{(1+xy)\left(1+\frac{x}{y}\right)}+\frac{1}{(1+xy)\left(1+\frac{y}{x}\right)}=\frac{y}{(1+xy)(x+y)}+\frac{x}{(1+xy)(x+y)}=$$

$$=\frac{1}{1+xy}=\frac{z}{z+1}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$a^2+b^2+c^2=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{1}{(z+1)^2}\overset{Lema}{\geq}\frac{z}{z+1}+\frac{1}{(z+1)^2}=\frac{z^2+z+1}{(z+1)^2}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{4},$$

unde(1) $\Leftrightarrow \dfrac{z^2+z+1}{(z+1)^2}\geq\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow (z-1)^2\geq 0 \Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq\dfrac{3}{4}$ (2).

Să demonstrăm că: $\sum\dfrac{a^2}{b}\geq\dfrac{3}{2}$.

$$\sum\frac{a^2}{b}=\sum\frac{a^4}{a^2b}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum a^2b}\overset{(3)}{\geq}\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sqrt{\sum a^2\cdot\frac{1}{3}\sum a^2}}=\frac{\left(\sum a^2\right)}{\sqrt{\frac{1}{3}\sum a^2}}=\sqrt{3\sum a^2}\overset{(2)}{\geq}\sqrt{3\cdot\frac{3}{4}}=\frac{3}{2},\text{ vezi(3):}$$

$$\sum a^2b=\sum a\cdot ab\overset{CBS}{\leq}\sqrt{\sum a^2\sum a^2b^2}\overset{SOS}{\leq}\sqrt{\sum a^2\cdot\frac{1}{3}\left(\sum a^2\right)^2}=\sum a^2\sqrt{\frac{1}{3}\sum a^2}.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Aplicația19.

If $a,b,c\in(0,1)$, $abc=(1-a)(1-b)(1-c)$ then

$$a^3+b^3+c^3\geq\frac{3}{8}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$abc=(1-a)(1-b)(1-c)\Leftrightarrow\frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{abc}=1\Leftrightarrow\frac{1-a}{a}\cdot\frac{1-b}{b}\cdot\frac{1-c}{c}=1\Leftrightarrow xyz=1,$$

unde $x=\frac{1-a}{a},y=\frac{1-b}{b},z=\frac{1-c}{c}\Leftrightarrow a=\frac{1}{1+x},b=\frac{1}{1+y},c=\frac{1}{1+z}$.

Principiul lui Dirichlet:

Din trei numere pozitive x,y,z există cel puțin două numere care sunt situate de aceeaşi parte a lui 1. Fie x,y numerele, deci $(1-x)(1-y)\geq 0$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosim Principiul lui Dirichlet

Din trei numere pozitive x,y,z există cel puțin două numere care sunt situate de aceeaşi parte a lui 1. Fie x,y numerele, deci $(1-x)(1-y)\geq 0\Leftrightarrow 1-x-y+xy\geq 0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x+y\leq xy+1\Leftrightarrow x+y\leq xy+1=\frac{z+1}{z}.$$

Lema.

If $x,y,z>0$, $xyz=1$ then

$$\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}\geq\frac{z}{z+1}.$$

Demonstrație

$$\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}\overset{CBS}{\geq}\frac{1}{(1+xy)\left(1+\frac{x}{y}\right)}+\frac{1}{(1+xy)\left(1+\frac{y}{x}\right)}=\frac{y}{(1+xy)(x+y)}+\frac{x}{(1+xy)(x+y)}=$$

$$=\frac{1}{1+xy}=\frac{z}{z+1}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$a^2+b^2+c^2=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{1}{(z+1)^2}\overset{Lema}{\geq}\frac{z}{z+1}+\frac{1}{(z+1)^2}=\frac{z^2+z+1}{(z+1)^2}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{4},$$

unde(1) $\Leftrightarrow \frac{z^2+z+1}{(z+1)^2}\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow (z-1)^2\geq 0\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq\frac{3}{4}$ (2).

Să demonstrăm că: $\sum a^3\geq\frac{3}{8}$.

$$\sum a^3=\sum\frac{a^4}{a}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum a}\overset{CBS}{\geq}\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sqrt{3\sum a^2}}=\sqrt{\frac{\left(\sum a^2\right)^3}{3}}\overset{(2)}{\geq}\sqrt{\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3}{3}}=\frac{3}{8}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{2}$.

__**Aplicația20.**__

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{9}{2(a+b+c)}\geq\frac{9}{2}.$$

Mongolia 2018

__**Soluție.**__

Folosind principiul lui Dirichlet , două dintre numerele $a-1,b-1,c-1$ au același semn.

Fie $a-1,b-1$ cele două numere.

Avem $(a-1)(b-1)\geq 0\Leftrightarrow a+b\leq 1+ab$.

Cu inegalitatea mediilor obținem:

$M_s=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{9}{2(a+b+c)}\geq\frac{2}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{c}+\frac{9}{2(1+ab+c)}\overset{(1)}{\geq}\frac{9}{2}=M_d$, unde (1) rezultă din:

Notînd $\sqrt{ab}=t$ inegalitatea (1) se scrie:

$$\frac{2}{t}+t^2+\frac{9}{2\left(1+t^2+\frac{1}{t^2}\right)}\geq\frac{9}{2}\Leftrightarrow 2t^7-7t^5+4t^4+2t^3+4t^2-9t+4\geq 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (t-1)^2\left(2t^5+4t^4-t^3-2t^2-t+4\right)\geq 0$, care rezultă din $\left(2t^5+4t^4-t^3-2t^2-t+4\right)>0$,

adevărată din $\left(2t^5+4t^4-t^3-2t^2-t+4\right)=2t^5+\frac{4t}{3}\left(t^3+2\right)+\frac{1}{3}(t-1)^2\left(8t^2+13t+12\right)>0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația21.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{n}{a+b+c}\geq 3+\frac{n}{3},\ n\leq 6\ .$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind principiul lui Dirichlet , două dintre numerele $a-1,b-1,c-1$ au același semn.

Fie $a-1,b-1$ cele două numere.

Avem $(a-1)(b-1)\geq 0\Leftrightarrow a+b\leq 1+ab$.

Cu inegalitatea mediilor obținem:

$M_s=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{n}{a+b+c}\geq\frac{2}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{c}+\frac{n}{1+ab+c}\overset{(1)}{\geq}3+\frac{n}{3}=M_d$, unde (1) rezultă din:

Notînd $\sqrt{ab}=t$ inegalitatea (1) se scrie:

$$\frac{2}{t}+t^2+\frac{n}{\left(1+t^2+\frac{1}{t^2}\right)}\geq 3+\frac{n}{3}\Leftrightarrow 3t^7-(n+6)t^5+6t^4+(2n-6)t^3+6t^2-(n+9)t+6\geq 0$$

$\Leftrightarrow (t-1)^2\left[3t^5+6t^4+(3-n)t^3+(6-2n)t^2+(3-n)t+6\right]\geq 0$,

adevărată din $\left[3t^5+6t^4+(3-n)t^3+(6-2n)t^2+(3-n)t+6\right]>0$ și condiția $n\leq 6$.

Într-adevăr:

$$\left[3t^5+6t^4+(3-n)t^3+(6-2n)t^2+(3-n)t+6\right]\geq\left[3t^5+6t^4+(3-6)t^3+(6-12)t^2+(3-6)t+6\right]=$$
$$=3\left(t^5+2t^4-t^3-2t^2-t+2\right)=3\left[t^5+(t-1)^2\left(2t^2+3t+2\right)\right]>0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Notă.

Pentru $n=\frac{9}{2}$ se obține Mongolia 2018.

Aplicația22.

Pentru $n=6$ se obține:

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{6}{a+b+c}\geq 5.$$

Soluție.

Punem $n=6$ în inegalitatea **4)** .

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația23.

Fie $a,b,c\geq 0$ astfel încât $a+b+c=3$. Arătați că

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\geq 27.$$

Soluție.

Conform principiului lui Dirichlet : două dintre numerele a^2-1,b^2-1,c^2-1 au același semn.

Wlog $\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)\geq 0 \Leftrightarrow a^2b^2+1\geq a^2+b^2$.

Obținem $\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)=\left(a^2b^2+2a^2+2b^2+4\right)\left(c^2+2\right)=$

$$\left[\left(a^2b^2+1\right)+2\left(a^2+b^2\right)+3\right]\left(c^2+2\right)\geq\left[\left(a^2+b^2\right)+2\left(a^2+b^2\right)+3\right]\left(c^2+2\right)=$$

$$=\left[3\left(a^2+b^2\right)+3\right]\left(c^2+2\right)=3\left(a^2+b^2+1\right)\left(c^2+2\right)=3\left(a^2+b^2+1\right)\left(1+1+c^2\right)\overset{CBS}{\geq}$$

$$\overset{CBS}{\geq}3\left(a+b+c\right)^2=27.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația24.

Fie $a,b,c\geq 0$ astfel încât $a+b+c=3$ și $k\geq 2$. Arătați că

$$\left(a^2+k\right)\left(b^2+k\right)\left(c^2+k\right)\geq\left(k+1\right)^3.$$

Soluție.(Octavian Stroe).

Considerăm trinomul de gradul al doilea $T\left(x\right)=$

$\left(a^2+x\right)\left(b^2+x\right)\left(c^2+x\right)-\left(x+1\right)^3=\left(a^2+b^2+c^2-3\right)x^2+\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-3\right)x+a^2b^2c^2-1.$

Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $a^2+b^2+c^2-3=0$, se arată că $a=b=c=1$, care rezultă din

$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=0$ și de aici inegalitatea din enunț este adevărată, cu egalitate.

Cazul 2). Dacă $a^2+b^2+c^2-3\neq 0$, se arată că $a^2+b^2+c^2-3>0$, care rezultă din

$a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}(a+b+c)^2=9$.

Din inegalitatea mediilor obținem $3=a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$, de unde $abc\leq 1$, cu egalitate pentru $a=b=c=1$ și cum $a^2+b^2+c^2-3>0$, rezultă că inegalitatea este strictă, deci $abc<1$.

Din $abc<1$ obținem că $\Delta>0$; într-adevăr: $\Delta>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Delta=\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-3\right)^2-4\left(a^2+b^2+c^2-3\right)\left(a^2b^2c^2-1\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-3\right)^2>4\left(a^2+b^2+c^2-3\right)\left(a^2b^2c^2-1\right)$, evident deoarece

$\left(a^2+b^2+c^2-3\right)>0$ și $\left(a^2b^2c^2-1\right)<0$.

Din $\Delta>0$ rezultă că ecuația $T(x)=0$ are două rădăcini reale distincte $x_1<0<x_2$, deoarece

produsul rădăcinilor $x_1x_2=\dfrac{a^2b^2c^2-1}{a^2+b^2+c^2-3}<0$, evident din $\left(a^2+b^2+c^2-3\right)>0$ și $\left(a^2b^2c^2-1\right)<0$.

În consecință $T(k)\geq 0,\ \forall k\geq x_2$.

Arătăm că $T(2)\geq 0$.

Avem $T(2)\geq 0\Leftrightarrow\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\geq 27$.

Conform principiului lui Dirichlet : două dintre numerele a^2-1, b^2-1, c^2-1 au același semn.

Wlog $\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)\geq 0\Leftrightarrow a^2b^2+1\geq a^2+b^2$.

Obținem $\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)=\left(a^2b^2+2a^2+2b^2+4\right)\left(c^2+2\right)=$

$\left[\left(a^2b^2+1\right)+2\left(a^2+b^2\right)+3\right]\left(c^2+2\right)\geq\left[\left(a^2+b^2\right)+2\left(a^2+b^2\right)+3\right]\left(c^2+2\right)=$

$=\left[3\left(a^2+b^2\right)+3\right]\left(c^2+2\right)=3\left(a^2+b^2+1\right)\left(c^2+2\right)=3\left(a^2+b^2+1\right)\left(1+1+c^2\right)\overset{CBS}{\geq}$

$\overset{CBS}{\geq}3(a+b+c)^2=27$.

Evident $T(k) \geq T(2) \geq 0, \forall k \geq 2$.

Aplicația25.

Inegalitatea poate fi întărită.

Fie $a,b,c \geq 0$ astfel încât $a+b+c=3$ și $k \geq \frac{3}{2}$. Arătați că

$$\left(a^2+k\right)\left(b^2+k\right)\left(c^2+k\right) \geq (k+1)^3.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Deoarece în triunghiul ABC este adevărată identitatea $\sum \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1 \Leftrightarrow \sum 3\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=3$

efectuăm substituția: $a=3\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}, b=3\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}, c=3\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}$.

Inegalitatea se scrie:

$$\left(9\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}+k\right)\left(9\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+k\right)\left(9\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+k\right) \geq (k+1)^3 \Leftrightarrow$$

Avem $E=\left(9\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}+k\right)\left(9\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+k\right)\left(9\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+k\right)=$

$$=729\prod \operatorname{tg}^4\frac{A}{2}+81k\prod \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\sum \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+9k^2\sum \operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}+k^3=$$

$$=729\cdot\left(\frac{r}{p}\right)^4+81k\left(\frac{r}{p}\right)^2\cdot\frac{(4R+r)^2-2p^2}{p^2}+9k^2\cdot\frac{p^2-2r^2-8Rr}{p^2}+k^3=$$

$$=\frac{p^4\left(k^3+9k^2\right)-p^2\left(72k^2Rr+162kr^2+18k^2r^2\right)+81kr^2(4R+r)^2+729r^4}{p^4}.$$

Ultima inegalitate se scrie:

$$\frac{p^4\left(k^3+9k^2\right)-p^2\left(72k^2Rr+162kr^2+18k^2r^2\right)+81kr^2(4R+r)^2+729r^4}{p^4} \geq (k+1)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad p^4\left(6k^2-3k-1\right)-p^2r\left(72k^2Rr+162kr^2+18k^2r^2\right)+81kr^2(4R+r)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2\left[p^2\left(6k^2-3k-1\right)-r\left(72k^2Rr+162kr^2+18k^2r^2\right)\right]+81kr^2(4R+r)^2+729r^4 \geq 0.$$

Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $\left[p^2\left(6k^2-3k-1\right)-r\left(72k^2Rr+162kr^2+18k^2r^2\right)\right]\geq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2). Dacă $\left[p^2\left(6k^2-3k-1\right)-r\left(72k^2Rr+162kr^2+18k^2r^2\right)\right]<0$, inegalitatea se rescrie:

$81kr^2\left(4R+r\right)^2+729r^4\geq p^2\left[r\left(72k^2Rr+162kr^2+18k^2r^2\right)-p^2\left(6k^2-3k-1\right)\right]$, care rezultă din inegalitatea luiGerretsen $16Rr-5r^2\leq p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$.

Rămâne să arătăm că: $81kr^2\left(4R+r\right)^2+729r^4\geq$

$$\geq\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left[r\left(72k^2Rr+162kr^2+18k^2r^2\right)-\left(16Rr-5r^2\right)\left(6k^2-3k-1\right)\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R^3\left(24k^2-48k-16\right)-R^2r\left(24k^2-129k+11\right)-Rr^2\left(30k^2+21k+7\right)-r^3\left(36k^2+90k-186\right)\geq 0$$

$\Leftrightarrow\left(R-2r\right)\left[R^2\left(24k^2-48k-16\right)+Rr\left(24k^2+33k-43\right)+r^2\left(18k^2+45k-93\right)\right]\geq 0$, evident din inegalitatea lui Euler și condiția din enunț $k\geq\frac{3}{2}$, care asigură

$\left[R^2\left(24k^2-48k-16\right)+Rr\left(24k^2+33k-43\right)+r^2\left(18k^2+45k-93\right)\right]\geq 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

Aplicația26.

If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2=3$ then find min of

$$P=2\left(a^4+b^4+c^4\right)+\frac{9a^2b^2c^2}{ab+bc+ca}.$$

Pu Tin Dao, Vietnam

Soluție.

Lema

If $a,b,c>0$ and $a^2+b^2+c^2=3$ then

$$\frac{9a^2b^2c^2}{ab+bc+ca}\geq 3a^2b^2c^2.$$

Din $ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2=3\Rightarrow\frac{9a^2b^2c^2}{a^2+b^2+c^2}\geq 3a^2b^2c^2$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Principiul lui Dirichlet:

Din trei numere pozitive a^2, b^2, c^2 există cel puțin două numere care sunt situate de aceeași parte a lui 1. Fie a^2, b^2 numerele, deci $(a^2-1)(b^2-1) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2b^2 \geq a^2+b^2-1 = 3-c^2-1 = 2-c^2 \Rightarrow a^2b^2 \geq 2-c^2$, (1).

Folosind **Lema** obținem:

$$P = 2\left(a^4+b^4+c^4\right)+\frac{9a^2b^2c^2}{ab+bc+ca} \overset{Lema}{\geq} 2\left(a^4+b^4\right)+2c^4+3a^2b^2c^2 \overset{CS}{\geq} \left(a^2+b^2\right)^2+2c^4+3a^2b^2c^2 \overset{(1)}{\geq}$$

$$\overset{(1)}{\geq} \left(3-c^2\right)^2+2c^4+3\left(2-c^2\right)c^2 = 9.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Deducem că $\min P = 9$ pentru $a=b=c=1$.

Remarca.

Problema se poate dezvolta.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then find min of

$$P = 2\left(a^2+b^2+c^2\right)+3abc.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Principiul lui Dirichlet:

Din trei numere pozitive a,b,c există cel puțin două numere care sunt situate de aceeași parte a lui 1. Fie a,b numerele, deci $(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ab \geq a+b-1 = 3-c-1 = 2-c \Rightarrow ab \geq 2-c$, (1).

Folosind **Lema** obținem:

$$P = 2\left(a^2+b^2+c^2\right)+3abc = 2\left(a^2+b^2\right)+2c^2+3abc \overset{CS}{\geq} (a+b)^2+2c^2+3abc \overset{(1)}{\geq}$$

$$\overset{(1)}{\geq} (3-c)^2+2c^2+3(2-c)c = 9.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Deducem că $\min P = 9$ pentru $a=b=c=1$.

If $a,b,c>0$, $a^3+b^3+c^3=3$ then find min of

$$P = 2\left(a^6+b^6+c^6\right)+3a^3b^3c^3.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Principiul lui Dirichlet:

Din trei numere pozitive a^3, b^3, c^3 există cel puțin două numere care sunt situate de aceeași parte a lui 1.

Fie a^3, b^3 numerele, deci $(a^3-1)(b^3-1) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^3b^3 \geq a^3+b^3-1 = 3-c^3-1 = 2-c^3 \Rightarrow a^3b^3 \geq 2-c^3$, (1).

Folosind **Lema** obținem:

$$P = 3(a^6+b^6+c^6)+3a^3b^3c^3 = 2(a^6+b^6)+2c^6+3a^3b^3c^3 \overset{CS}{\geq} (a^3+b^3)^2+2c^6+3a^3b^3c^3 \overset{(1)}{\geq}$$

$$\overset{(1)}{\geq} (3-c^3)^2+2c^6+3(2-c^3)c^3 = 9.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Deducem că $\min P = 9$ pentru $a=b=c=1$.

Bibliografie:

1. C.Năstăsescu, C.Niță, M.Brandiburu, D. Joița , Exerciții de algebră, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1992.
2. Bui Anh Khoa, THCS 6/2022, Vietnam.
3. Vasile Cârtoaje , Mathematical Inequalities 1/2022.
4. Biswajt Ghosh, Higher Secondary Mathematics 10/2021.
5. Ha Thanh Dat, Vietnam, THCS 1/2023.
6. Pu Tin Dao, Vietnam, THCS 3/2023.
7. Daniel Sitaru, RMM Number 4, New Edition 2022.
8. Olimpiada Nationala de Matematică Mongolia 2018.
9. Marin Chirciu, Inegalități algebrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2014.
10. Marin Chirciu, Inegalități algebrice 2, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2021.

Art 4400

27 Februarie 2023

3. Inegalitatea lui Holder

Marin Chirciu [2]

Articolul prezintă inegalitatea lui Holder și aplicatii ale acesteia, selectate din diverse publicații de specialitate.

Inegalitatea lui Hőlder:

$\sum a^2\sum b^2 \geq \left(\sum ab\right)^2$, $a=(a_1,a_2,...,a_n)$, $b=(b_1,b_2,...,b_n)$, $a_i,b_i \in \mathbf{R}, i=\overline{1,n}$, (Bergstrom).

$\sum a^3\sum b^3\sum c^3 \geq \left(\sum abc\right)^3$, $a=(a_1,a_2,...,a_n)$, $b=(b_1,b_2,...,b_n)$, $c=(c_1,c_2,...,c_n)$, $a_i,b_i,c_i \geq 0, i=\overline{1,n}$.

$\sum \frac{x^{n+1}}{a_1\cdot a_2\cdot ...\cdot a_n} \geq \frac{\left(\sum x\right)^{n+1}}{\sum a_1\sum a_2...\sum a_n}$, unde $x, a_1, a_2, ...a_n > 0$.

Aplicația1.

1) Prove that in any triangle ABC the following relationship holds

$$3\left(r_ar_b^3+r_br_c^3+r_cr_a^3\right) \geq r(4R+r)^3.$$

Proposed by Nguyen Viet Hung, Hanoi, Vietnam,16 RMM-Spring 2020,JP.227

Soluţie:

Inegalitatea lui Hölder $\frac{x^3}{a}+\frac{y^3}{b}+\frac{z^3}{c} \geq \frac{(x+y+z)^3}{3(a+b+c)}$, $\forall x,y,z,a,b,c>0$, cu egalitate dacă și numai dacă $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ și identitățile: $r_a+r_b+r_c=4R+r$, $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$.

$$r_ar_b^3+r_br_c^3+r_cr_a^3=\frac{r_b^3}{\frac{1}{r_a}}+\frac{r_c^3}{\frac{1}{r_b}}+\frac{r_a^3}{\frac{1}{r_c}} \geq \frac{(r_a+r_b+r_c)^3}{3\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)}=\frac{(4R+r)^3}{3\cdot\frac{1}{r}}=\frac{1}{3}\cdot r(4R+r)^3,$$

de unde $3\left(r_ar_b^3+r_br_c^3+r_cr_a^3\right) \geq r(4R+r)^3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2) In ΔABC

$$r_ar_b^2+r_br_c^2+r_cr_a^2 \geq r(4R+r)^2.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluţie:

---

[2] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu"Pitești*

Inegalitatea lui Bergström $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\geq\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$, $\forall x,y,z,a,b,c>0$, cu egalitate dacă și numai dacă $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ și identitățile: $r_a+r_b+r_c=4R+r$, $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$.

$$r_ar_b^2+r_br_c^2+r_cr_a^2=\frac{r_b^2}{\frac{1}{r_a}}+\frac{r_c^2}{\frac{1}{r_b}}+\frac{r_a^2}{\frac{1}{r_c}}\geq\frac{(r_a+r_b+r_c)^2}{\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}}=\frac{(4R+r)^2}{\frac{1}{r}}=r(4R+r)^3,$$

de unde $r_ar_b^2+r_br_c^2+r_cr_a^2\geq r(4R+r)^2$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3) In ΔABC

$$3^{n-2}\left(r_ar_b^n+r_br_c^n+r_cr_a^n\right)\geq r(4R+r)^n,\ \text{unde } n\geq 2, n\in\boldsymbol{N}.$$

Marin Chirciu, Pitești

<u>Soluţie:</u>

Inegalitatea lui Hölder $\frac{x^n}{a}+\frac{y^n}{b}+\frac{z^n}{c}\geq\frac{(x+y+z)^n}{3^{n-2}(a+b+c)}$, $\forall x,y,z,a,b,c>0$ și $n\geq 2, n\in\boldsymbol{N}$,

cu egalitate dacă și numai dacă $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ și identitățile: $r_a+r_b+r_c=4R+r$, $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$.

$$r_ar_b^n+r_br_c^n+r_cr_a^n=\frac{r_b^n}{\frac{1}{r_a}}+\frac{r_c^n}{\frac{1}{r_b}}+\frac{r_a^n}{\frac{1}{r_c}}\geq\frac{(r_a+r_b+r_c)^n}{3^{n-2}\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)}=\frac{(4R+r)^n}{3^{n-2}\cdot\frac{1}{r}}=\frac{1}{3^{n-2}}\cdot r(4R+r)^n,$$

de unde $3^{n-2}\left(r_ar_b^n+r_br_c^n+r_cr_a^n\right)\geq r(4R+r)^n$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

4) In ΔABC

$$3\left(h_ar_b^3+h_br_c^3+h_cr_a^3\right)\geq r(4R+r)^3.$$

Marin Chirciu, Pitești

<u>Soluţie:</u>

Folosim:

Inegalitatea lui Hölder $\frac{x^3}{a}+\frac{y^3}{b}+\frac{z^3}{c}\geq\frac{(x+y+z)^3}{3(a+b+c)}$, $\forall x,y,z,a,b,c>0$, cu egalitate dacă și numai dacă

și $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ și identitățile: $r_a+r_b+r_c=4R+r$, $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$.

$$r_ar_b^3+r_br_c^3+r_cr_a^3=\frac{r_b^3}{\frac{1}{h_a}}+\frac{r_c^3}{\frac{1}{h_b}}+\frac{r_a^3}{\frac{1}{h_c}}\geq\frac{(r_a+r_b+r_c)^3}{3\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)}=\frac{(4R+r)^3}{3\cdot\frac{1}{r}}=\frac{1}{3}\cdot r(4R+r)^3,$$

de unde $3\left(h_ar_b^3+h_br_c^3+h_cr_a^3\right)\geq r(4R+r)^3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

5) In ΔABC

$$h_ar_b^2+h_br_c^2+h_cr_a^2\geq r(4R+r)^2.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

Inegalitatea lui Bergström $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\geq\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$, $\forall x,y,z,a,b,c>0$, cu egalitate dacă și numai dacă $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ și identitățile: $r_a+r_b+r_c=4R+r$, $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$.

$$h_ar_b^2+h_br_c^2+h_cr_a^2=\frac{r_b^2}{\frac{1}{h_a}}+\frac{r_c^2}{\frac{1}{h_b}}+\frac{r_a^2}{\frac{1}{h_c}}\geq\frac{(r_a+r_b+r_c)^2}{\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}}=\frac{(4R+r)^2}{\frac{1}{r}}=r(4R+r)^3,$$

de unde $h_ar_b^2+h_br_c^2+h_cr_a^2\geq r(4R+r)^2$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

6) In ΔABC

$$3^{n-2}\left(h_ar_b^n+h_br_c^n+h_cr_a^n\right)\geq r(4R+r)^n\text{, unde } n\geq 2, n\in\mathbf{N}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

Inegalitatea lui Hölder $\frac{x^n}{a}+\frac{y^n}{b}+\frac{z^n}{c}\geq\frac{(x+y+z)^n}{3^{n-2}(a+b+c)}$, $\forall x,y,z,a,b,c>0$ și $n\geq 2, n\in\mathbf{N}$,

cu egalitate dacă și numai dacă $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ și identitățile: $r_a+r_b+r_c=4R+r$, $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$.

și identitățile cunoscute în triunghi $r_a+r_b+r_c=4R+r$, $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$.

$$h_a r_b^n + h_b r_c^n + h_c r_a^n = \frac{r_b^n}{\frac{1}{h_a}} + \frac{r_c^n}{\frac{1}{h_b}} + \frac{r_a^n}{\frac{1}{h_c}} \ge \frac{\left(r_a + r_b + r_c\right)^n}{3^{n-2}\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)} = \frac{\left(4R+r\right)^n}{3^{n-2} \cdot \frac{1}{r}} = \frac{1}{3^{n-2}} \cdot r\left(4R+r\right)^n,$$

de unde $3^{n-2}\left(h_a r_b^n + h_b r_c^n + h_c r_a^n\right) \ge r\left(4R+r\right)^n$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

7) In ΔABC

$$3^{n-2} p\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} r_b^n + \operatorname{tg}\frac{B}{2} r_c^n + \operatorname{tg}\frac{C}{2} r_a^n\right) \ge r\left(4R+r\right)^n, \text{ unde } n \ge 2, n \in \boldsymbol{N}.$$

Marin Chirciu, Pitești

<u>Soluţie:</u>

Inegalitatea lui Hölder $\frac{x^n}{a} + \frac{y^n}{b} + \frac{z^n}{c} \ge \frac{\left(x+y+z\right)^n}{3^{n-2}\left(a+b+c\right)}$, $\forall x, y, z, a, b, c > 0$ și $n \ge 2, n \in \boldsymbol{N}$,

cu egalitate dacă și numai dacă $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

și identitățile cunoscute în triunghi $r_a + r_b + r_c = 4R + r$, $\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2} = \frac{p}{r}$.

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} r_b^n + \operatorname{tg}\frac{B}{2} r_c^n + \operatorname{tg}\frac{C}{2} r_a^n = \frac{r_b^n}{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}} + \frac{r_c^n}{\operatorname{ctg}\frac{B}{2}} + \frac{r_a^n}{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}} \ge \frac{\left(r_a + r_b + r_c\right)^n}{3^{n-2}\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)} = \frac{\left(4R+r\right)^n}{3^{n-2} \cdot \frac{p}{r}} =$$

$$= \frac{1}{3^{n-2} p} \cdot r\left(4R+r\right)^n,$$

de unde $3^{n-2} p\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} r_b^n + \operatorname{tg}\frac{B}{2} r_c^n + \operatorname{tg}\frac{C}{2} r_a^n\right) \ge r\left(4R+r\right)^n$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

8) In ΔABC

$$3^{n-2}\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2} r_b^n + \operatorname{ctg}\frac{B}{2} r_c^n + \operatorname{ctg}\frac{C}{2} r_a^n\right) \ge p\left(4R+r\right)^{n-1}, \text{ unde } n \ge 2, n \in \boldsymbol{N}.$$

Marin Chirciu, Pitești

<u>Soluţie:</u>

Inegalitatea lui Hölder $\frac{x^n}{a} + \frac{y^n}{b} + \frac{z^n}{c} \ge \frac{\left(x+y+z\right)^n}{3^{n-2}\left(a+b+c\right)}$, $\forall x, y, z, a, b, c > 0$ și $n \ge 2, n \in \boldsymbol{N}$,

cu egalitate dacă și numai dacă $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

și identitățile cunoscute în triunghi $r_a+r_b+r_c=4R+r$, $\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{p}$.

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}r_b^n+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}r_c^n+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}r_a^n=\frac{r_b^n}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}+\frac{r_c^n}{\operatorname{tg}\frac{B}{2}}+\frac{r_a^n}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}\geq\frac{\left(r_a+r_b+r_c\right)^n}{3^{n-2}\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)}=\frac{\left(4R+r\right)^n}{3^{n-2}\cdot\frac{4R+r}{p}}=$$

$$=\frac{1}{3^{n-2}}\cdot p\left(4R+r\right)^{n-1},$$

de unde $3^{n-2}\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}r_b^n+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}r_c^n+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}r_a^n\right)\geq p\left(4R+r\right)^{n-1}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

9) In ΔABC

$$3^{n-2}\left(a^2r_b^n+b^2r_c^n+c^2r_a^n\right)\geq 4r^2\left(4R+r\right)^n, \text{ unde } n\geq 2, n\in\mathbf{N}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluţie:

Inegalitatea lui Hölder $\frac{x^n}{a}+\frac{y^n}{b}+\frac{z^n}{c}\geq\frac{\left(x+y+z\right)^n}{3^{n-2}\left(a+b+c\right)}$, $\forall x,y,z,a,b,c>0$ și $n\geq 2, n\in\mathbf{N}$,

cu egalitate dacă și numai dacă $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ și: $r_a+r_b+r_c=4R+r$, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\leq\frac{1}{4r^2}$.

$$a^2r_b^n+b^2r_c^n+c^2r_a^n=\frac{r_b^n}{\frac{1}{a^2}}+\frac{r_c^n}{\frac{1}{b^2}}+\frac{r_a^n}{\frac{1}{c^2}}\geq\frac{\left(r_a+r_b+r_c\right)^n}{3^{n-2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}\geq\frac{\left(4R+r\right)^n}{3^{n-2}\cdot\frac{1}{4r^2}}=\frac{1}{3^{n-2}}\cdot 4r^2\left(4R+r\right)^n,$$

de unde $3^{n-2}\left(a^2r_b^n+b^2r_c^n+c^2r_a^n\right)\geq 4r^2\left(4R+r\right)^n$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

10) In ΔABC

$$3^{n-3}p\left(ar_b^n+br_c^n+cr_a^n\right)\geq Rr\left(4R+r\right)^n, \text{ unde } n\geq 2, n\in\mathbf{N}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluţie:

Inegalitatea lui Hölder $\frac{x^n}{a}+\frac{y^n}{b}+\frac{z^n}{c}\geq\frac{\left(x+y+z\right)^n}{3^{n-2}\left(a+b+c\right)}$, $\forall x,y,z,a,b,c>0$ și $n\geq 2, n\in\mathbf{N}$,

cu egalitate dacă și numai dacă $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ și $r_a+r_b+r_c=4R+r$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{p}{3Rr}$.

$$ar_b^n+br_c^n+cr_a^n=\frac{r_b^n}{\frac{1}{a}}+\frac{r_c^n}{\frac{1}{b}}+\frac{r_a^n}{\frac{1}{c}}\geq\frac{\left(r_a+r_b+r_c\right)^n}{3^{n-2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}\geq\frac{\left(4R+r\right)^n}{3^{n-2}\cdot\frac{p}{3Rr}}=\frac{1}{3^{n-3}}\cdot Rr\left(4R+r\right)^n,$$

de unde $3^{n-3}p\left(ar_b^n+br_c^n+cr_a^n\right)\geq Rr\left(4R+r\right)^n$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Aplicația2.

1) Determinați maximul expresiei

$$E(a,b)=\frac{a+b}{\left(4a^2+3\right)\left(4b^2+3\right)},$$

pentru a,b numere reale.

Marius Stănean, Primul Baraj pentru OBMJ, Deva, 25 Aprilie 2019

Soluție:

Avem $a+b\leq\frac{(1+a+b)^2}{4}\Leftrightarrow(a+b-1)^2\geq0$.

Folosind CBS obținem $\left(4a^2+3\right)\left(4b^2+3\right)=\left(4a^2+1+2\right)\left(1+4b^2+2\right)\geq(2a+2b+2)^2$.

Rezultă $E(a,b)=\frac{a+b}{\left(4a^2+3\right)\left(4b^2+3\right)}\leq\frac{\frac{(1+a+b)^2}{4}}{(2a+2b+2)^2}=\frac{(1+a+b)^2}{(2a+2b+2)^2}=\frac{1}{16}$.

Deducem că maximul expresiei este $\frac{1}{16}$ și maximul este atins pentru $a=b=\frac{1}{2}$.

2) Determinați maximul expresiei

$$E(a,b)=\frac{(a+b+c)^3}{\left(4a^3+1\right)\left(4b^3+1\right)\left(4c^3+1\right)},$$

pentru a,b,c numere reale pozitive.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

Cu inegalitatea lui Hölder avem:

$\left(8a^3+2\right)\left(8b^3+2\right)\left(8c^3+2\right)=\left(8a^3+1+1\right)\left(1+8b^3+1\right)\left(1+1+8c^3\right)\geq(2a+2b+2c)^3$,

de unde $\left(4a^3+1\right)\left(4b^3+1\right)\left(4c^3+1\right)\geq(a+b+c)^3$, (1).

Din (1) obținem $E(a,b,c)=\frac{(a+b+c)^3}{(4a^3+1)(4b^3+1)(4c^3+1)}\le\frac{(a+b+c)^3}{(a+b+c)^3}=1$.

Deducem că valoarea maximă a expresiei $E(a,b,c)=\frac{(a+b+c)^3}{(4a^3+1)(4b^3+1)(4c^3+1)}$ este 1

care este atinsă pentru $a=b=c=\frac{1}{2}$.

3) Determinați valoarea maximă a expresiei

$$E(a,b,c,d)=\frac{(a+b+c+d)^4}{(16a^4+3)(16b^4+3)(16c^4+3)(16d^4+3)},$$

când a,b,c,d parcurg $\boldsymbol{R}$.

Marin Chirciu, Pitești

<u>Soluţie:</u>

Cu inegalitatea lui Hölder avem:

$(16a^4+3)(16b^4+3)(16c^4+3)(16d^4+3)=$

$=(16a^4+1+1+1)(1+16b^4+1+1)(1+1+16c^4+1)(1+1+1+16d^4)\ge(2a+2b+2c+2d)^4$, deci

$(16a^4+3)(16b^4+3)(16c^4+3)(16d^4+3)\ge16(a+b+c+d)^4$, (1).

Din (1) obținem: $E(a,b,c,d)=\frac{(a+b+c+d)^4}{(16a^4+3)(16b^4+3)(16c^4+3)(16d^4+3)}\le\frac{(a+b+c+d)^4}{16(a+b+c+d)^4}=\frac{1}{16}$.

Deducem că valoarea maximă a expresiei

$E(a,b,c,d)=\frac{(a+b+c+d)^4}{(16a^4+3)(16b^4+3)(16c^4+3)(16d^4+3)}$ are baloarea maximă 1, care este atinsă

pentru $a=b=c=d=\frac{1}{2}$.

4) Determinați valoarea maximă a expresiei

$$E(a,b)=\frac{(a+b)^3}{(a^3+1)(b^3+1)},$$

când a,b parcurg $(0,\infty)$.

Marin Chirciu, Pitești

<u>Soluţie:</u>

Cu inegalitatea lui Hölder avem:

$\left(a^3+1\right)\left(1+b^3\right)(1+1)\geq(a+b)^3$, de unde $\left(a^3+1\right)\left(b^3+1\right)\geq\frac{(a+b)^3}{2}$, (1).

Din (1) obținem $E(a,b)=\frac{(a+b)^3}{\left(a^3+1\right)\left(b^3+1\right)}\leq\frac{(a+b)^3}{\frac{(a+b)^3}{2}}=2$.

Deducem că valoarea maximă a expresiei $E(a,b)=\frac{(a+b)^3}{\left(a^3+1\right)\left(b^3+1\right)}$ este 2 , care este atinsă pentru $a=b=1$.

5) Determinați valoarea maximă a expresiei

$$E(a,b)=\frac{(a+b)^4}{\left(a^4+1\right)\left(b^4+1\right)},$$

când a,b parcurg $\boldsymbol{R}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluţie:

Cu inegalitatea lui Hölder avem:

$\left(a^4+1\right)\left(1+b^4\right)(1+1)(1+1)\geq(a+b)^4$, de unde $\left(a^4+1\right)\left(b^4+1\right)\geq\frac{(a+b)^4}{4}$, (1).

Din (1) obținem $E(a,b)=\frac{(a+b)^4}{\left(a^4+1\right)\left(b^4+1\right)}\leq\frac{(a+b)^4}{\frac{(a+b)^4}{4}}=4$.

Deducem că valoarea maximă a expresiei $E(a,b)=\frac{(a+b)^4}{\left(a^4+1\right)\left(b^4+1\right)}$ este 4 , care este atinsă pentru $a=b=1$.

Aplicația3.

1) Fie $a,b,c>0$, astfel încât $a+b+c=1$. Arătați că

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\geq\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Inequalities Marathon , Problem 16

Soluție.

Cu inegalitatea lui Hölder obținem:

$$\sum\frac{a}{\sqrt{b+c}}\sum\frac{a}{\sqrt{b+c}}\sum a(b+c)\ge\sum a,$$

de unde $M_s^2=\left(\sum\frac{a}{\sqrt{b+c}}\right)^2\ge\frac{\sum a}{\sum a(b+c)}=\frac{1}{2\sum bc}\overset{(1)}{\ge}\frac{3}{2}=M_d^2$,

unde (1) $\Leftrightarrow 1\ge 3\sum bc\Leftrightarrow (a+b+c)^2\ge 3\sum bc\Leftrightarrow\sum(b-c)^2\ge 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

2) Fie $a,b,c>0$, astfel încât $a+b+c=1$ și $n\in\mathbf{N}$. Arătați că

$$\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}}\right)^n+\left(\frac{b}{\sqrt{c+a}}\right)^n+\left(\frac{c}{\sqrt{a+b}}\right)^n\ge\frac{3}{\sqrt{6^n}}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lemă.

Fie $a,b,c>0$, astfel încât $a+b+c=1$. Arătați că

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\ge\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Demonstrație.

Cu inegalitatea lui Hölder obținem:

$$\sum\frac{a}{\sqrt{b+c}}\sum\frac{a}{\sqrt{b+c}}\sum a(b+c)\ge\sum a,$$

de unde $M_s^2=\left(\sum\frac{a}{\sqrt{b+c}}\right)^2\ge\frac{\sum a}{\sum a(b+c)}=\frac{1}{2\sum bc}\overset{(1)}{\ge}\frac{3}{2}=M_d^2$,

unde (1) $\Leftrightarrow 1\ge 3\sum bc\Leftrightarrow (a+b+c)^2\ge 3\sum bc\Leftrightarrow\sum(b-c)^2\ge 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Folosind inegalitatea lui Hölder obținem:

$$\sum\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}}\right)^n\ge\frac{\left(\sum\frac{a}{\sqrt{b+c}}\right)^n}{3^{n-1}}\overset{Lema}{\ge}\frac{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^n}{3^{n-1}}=\frac{3}{\sqrt{6^n}},\text{ pentru } n\ge 2.$$

Pentru $n=1$ se obține inegalitatea $\sum \frac{a}{\sqrt{b+c}} \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$, vezi **Lema**, iar pentru $n=0$ se obține egalitatea 3=3.

3) Fie $a,b,c>0$, astfel încât $a+b+c=1$ și $n \geq 0$. Arătați că

$$\frac{a}{\sqrt{b+nc}}+\frac{b}{\sqrt{c+na}}+\frac{c}{\sqrt{a+nb}} \geq \sqrt{\frac{3}{n+1}}.$$

Marin Chirciu, Pitești

<u>Soluție.</u>

Cu inegalitatea lui Hölder obținem:

$$\sum \frac{a}{\sqrt{b+nc}} \sum \frac{a}{\sqrt{b+nc}} \sum a(b+nc) \geq \sum a,$$

de unde $M_s^2 = \left(\sum \frac{a}{\sqrt{b+nc}}\right)^2 \geq \frac{\sum a}{\sum a(b+nc)} = \frac{1}{(n+1)\sum bc} \overset{(1)}{\geq} \frac{3}{n+1} = M_d^2$,

unde (1) $\Leftrightarrow 1 \geq 3\sum bc \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 3\sum bc \Leftrightarrow \sum (b-c)^2 \geq 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

4) Fie $a,b,c>0$, astfel încât $a+b+c=1$ și $n \geq 0$, $k \in \mathbf{N}$. Arătați că

$$\left(\frac{a}{\sqrt{b+nc}}\right)^k+\left(\frac{b}{\sqrt{c+na}}\right)^k+\left(\frac{c}{\sqrt{a+nb}}\right)^k \geq \frac{3}{\sqrt{(n+1)^k}}.$$

Marin Chirciu, Pitești

<u>Soluție.</u>

<u>Lemă.</u>

Fie $a,b,c>0$, astfel încât $a+b+c=1$ și $n \geq 0$. Arătați că

$$\frac{a}{\sqrt{b+nc}}+\frac{b}{\sqrt{c+na}}+\frac{c}{\sqrt{a+nb}} \geq \sqrt{\frac{3}{n+1}}.$$

<u>Demonstrație.</u>

Cu inegalitatea lui Hölder obținem:

$$\sum\frac{a}{\sqrt{b+nc}}\sum\frac{a}{\sqrt{b+nc}}\sum a(b+nc)\geq\sum a,$$

de unde $M_s^2=\left(\sum\frac{a}{\sqrt{b+nc}}\right)^2\geq\frac{\sum a}{\sum a(b+nc)}=\frac{1}{(n+1)\sum bc}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{n+1}=M_d^2$,

unde (1) $\Leftrightarrow 1\geq 3\sum bc\Leftrightarrow (a+b+c)^2\geq 3\sum bc\Leftrightarrow\sum(b-c)^2\geq 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Folosind inegalitatea lui Hölder obținem:

$$\sum\left(\frac{a}{\sqrt{b+nc}}\right)^k\geq\frac{\left(\sum\frac{a}{\sqrt{b+nc}}\right)^k}{3^{k-1}}\overset{Lema}{\geq}\frac{\left(\sqrt{\frac{3}{n+1}}\right)^k}{3^{k-1}}=\frac{3}{\sqrt{(3n+3)^k}}$$, pentru $n\geq 2$.

Pentru $k=1$ se obține inegalitatea $\sum\frac{a}{\sqrt{b+nc}}\geq\sqrt{\frac{3}{n+1}}$, vezi **Lema**, iar pentru $n=0$ se obține egalitatea 3=3.

Aplicația4.

1) Dacă $a,b,c>0$ atunci

$$\left(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^2\geq\left(\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}\right)^3.$$

RMM 8/2019, Dan Sitaru

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Hölder obținem:

$$M_s=\sum\frac{a^3}{b^2}\sum\frac{1}{b^2}\sum\frac{1}{b^2}\geq\left(\sum\frac{a}{b^2}\right)^3=M_d.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

2) Dacă $a,b,c>0$ atunci

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\right)^2\geq\left(\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}\right)^3.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Hölder obținem:

$$M_s = \sum a \sum \frac{a}{b^3} \sum \frac{a}{b^3} \ge \left(\sum \frac{a}{b^2} \right)^3 = M_d .$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c$.

Aplicația5.

1) Fie $a,b,c>0$ astfel încât $a+b+c=3$. Arătaţi că

$$\sum \frac{a^2}{b(a+5c)^3} \ge \frac{1}{24\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)} .$$

Hoang Le Nhat Tung, Hanoi, Vietnam

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Bergström obţinem:

$$\sum \frac{a^2}{b(a+5c)^3} = \sum \frac{\left(\frac{a}{a+5c}\right)^2}{b(a+5c)} \ge \frac{\left(\sum \frac{a}{a+5c}\right)^2}{\sum b(a+5c)} \overset{(1)}{\ge} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{6\sum bc} = \frac{1}{24\sum bc} \overset{(2)}{\ge} \frac{1}{24\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)},$$

unde(1) $\Leftrightarrow \sum \frac{a}{a+5c} \ge \frac{1}{2}$, care rezultă din inegalitatea lui Bergström:

$$\sum \frac{a}{a+5c} = \sum \frac{a^2}{a^2+5ac} \ge \frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum\left(a^2+5ac\right)} = \frac{\sum a^2 + 2\sum bc}{\sum a^2 + 5\sum bc} \overset{(3)}{\ge} \frac{1}{2},$$

unde(3) $\Leftrightarrow \frac{\sum a^2 + 2\sum bc}{\sum a^2 + 5\sum bc} \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sum a^2 \ge \sum bc$, evident cu egalitate pentru $a=b=c$.

Să demonstrăm inegalitatea (2).

$\frac{1}{\sum bc} \ge \frac{1}{\sum \sqrt{a}} \Leftrightarrow \sum \sqrt{a} \ge \sum bc \Leftrightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \ge ab+bc+ca$, resulting from:

$$\sqrt{a}+\sqrt{a}+a^2 \overset{AM-GM}{\ge} 3\sqrt[3]{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot a^2} = 3a \Rightarrow 2\sqrt{a}+a^2 \ge 3a \Rightarrow \sum\left(2\sqrt{a}+a^2\right) \ge \sum 3a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sum\sqrt{a} + \sum a^2 \ge 3\sum a \overset{3=a+b+c}{\Leftrightarrow} 2\sum\sqrt{a} + \sum a^2 \ge \left(\sum a\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sum\sqrt{a} + \sum a^2 \ge \sum a^2 + 2\sum bc \Leftrightarrow \sum\sqrt{a} \ge \sum bc \Leftrightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \ge ab+bc+ca .$$

Equality occurs if and only if $a=b=c=1$.

Avem $\sum bc \le \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{3^2}{3} = 3$.

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c=1$.

2) Fie $a,b,c>0$ astfel încât $a+b+c=3$. Arătaţi că

$$\sum \frac{a^2}{b(a+5c)^3} \geq \frac{1}{72}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Bergström obţinem:

$$M_s = \sum \frac{a^2}{b(a+5c)^3} = \sum \frac{\left(\frac{a}{a+5c}\right)^2}{b(a+5c)} \geq \frac{\left(\sum \frac{a}{a+5c}\right)^2}{\sum b(a+5c)} \overset{(1)}{\geq} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{6\sum bc} = \frac{1}{24\sum bc} \overset{(2)}{\geq} \frac{1}{72} = M_d,$$

unde(1) $\Leftrightarrow \sum \frac{a}{a+5c} \geq \frac{1}{2}$, care rezultă din inegalitatea lui Bergström:

$$\sum \frac{a}{a+5c} = \sum \frac{a^2}{a^2+5ac} \geq \frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum\left(a^2+5ac\right)} = \frac{\sum a^2 + 2\sum bc}{\sum a^2 + 5\sum bc} \overset{(3)}{\geq} \frac{1}{2},$$

unde(3) $\Leftrightarrow \frac{\sum a^2 + 2\sum bc}{\sum a^2 + 5\sum bc} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sum a^2 \geq \sum bc$, evident cu egalitate pentru $a=b=c$.

Inegalitatea (2) $\Leftrightarrow \sum bc \leq 3$, care rezultă din $\sum bc \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{3^2}{3} = 3$.

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c=1$.

3) Fie $a,b,c>0$ astfel încât $a+b+c=3$ şi $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$. Arătaţi că

$$\sum \frac{a^n}{b(a+5c)^{n+1}} \geq \frac{3}{6^{n+1}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Höder obţinem:

$$M_s = \sum \frac{a^n}{b(a+5c)^{n+1}} = \sum \frac{\left(\frac{a}{a+5c}\right)^n}{b(a+5c)} \geq \frac{\left(\sum \frac{a}{a+5c}\right)^n}{3^{n-2}\sum b(a+5c)} \overset{(1)}{\geq} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{3^{n-2}\cdot 6\sum bc} = \frac{3}{6^n \cdot 2\sum bc} \overset{(2)}{\geq} \frac{3}{6^{n+1}} = M_d,$$

unde(1) $\Leftrightarrow \sum \frac{a}{a+5c} \geq \frac{1}{2}$, care rezultă din inegalitatea lui Bergström:

$$\sum \frac{a}{a+5c} = \sum \frac{a^2}{a^2+5ac} \geq \frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum\left(a^2+5ac\right)} = \frac{\sum a^2 + 2\sum bc}{\sum a^2 + 5\sum bc} \overset{(3)}{\geq} \frac{1}{2},$$

unde(3) $\Leftrightarrow \dfrac{\sum a^2+2\sum bc}{\sum a^2+5\sum bc}\ge\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \sum a^2\ge\sum bc$, evident cu egalitate pentru $a=b=c$.

Inegalitatea (2) $\Leftrightarrow \sum bc\le 3$, care rezultă din $\sum bc\le\dfrac{(a+b+c)^2}{3}=\dfrac{3^2}{3}=3$.

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c=1$.

4) Fie $a,b,c>0$ şi $n\in\boldsymbol{N}, n\ge 2$. Arătaţi că

$$\sum\frac{a^n}{b(a+5c)^{n+1}}\ge\frac{27}{6^{n+1}(a+b+c)^2}.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție.</u>

Folosind inegalitatea lui Höder obţinem:

$$M_s=\sum\frac{a^n}{b(a+5c)^{n+1}}=\sum\frac{\left(\frac{a}{a+5c}\right)^n}{b(a+5c)}\ge\frac{\left(\sum\frac{a}{a+5c}\right)^n}{3^{n-2}\sum b(a+5c)}\overset{(1)}{\ge}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{3^{n-2}\cdot 6\sum bc}=\frac{3}{6^n\cdot 2\sum bc}\overset{(2)}{\ge}\frac{27}{6^{n+1}(a+b+c)^2}=M_d$$

unde(1) $\Leftrightarrow \sum\dfrac{a}{a+5c}\ge\dfrac{1}{2}$, care rezultă din inegalitatea lui Bergström:

$$\sum\frac{a}{a+5c}=\sum\frac{a^2}{a^2+5ac}\ge\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum\left(a^2+5ac\right)}=\frac{\sum a^2+2\sum bc}{\sum a^2+5\sum bc}\overset{(3)}{\ge}\frac{1}{2},$$

unde(3) $\Leftrightarrow \dfrac{\sum a^2+2\sum bc}{\sum a^2+5\sum bc}\ge\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \sum a^2\ge\sum bc$, evident cu egalitate pentru $a=b=c$.

Inegalitatea (2) $\Leftrightarrow \sum bc\le\dfrac{(a+b+c)^2}{3}$, care rezultă din $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)\Leftrightarrow$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$, evident cu egalitate pentru $a=b=c$.

5) Fie $a,b,c>0$ şi $n\ge 2$. Arătaţi că

$$\sum\frac{a^2}{b(a+nc)^3}\ge\frac{9}{(n+1)^3(a+b+c)^2}.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție.</u>

Folosind inegalitatea lui Bergström obţinem:

$$M_s=\sum\frac{a^2}{b(a+nc)^3}=\sum\frac{\left(\frac{a}{a+nc}\right)^2}{b(a+nc)}\geq\frac{\left(\sum\frac{a}{a+nc}\right)^2}{\sum b(a+nc)}\overset{(1)}{\geq}\frac{\left(\frac{3}{n+1}\right)^2}{(n+1)\sum bc}=\frac{3^2}{(n+1)^3\sum bc}\overset{(2)}{\geq}\frac{9}{(n+1)^3(a+b+c)^2}=M_d$$

unde(1) $\Leftrightarrow\sum\frac{a}{a+nc}\geq\frac{3}{n+1}$, care rezultă din inegalitatea lui Bergström:

$$\sum\frac{a}{a+nc}=\sum\frac{a^2}{a^2+nac}\geq\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum\left(a^2+nac\right)}=\frac{\sum a^2+2\sum bc}{\sum a^2+n\sum bc}\overset{(3)}{\geq}\frac{3}{n+1},$$

unde(3) $\Leftrightarrow\frac{\sum a^2+2\sum bc}{\sum a^2+n\sum bc}\geq\frac{3}{n+1}\Leftrightarrow(n-2)\sum a^2\geq(n-2)\sum bc$,care rezultă din condiţia din ipoteză $n\geq2$ şi $\sum a^2\geq\sum bc$, evident cu egalitate pentru $a=b=c$.

Inegalitatea (2) $\Leftrightarrow\sum bc\leq\frac{(a+b+c)^2}{3}$, care rezultă din $(a+b+c)^2\geq3(ab+bc+ca)\Leftrightarrow$ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq0$, evident cu egalitate pentru $a=b=c$.

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c$.

6) Fie $a,b,c>0$, $\lambda\geq2$ şi $n\in\mathbf{N}, n\geq2$. Arătaţi că

$$\sum\frac{a^n}{b(a+\lambda c)^{n+1}}\geq\frac{9}{(\lambda+1)^{n+1}(a+b+c)^2}.$$

Marin Chirciu

<u>Soluţie.</u>

Folosind inegalitatea lui Höder obţinem:

$$M_s=\sum\frac{a^n}{b(a+\lambda c)^{n+1}}=\sum\frac{\left(\frac{a}{a+\lambda c}\right)^n}{b(a+\lambda c)}\geq\frac{\left(\sum\frac{a}{a+\lambda c}\right)^n}{3^{n-2}\sum b(a+\lambda c)}\overset{(1)}{\geq}\frac{\left(\frac{3}{\lambda+1}\right)^n}{3^{n-2}\cdot(\lambda+1)\sum bc}=\frac{3^2}{(\lambda+1)^{n+1}\sum bc}\overset{(2)}{\geq}\frac{9}{(\lambda+1)^{n+1}(a+b+c)^2}=M_d$$

unde(1) $\Leftrightarrow\sum\frac{a}{a+\lambda c}\geq\frac{3}{\lambda+1}$, care rezultă din inegalitatea lui Bergström:

$$\sum\frac{a}{a+\lambda c}=\sum\frac{a^2}{a^2+\lambda ac}\geq\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum\left(a^2+\lambda ac\right)}=\frac{\sum a^2+2\sum bc}{\sum a^2+\lambda\sum bc}\overset{(3)}{\geq}\frac{3}{\lambda+1},$$

unde(3) $\Leftrightarrow\frac{\sum a^2+2\sum bc}{\sum a^2+\lambda\sum bc}\geq\frac{3}{\lambda+1}\Leftrightarrow(\lambda-2)\sum a^2\geq(\lambda-2)\sum bc$,care rezultă din condiţia din ipoteză $\lambda\geq2$ şi $\sum a^2\geq\sum bc$ evident cu egalitate pentru $a=b=c$.

Inegalitatea (2) $\Leftrightarrow\sum bc\leq\frac{(a+b+c)^2}{3}$, care rezultă din $(a+b+c)^2\geq3(ab+bc+ca)\Leftrightarrow$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$, evident cu egalitate pentru $a=b=c$.

Deducem că are loc inegalitatea din enunţ, cu egalitate dacă şi numai dacă $a=b=c$.

Aplicația6.

1) JP.294. Let a,b,c be positive real numbers such that $a+b+c=3$.Prove that

$$\frac{a}{b(b+2c)^2}+\frac{b}{c(c+2a)^2}+\frac{c}{a(a+2b)^2}\ge\frac{9}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^3}.$$

Proposed by Hoang Le Nhat Tung, Hanoi, Vietnam,20RMM-Spring 2021,JP.294

Solution.

$$LHS=\sum\frac{a}{b(b+2c)^2}=\frac{\sum\left(\frac{a}{b+2c}\right)^2}{ab}\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\sum\frac{a}{b+2c}\right)^2}{\sum ab}\overset{(1)}{\ge}\frac{\left(\frac{3}{\sum ab}\right)^2}{\sum ab}=$$

$$=\frac{9}{\left(\sum ab\right)^3}\overset{(2)}{\ge}\frac{9}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^3}=RHS.$$

We have(1) $\Leftrightarrow \sum\frac{a}{b+2c}\ge\frac{3}{\sum bc}$,resulting from:

$$\sum\frac{a}{b+2c}=\sum\frac{a^2}{ab+2ac}\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum(ab+2ac)}=\frac{\left(\sum a\right)^2}{3\sum bc}\overset{(3)}{=}\frac{3^2}{3\sum bc}=\frac{3}{\sum bc},\text{ where(3)}\Leftrightarrow\sum a=3.$$

Inequality(2) $\Leftrightarrow \frac{9}{\left(\sum ab\right)^3}\overset{(2)}{\ge}\frac{9}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^3}\Leftrightarrow\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ge ab+bc+ca$,

resulting from:

$$\sqrt{a}+\sqrt{a}+a^2\overset{AM-GM}{\ge}3\sqrt[3]{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot a^2}=3a\Rightarrow 2\sqrt{a}+a^2\ge 3a\Rightarrow\sum\left(2\sqrt{a}+a^2\right)\ge\sum 3a\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sum\sqrt{a}+\sum a^2\ge 3\sum a\overset{3=a+b+c}{\Leftrightarrow}2\sum\sqrt{a}+\sum a^2\ge\left(\sum a\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sum\sqrt{a}+\sum a^2\ge\sum a^2+2\sum bc\Leftrightarrow\sum\sqrt{a}\ge\sum bc\Leftrightarrow\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ge ab+bc+ca.$$

Equality occurs if and only if $a=b=c=1$.

2) Let a,b,c be positive real numbers such that $a+b+c=3$ and $n\ge 0$.Prove that

$$\frac{a}{b(b+nc)^2}+\frac{b}{c(c+2na)^2}+\frac{c}{a(a+nb)^2}\ge\frac{9}{(n+1)^2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^3}.$$

Proposed by Marin Chirciu, Romania

Solution.

$$LHS=\sum\frac{a}{b(b+2c)^2}=\frac{\sum\left(\frac{a}{b+nc}\right)^2}{ab}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum\frac{a}{b+nc}\right)^2}{\sum ab}\overset{(1)}{\geq}\frac{\left(\frac{3}{(n+1)\sum ab}\right)^2}{\sum ab}=$$

$$=\frac{9}{(n+1)^2\left(\sum ab\right)^3}\overset{(2)}{\geq}\frac{9}{(n+1)^2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^3}=RHS$$

We have(1) $\Leftrightarrow \sum\frac{a}{b+nc}\geq\frac{3}{(n+1)\sum bc}$,resulting from:

$$\sum\frac{a}{b+nc}=\sum\frac{a^2}{ab+nac}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum(ab+nac)}=\frac{\left(\sum a\right)^2}{(n+1)\sum bc}\overset{(3)}{=}\frac{9}{(n+1)\sum bc}, \text{ where(3) } \Leftrightarrow \sum a=3.$$

Inequality(2) $\Leftrightarrow \frac{9}{\left(\sum ab\right)^3}\overset{(2)}{\geq}\frac{9}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^3}\Leftrightarrow\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq ab+bc+ca$,

resulting from:

$$\sqrt{a}+\sqrt{a}+a^2\overset{AM-GM}{\geq}3\sqrt[3]{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot a^2}=3a\Rightarrow 2\sqrt{a}+a^2\geq 3a\Rightarrow\sum\left(2\sqrt{a}+a^2\right)\geq\sum 3a\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sum\sqrt{a}+\sum a^2\geq 3\sum a\overset{3=a+b+c}{\Leftrightarrow}2\sum\sqrt{a}+\sum a^2\geq\left(\sum a\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sum\sqrt{a}+\sum a^2\geq\sum a^2+2\sum bc\Leftrightarrow\sum\sqrt{a}\geq\sum bc\Leftrightarrow\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq ab+bc+ca.$$

Equality occurs if and only if $a=b=c=1$.

3) Fie $a,b,c>0$ astfel încât $a+b+c=3$. Arătaţi că

$$\sum\frac{a}{b(b+2c)^2}\geq\frac{1}{3}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Bergström obţinem:

$$\sum\frac{a}{b(b+2c)^2}=\sum\frac{\left(\frac{a}{b+2c}\right)^2}{ab}\geq\frac{\left(\sum\frac{a}{b+2c}\right)^2}{\sum ab}\overset{(1)}{\geq}\frac{1^2}{\sum bc}=\frac{1}{\sum bc}\overset{(2)}{\geq}\frac{1}{3},$$

unde(1) $\Leftrightarrow \sum \frac{a}{b+2c} \geq 1$, care rezultă din inegalitatea lui Bergström:

$$\sum \frac{a}{b+2c} = \sum \frac{a^2}{ab+2ac} \geq \frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum(ab+2ac)} = \frac{\sum a^2 + 2\sum bc}{3\sum bc} \overset{(3)}{\geq} 1,$$

unde(3) $\Leftrightarrow \frac{\sum a^2 + 2\sum bc}{3\sum bc} \geq 1 \Leftrightarrow \sum a^2 \geq \sum bc$, evident cu egalitate pentru $a=b=c$.

Inegalitatea (2) $\Leftrightarrow \sum bc \leq 3$, care rezultă din $\sum bc \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{3^2}{3} = 3$.

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c=1$.

4) Fie $a,b,c>0$ astfel încât $a+b+c=3$ şi $n \in \mathbf{N}^*$. Arătaţi că

$$\sum \frac{a^n}{b(b+2c)^{n+1}} \geq \frac{1}{3^n}.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție.</u>

Folosind inegalitatea lui Höder obţinem:

$$\sum \frac{a^n}{b(b+2c)^{n+1}} = \sum \frac{\left(\frac{a}{b+2c}\right)^{n+1}}{ab} \geq \frac{\left(\sum \frac{a}{b+2c}\right)^{n+1}}{3^{n-1}\sum ab} \overset{(1)}{\geq} \frac{1^2}{3^{n-1}\sum bc} = \frac{1}{3^{n-1}\sum bc} \overset{(2)}{\geq} \frac{1}{3^n},$$

unde(1) $\Leftrightarrow \sum \frac{a}{b+2c} \geq 1$, care rezultă din inegalitatea lui Bergström:

$$\sum \frac{a}{b+2c} = \sum \frac{a^2}{ab+2ac} \geq \frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum(ab+2ac)} = \frac{\sum a^2 + 2\sum bc}{3\sum bc} \overset{(3)}{\geq} 1,$$

unde(3) $\Leftrightarrow \frac{\sum a^2 + 2\sum bc}{3\sum bc} \geq 1 \Leftrightarrow \sum a^2 \geq \sum bc$, evident cu egalitate pentru $a=b=c$.

Inegalitatea (2) $\Leftrightarrow \sum bc \leq 3$, care rezultă din $\sum bc \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{3^2}{3} = 3$.

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c=1$.

5) Fie $a,b,c>0$. Arătaţi că

$$\sum \frac{a}{b(b+2c)^2} \geq \frac{3}{(a+b+c)^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Bergström obţinem:

$$\sum\frac{a}{b(b+2c)^2}=\sum\frac{\left(\frac{a}{b+2c}\right)^2}{ab}\geq\frac{\left(\sum\frac{a}{b+2c}\right)^2}{\sum ab}\overset{(1)}{\geq}\frac{1^2}{\sum bc}=\frac{1}{\sum bc}\overset{(2)}{\geq}\frac{3}{(a+b+c)^2},$$

unde(1) $\Leftrightarrow\sum\frac{a}{b+2c}\geq1$, care rezultă din inegalitatea lui Bergström:

$$\sum\frac{a}{b+2c}=\sum\frac{a^2}{ab+2ac}\geq\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum(ab+2ac)}=\frac{\sum a^2+2\sum bc}{3\sum bc}\overset{(3)}{\geq}1,$$

unde(3) $\Leftrightarrow\frac{\sum a^2+2\sum bc}{3\sum bc}\geq1\Leftrightarrow\sum a^2\geq\sum bc$, evident cu egalitate pentru $a=b=c$.

Inegalitatea (2) $\Leftrightarrow\sum bc\leq\frac{(a+b+c)^2}{3}$, care rezultă din $(a+b+c)^2\geq3(ab+bc+ca)\Leftrightarrow$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq0$, evident cu egalitate pentru $a=b=c$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c=1$.

6) Fie $a,b,c>0$ şi $n\in\boldsymbol{N}^*$. Arătaţi că

$$\sum\frac{a^n}{b(b+2c)^{n+1}}\geq\frac{9}{3^n(a+b+c)^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Höder obţinem:

$$\sum\frac{a^n}{b(b+2c)^{n+1}}=\sum\frac{\left(\frac{a}{b+2c}\right)^{n+1}}{ab}\geq\frac{\left(\sum\frac{a}{b+2c}\right)^{n+1}}{3^{n-1}\sum ab}\overset{(1)}{\geq}\frac{1^2}{3^{n-1}\sum bc}=\frac{1}{3^{n-1}\sum bc}\overset{(2)}{\geq}\frac{9}{3^n(a+b+c)^2},$$

unde(1) $\Leftrightarrow\sum\frac{a}{b+2c}\geq1$, care rezultă din inegalitatea lui Bergström:

$$\sum\frac{a}{b+2c}=\sum\frac{a^2}{ab+2ac}\geq\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum(ab+2ac)}=\frac{\sum a^2+2\sum bc}{3\sum bc}\overset{(3)}{\geq}1,$$

unde(3) $\Leftrightarrow\frac{\sum a^2+2\sum bc}{3\sum bc}\geq1\Leftrightarrow\sum a^2\geq\sum bc$, evident cu egalitate pentru $a=b=c$.

Inegalitatea (2) $\Leftrightarrow\sum bc\leq\frac{(a+b+c)^2}{3}$, care rezultă din $(a+b+c)^2\geq3(ab+bc+ca)\Leftrightarrow$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$, evident cu egalitate pentru $a=b=c$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c=1$.

7) Fie $a,b,c>0$ şi $n\geq 0$. Arătaţi că

$$\sum\frac{a}{b(b+nc)^2}\geq\frac{27}{(n+1)^2(a+b+c)^2}.$$

Marin Chirciu

Soluţie.

Folosind inegalitatea lui Bergström obţinem:

8) Fie $a,b,c>0$. Arătaţi că

$$\sum\frac{a}{b(b+2c)^2}\geq\frac{3}{(a+b+c)^2}.$$

Marin Chirciu

Soluţie.

Folosind inegalitatea lui Bergström obţinem:

$$\sum\frac{a}{b(b+2c)^2}=\sum\frac{\left(\frac{a}{b+2c}\right)^2}{ab}\geq\frac{\left(\sum\frac{a}{b+2c}\right)^2}{\sum ab}\overset{(1)}{\geq}\frac{1^2}{\sum bc}=\frac{1}{\sum bc}\overset{(2)}{\geq}\frac{3}{(a+b+c)^2},$$

unde(1) $\Leftrightarrow \sum\frac{a}{b+2c}\geq 1$, care rezultă din inegalitatea lui Bergström:

$$\sum\frac{a}{b+2c}=\sum\frac{a^2}{ab+2ac}\geq\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum(ab+2ac)}=\frac{\sum a^2+2\sum bc}{3\sum bc}\overset{(3)}{\geq}1,$$

unde(3) $\Leftrightarrow \frac{\sum a^2+2\sum bc}{3\sum bc}\geq 1 \Leftrightarrow \sum a^2\geq\sum bc$, evident cu egalitate pentru $a=b=c$.

Inegalitatea (2) $\Leftrightarrow \sum bc\leq\frac{(a+b+c)^2}{3}$, care rezultă din $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca) \Leftrightarrow$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$, evident cu egalitate pentru $a=b=c$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c=1$.

9) Fie $a,b,c>0$ şi $n\in\boldsymbol{N}^*$. Arătaţi că

$$\sum\frac{a^n}{b(b+2c)^{n+1}}\geq\frac{9}{3^n(a+b+c)^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Höder obținem:

$$\sum\frac{a^n}{b(b+2c)^{n+1}}=\sum\frac{\left(\frac{a}{b+2c}\right)^{n+1}}{ab}\ge\frac{\left(\sum\frac{a}{b+2c}\right)^{n+1}}{3^{n-1}\sum ab}\overset{(1)}{\ge}\frac{1^2}{3^{n-1}\sum bc}=\frac{1}{3^{n-1}\sum bc}\overset{(2)}{\ge}\frac{9}{3^n(a+b+c)^2},$$

unde(1) $\Leftrightarrow\sum\frac{a}{b+2c}\ge1$, care rezultă din inegalitatea lui Bergström:

$$\sum\frac{a}{b+2c}=\sum\frac{a^2}{ab+2ac}\ge\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum(ab+2ac)}=\frac{\sum a^2+2\sum bc}{3\sum bc}\overset{(3)}{\ge}1,$$

unde(3) $\Leftrightarrow\frac{\sum a^2+2\sum bc}{3\sum bc}\ge1\Leftrightarrow\sum a^2\ge\sum bc$, evident cu egalitate pentru $a=b=c$.

Inegalitatea (2) $\Leftrightarrow\sum bc\le\frac{(a+b+c)^2}{3}$, care rezultă din $(a+b+c)^2\ge3(ab+bc+ca)\Leftrightarrow$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge0$, evident cu egalitate pentru $a=b=c$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c=1$.

10) Fie $a,b,c>0$ şi $n\ge0$. Arătaţi că

$$\sum\frac{a}{b(b+nc)^2}\ge\frac{27}{(n+1)^2(a+b+c)^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Bergström obţinem:

$$\sum\frac{a}{b(b+nc)^2}=\sum\frac{\left(\frac{a}{b+nc}\right)^2}{ab}\ge\frac{\left(\sum\frac{a}{b+nc}\right)^2}{\sum ab}\overset{(1)}{\ge}\frac{\left(\frac{3}{n+1}\right)^2}{\sum bc}=\frac{9}{(n+1)^2\sum bc}\overset{(2)}{\ge}\frac{27}{(n+1)^2(a+b+c)^2},$$

unde(1) $\Leftrightarrow\sum\frac{a}{b+nc}\ge\frac{3}{n+1}$, care rezultă din inegalitatea lui Bergström:

$$\sum\frac{a}{b+nc}=\sum\frac{a^2}{ab+nac}\ge\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum(ab+nac)}=\frac{\sum a^2+2\sum bc}{(n+1)\sum bc}\overset{(3)}{\ge}\frac{3}{n+1},$$

unde(3) $\Leftrightarrow\frac{\sum a^2+2\sum bc}{3\sum bc}\ge1\Leftrightarrow\sum a^2\ge\sum bc$, evident cu egalitate pentru $a=b=c$.

Inegalitatea (2) $\Leftrightarrow\sum bc\le\frac{(a+b+c)^2}{3}$, care rezultă din $(a+b+c)^2\ge3(ab+bc+ca)\Leftrightarrow$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$, evident cu egalitate pentru $a=b=c$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c=1$.

11) Fie $a,b,c>0$, $\lambda\geq 0$ şi $n\in N^*$. Arătaţi că

$$\sum\frac{a^n}{b(b+\lambda c)^{n+1}}\geq\frac{27}{3^n(\lambda+1)^2(a+b+c)^2}.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție.</u>

Folosind inegalitatea lui Höder obţinem:

$$\sum\frac{a^n}{b(b+\lambda c)^{n+1}}=\sum\frac{\left(\frac{a}{b+\lambda c}\right)^{n+1}}{ab}\geq\frac{\left(\sum\frac{a}{b+\lambda c}\right)^{n+1}}{3^{n-1}\sum ab}\overset{(1)}{\geq}\frac{\left(\frac{3}{\lambda+1}\right)^2}{3^{n-1}\sum bc}=\frac{9}{3^{n-1}(\lambda+1)^2\sum bc}\overset{(2)}{\geq}\frac{27}{3^n(\lambda+1)^2(a+b+c)^2}$$

unde(1) $\Leftrightarrow\sum\frac{a}{b+\lambda c}\geq\frac{3}{\lambda+1}$, care rezultă din inegalitatea lui Bergström:

$$\sum\frac{a}{b+\lambda c}=\sum\frac{a^2}{ab+\lambda ac}\geq\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum(ab+\lambda ac)}=\frac{\sum a^2+2\sum bc}{(\lambda+1)\sum bc}\overset{(3)}{\geq}\frac{3}{\lambda+1},$$

unde(3) $\Leftrightarrow\frac{\sum a^2+2\sum bc}{3\sum bc}\geq 1\Leftrightarrow\sum a^2\geq\sum bc$, evident cu egalitate pentru $a=b=c$.

Inegalitatea (2) $\Leftrightarrow\sum bc\leq\frac{(a+b+c)^2}{3}$, care rezultă din $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)\Leftrightarrow$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$, evident cu egalitate pentru $a=b=c$.

Deducem că are loc inegalitatea din enunţ, cu egalitate dacă şi numai dacă $a=b=c$.

<u>Aplicația7.</u>

1) If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{a}{\sqrt{b^2+\frac{1}{4}bc+c^2}}\geq 2.$$

Mathematical Olympiads 7/2020

<u>Soluție</u>.

Avem $\sum\frac{a}{\sqrt{b^2+\frac{1}{4}bc+c^2}}\geq 2\Leftrightarrow\sum\frac{a}{\sqrt{4b^2+bc+4c^2}}\geq 1$, care rezultă din inegalitatea Hőlder .

Obținem:

$$\sum\frac{a}{\sqrt{4b^2+bc+4c^2}}\sum\frac{a}{\sqrt{4b^2+bc+4c^2}}\sum a\left(4b^2+bc+4c^2\right)\geq\left(\sum a\right)^3$$, de unde

$$M_s^2=\left(\sum\frac{a}{\sqrt{4b^2+bc+4c^2}}\right)^2\geq\frac{\left(\sum a\right)^3}{\sum a\left(4b^2+bc+4c^2\right)}\overset{(1)}{\geq}1=M_d^2,$$

unde (1) $\Leftrightarrow\dfrac{\left(\sum a\right)^3}{\sum a\left(4b^2+bc+4c^2\right)}\geq1\Leftrightarrow\left(\sum a\right)^3\geq\sum a\left(4b^2+bc+4c^2\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\sum a^3+3(a+b)(b+c)(c+a)\geq4\sum bc(b+c)+3abc\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum a^3+3\sum bc(b+c)+6abc\geq4\sum bc(b+c)+3abc\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\sum a^3+3abc\geq\sum bc(b+c)$,(inegalitatea lui Schur).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

2) Fie $a,b,c>0$ și $\frac{1}{4}\leq n\leq\frac{4}{7}$. Arătați că

$$\sum\frac{a}{\sqrt{b^2+nbc+c^2}}\geq\frac{3}{\sqrt{n+2}}.$$

Marin Chirciu

Demonstrație.

Folosim inegalitatea lui Hőlder obținem:

$$\sum\frac{a}{\sqrt{b^2+nbc+c^2}}\sum\frac{a}{\sqrt{b^2+nbc+c^2}}\sum a\left(b^2+nbc+c^2\right)\geq\left(\sum a\right)^3,$$

de unde $\left(\sum\dfrac{a}{\sqrt{b^2+nbc+c^2}}\right)^2\geq\dfrac{\left(\sum a\right)^3}{\sum a\left(b^2+nbc+c^2\right)}\overset{(1)}{\geq}\dfrac{9}{n+2}$,

iar (1) $\Leftrightarrow\dfrac{\left(\sum a\right)^3}{\sum a\left(b^2+nbc+c^2\right)}\geq\dfrac{9}{n+2}\Leftrightarrow(n+2)\left(\sum a\right)^3\geq9\sum a\left(b^2+nbc+c^2\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(n+2)\left[a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)\right]\geq9\sum a\left(b^2+nbc+c^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(n+2)\left[a^3+b^3+c^3+3\left(\sum bc(b+c)+2abc\right)\right]\geq9\sum bc(b+c)+27nabc\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(n+2)\left(a^3+b^3+c^3\right)+3(n+2)\sum bc(b+c)+6(n+2)abc\geq9\sum bc(b+c)+27nabc\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow(n+2)\left(a^3+b^3+c^3\right)+3(4-7n)abc\geq3(1-n)\sum bc(b+c)$, (2).

Inegalitatea (2) rezultă din combinarea inegalităților $\sum a^3+3abc\geq\sum bc(b+c)$, (3), și $2\sum a^3 \geq \sum bc(b+c)$,(4).

Inegalitatea (3) rezultă din inegalitatea lui Schur: $\sum a^r(a-b)(a-c) \geq 0$, $a,b,c \geq 0, r > 0$, pentru $r = 1$, de unde $a^3+b^3+c^3+3abc \geq \sum bc(b+c)$.

Inegalitatea (4) rezultă din $a^3+b^3 \geq ab(a+b) \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 \geq 0$ și analoagele, de unde

$2\sum a^3 \geq \sum bc(b+c)$.

Inmulțim inegalitatea (3) cu $(4-7n) \geq 0$ și inegalitatea (4) cu $(4n-1) \geq 0$ și adunăm cele două inegalități obținute, de unde obținem inegalitatea (2).

Din $\left(\sum \frac{a}{\sqrt{b^2+nbc+c^2}}\right)^2 \geq \frac{9}{n+2}$ obținem concluzia $\sum \frac{a}{\sqrt{b^2+nbc+c^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{n+2}}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Aplicația8.

1) If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=1$then

$$\sum \frac{(3a)^{2020}}{(b+1)(c+1)} \geq \frac{27}{16}.$$

George Apostolopoulos, Greece,RMM 8/2020

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Hőlder obținem:

$$\sum \frac{(3a)^{2020}}{(b+1)(c+1)} \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum 3a\right)^{2020}}{3^{2018}\sum(b+1)(c+1)} = \frac{3^{2020}\left(\sum a\right)^{2020}}{3^{2018}\sum(bc+b+c+1)} = \frac{3^2(1)^{2020}}{\sum bc+2\sum a+3} =$$

$$= \frac{9}{\sum bc+2\cdot 1+3} = \frac{9}{\sum bc+5} \overset{(1)}{\geq} \frac{27}{16} = Md,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{9}{\sum bc+5} \geq \frac{27}{16} \Leftrightarrow 16 \geq 3\sum bc+15 \Leftrightarrow 1 \geq 3\sum bc \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 3\sum bc \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum(a-b)^2 \geq 0$, evident cu egalitate pentru $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

2) If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=1$and $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$, $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{(3a)^n}{(b+\lambda)(c+\lambda)} \geq \frac{27}{(3\lambda+1)^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Hőlder obținem:

$$\sum\frac{(3a)^n}{(b+\lambda)(c+\lambda)}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum 3a\right)^n}{3^{n-2}\sum(b+\lambda)(c+\lambda)}=\frac{3^n\left(\sum a\right)^n}{3^{n-2}\sum\left(bc+\lambda b+\lambda c+\lambda^2\right)}=\frac{3^2(1)^n}{\sum bc+2\lambda\sum a+3\lambda^2}=$$

$$=\frac{9}{\sum bc+2\lambda\cdot 1+3\lambda^2}=\frac{9}{\sum bc+2\lambda+3\lambda^2}\overset{(1)}{\geq}\frac{27}{(3\lambda+1)^2}=Md,$$

unde (1) $\Leftrightarrow\dfrac{9}{\sum bc+2\lambda+3\lambda^2}\geq\dfrac{27}{(3\lambda+1)^2}\Leftrightarrow(3\lambda+1)^2\geq 3\left(\sum bc+2\lambda+3\lambda^2\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9\lambda^2+6\lambda+1\geq 3\sum bc+6\lambda+9\lambda^2\Leftrightarrow 1\geq 3\sum bc\Leftrightarrow(a+b+c)^2\geq 3\sum bc\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sum(a-b)^2\geq 0$, evident cu egalitate pentru $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Aplicația9.

1) If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=1$ then

$$\sum\frac{a^{20}}{1+b(c+2)}\geq\frac{1}{3^{20}}\cdot\frac{27}{16}.$$

Kostas Geronikolas, Greece,Mathematical Inequalities10/2020

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Hőlder obținem:

$$Ms=\sum\frac{a^{20}}{1+b(c+2)}\geq\frac{\left(\sum a\right)^{20}}{3^{20-2}\sum(1+bc+2b)}=\frac{1}{3^{18}\left(3+\sum bc+2\sum b\right)}=\frac{1}{3^{18}\left(3+\sum bc+2\right)}=$$

$=\dfrac{1}{3^{18}\left(5+\sum bc\right)}\overset{(1)}{\geq}\dfrac{1}{3^{20}}\cdot\dfrac{27}{16}=Md$, unde (1) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{3^{18}\left(5+\sum bc\right)}\geq\dfrac{1}{3^{20}}\cdot\dfrac{27}{16}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\left(5+\sum bc\right)}\geq\dfrac{3}{16}\Leftrightarrow 1\geq 3\sum bc\Leftrightarrow(a+b+c)^2\geq 3\sum bc\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sum(a-b)^2\geq 0$, evident cu egalitate pentru $a=b=c$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

2) If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=1$ andthen

$$\sum\frac{a^{20}}{1+b(c+2)}\geq\frac{1}{3^{20}}\cdot\frac{27}{16}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Hőlder obținem:

$$Ms=\sum\frac{a^{20}}{1+b(c+2)}\geq\frac{\left(\sum a\right)^{20}}{3^{20-2}\sum(1+bc+2b)}=\frac{1}{3^{18}\left(3+\sum bc+2\sum b\right)}=\frac{1}{3^{18}\left(3+\sum bc+2\right)}=$$

$$=\frac{1}{3^{18}\left(5+\sum bc\right)}\overset{(1)}{\geq}\frac{1}{3^{20}}\cdot\frac{27}{16}=Md$$, unde (1) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3^{18}\left(5+\sum bc\right)}\geq\frac{1}{3^{20}}\cdot\frac{27}{16}\Leftrightarrow\frac{1}{\left(5+\sum bc\right)}\geq\frac{3}{16}\Leftrightarrow 1\geq 3\sum bc\Leftrightarrow(a+b+c)^2\geq 3\sum bc\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\sum(a-b)^2\geq 0$, evident cu egalitate pentru $a=b=c$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Soluție.

Lema

3) If $x,y,z>0$ such that $x\sqrt[3]{yz^2}+y\sqrt[3]{zx^2}+z\sqrt[3]{xy^2}\geq x+y+z$ then

$$xy+yz+zx\geq x+y+z.$$

Demonstrație.

Folosind inegalitatea mediilor obținem:

$$\sum x\sqrt[3]{yz^2}\leq\sum x\cdot\frac{y+z+z}{3}=\sum yz.$$

Din ipoteză $\sum x\sqrt[3]{yz^2}\geq\sum x$, (1) și $\sum x\sqrt[3]{yz^2}\leq\sum yz$, (2) obținem:

$\sum yz\geq\sum x\sqrt[3]{yz^2}\geq\sum x$, de unde $\sum yz\geq\sum x$, cu egalitate pentru $x=y=z$.

Folosim inegalitatea cunoscută $(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$, (3) și **Lema** $\sum yz\geq\sum x$, (4).

Din (3) și (4) obținem $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) \geq 3(x+y+z)$, de unde rezultă $(x+y+z)^2 \geq 3(x+y+z) \Leftrightarrow x+y+z \geq 3$, deci minimul expresiei $E = x+y+z$ este 3 și este atins pentru $x = y = z = 1$.

Problema se poate extinde la radical de ordinul $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$.

4) If $x, y, z > 0$ such that $x\sqrt[n]{yz^{n-1}} + y\sqrt[n]{zx^{n-1}} + z\sqrt[n]{xy^{n-1}} \geq x+y+z$, $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ then find the minimum of the expression

$$E = x+y+z.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție</u>.

<u>Lema</u>

5) If $x, y, z > 0$ such that $x\sqrt[n]{yz^{n-1}} + y\sqrt[n]{zx^{n-1}} + z\sqrt[n]{xy^{n-1}} \geq x+y+z$, $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ then

$$xy+yz+zx \geq x+y+z.$$

<u>Demonstrație</u>.

Folosind inegalitatea mediilor obținem:

$$\sum x\sqrt[n]{yz^{n-1}} \leq \sum x \cdot \frac{y+z+\ldots+z}{n} = \sum yz.$$

Din ipoteză $\sum x\sqrt[n]{yz^{n-1}} \geq \sum x$, (1) și $\sum x\sqrt[n]{yz^{n-1}} \leq \sum yz$, (2) obținem:

$\sum yz \geq \sum x\sqrt[n]{yz^{n-1}} \geq \sum x$, de unde $\sum yz \geq \sum x$, cu egalitate pentru $x = y = z$.

Folosim inegalitatea cunoscută $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$, (3) și **Lema** $\sum yz \geq \sum x$, (4).

Din (3) și (4) obținem $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) \geq 3(x+y+z)$, de unde rezultă $(x+y+z)^2 \geq 3(x+y+z) \Leftrightarrow x+y+z \geq 3$, deci minimul expresiei $E = x+y+z$ este 3 și este atins pentru $x = y = z = 1$.

6) If $a, b, c, d > 0$ such that $a\sqrt[3]{bcd} + b\sqrt[3]{cda} + c\sqrt[3]{dab} + d\sqrt[3]{abc} \geq a+b+c+d$ then find the minimum of the expression

$$E = a+b+c+d.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție</u>.

<u>Lema</u>

7) If $a,b,c,d>0$ such that $a\sqrt[3]{bcd}+b\sqrt[3]{cda}+c\sqrt[3]{dab}+d\sqrt[3]{abc}\geq a+b+c+d$ then

$$(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\geq\frac{3}{2}(a+b+c+d).$$

Demonstrație.

Folosind inegalitatea mediilor obținem:

$$\sum a\sqrt[3]{bcd}\leq\sum a\cdot\frac{b+c+d}{3}=\frac{2}{3}(ab+ac+ad+bc+bd+cd).$$

Din ipoteză $\sum a\sqrt[3]{bcd}\geq\sum a$, (1) și $\frac{2}{3}\sum ab\geq\sum a$, (2) obținem:

$\frac{2}{3}\sum ab\geq\sum a\sqrt[3]{bcd}\geq\sum a$, de unde $\sum ab\geq\frac{3}{2}\sum a$, cu egalitate pentru $a=b=c=d$.

Folosim inegalitatea cunoscută: $(a+b+c+d)^2\geq\frac{8}{3}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(d-c)^2\geq 0$, (3) și **Lema:**

$(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\geq\frac{3}{2}(a+b+c+d)$, (4).

Din (3) și (4) obținem :

$$(a+b+c+d)^2\geq\frac{8}{3}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\geq\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{2}(a+b+c+d)=4(a+b+c+d),$$

de unde rezultă $(a+b+c+d)^2\geq 4(a+b+c+d)\Leftrightarrow a+b+c+d\geq 4$, deci minimul expresiei $E=a+b+c+d$ este 4 și este atins pentru $a=b=c=d=1$.

Aplicația10.

1) If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=1$ then

$$\sum\frac{a^{20}}{1+b(c+2)}\geq\frac{1}{3^{20}}\cdot\frac{27}{16}.$$

Kostas Geronikolas, Greece

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Hőlder obținem:

$$Ms=\sum\frac{a^{20}}{1+b(c+2)}\geq\frac{\left(\sum a\right)^{20}}{3^{20-2}\sum(1+bc+2b)}=\frac{1}{3^{18}\left(3+\sum bc+2\sum b\right)}=\frac{1}{3^{18}\left(3+\sum bc+2\right)}=$$

$$=\frac{1}{3^{18}\left(5+\sum bc\right)}\overset{(1)}{\geq}\frac{1}{3^{20}}\cdot\frac{27}{16}=Md$$, unde (1) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3^{18}\left(5+\sum bc\right)}\geq\frac{1}{3^{20}}\cdot\frac{27}{16}\Leftrightarrow\frac{1}{\left(5+\sum bc\right)}\geq\frac{3}{16}\Leftrightarrow 1\geq 3\sum bc\Leftrightarrow(a+b+c)^2\geq 3\sum bc\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\sum(a-b)^2\geq 0$, evident cu egalitate pentru $a=b=c$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

2) If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=1$ and $\lambda\geq 0$, $n\in\mathbf{N}, n\geq 2$ then

$$\sum\frac{a^n}{1+b(c+\lambda)}\geq\frac{27}{3^n(10+3\lambda)}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Hőlder obținem:

$$Ms=\sum\frac{a^n}{1+b(c+\lambda)}\geq\frac{\left(\sum a\right)^n}{3^{n-2}\sum(1+bc+\lambda b)}=\frac{1}{3^{n-2}\left(3+\sum bc+\lambda\sum b\right)}=\frac{1}{3^{n-2}\left(3+\sum bc+\lambda\right)}=$$

$$=\frac{1}{3^{n-2}\left(3+\lambda+\sum bc\right)}\overset{(1)}{\geq}\frac{27}{3^n(10+3\lambda)}=Md$$, unde (1) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3^{n-2}\left(3+\lambda+\sum bc\right)}\geq\frac{27}{3^n(10+3\lambda)}\Leftrightarrow\frac{1}{\left(3+\lambda+\sum bc\right)}\geq\frac{3}{(10+3\lambda)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(10+3\lambda)\geq 3\left(3+\lambda+\sum bc\right)\Leftrightarrow 1\geq 3\sum bc\Leftrightarrow(a+b+c)^2\geq 3\sum bc\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\sum(a-b)^2\geq 0$, evident cu egalitate pentru $a=b=c$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Aplicația11.

1) If $a,b,c>0$ such that $abc=1$ then

$$\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+\frac{a^2+b^2}{c}\geq a+b+c+3.$$

Mircea Lascu, Zalău, GM 12/2002, GM9/2020

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Bergstrőm obținem:

$$Ms=\left(\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}\right)+\left(\frac{c^2}{a}+\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}\right)=\sum\frac{b^2}{a}+\sum\frac{c^2}{a}\overset{Bergstrom}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum a}+\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum a}=$$

$$=\sum a+\sum a\overset{AGM}{\geq}\sum a+3\sqrt[3]{abc}=\sum a+3=Md\ .$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

2) If $a,b,c>0$ such that $abc=1$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\frac{b^2+\lambda c^2}{a}+\frac{c^2+\lambda a^2}{b}+\frac{a^2+\lambda b^2}{c}\geq\lambda(a+b+c)+3.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Bergstrőm obținem:

$$Ms=\left(\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}\right)+\lambda\left(\frac{c^2}{a}+\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}\right)=\sum\frac{b^2}{a}+\lambda\sum\frac{c^2}{a}\overset{Bergstrom}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum a}+\lambda\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum a}=$$

$$=\lambda\sum a+\sum a\overset{AGM}{\geq}\lambda\sum a+3\sqrt[3]{abc}=\lambda\sum a+3=Md\ .$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

3) If $a,b,c>0$ such that $abc=1$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\frac{b^3+\lambda c^3}{a}+\frac{c^3+\lambda a^3}{b}+\frac{a^3+\lambda b^3}{c}\geq\lambda(a+b+c)+3.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Hőlder obținem:

$$Ms=\left(\frac{b^3}{a}+\frac{c^3}{b}+\frac{a^3}{c}\right)+\lambda\left(\frac{c^3}{a}+\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}\right)=\sum\frac{b^3}{a}+\lambda\sum\frac{c^3}{a}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^3}{3\sum a}+\lambda\frac{\left(\sum a\right)^3}{3\sum a}=$$

$$=\lambda\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2+\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2=\lambda\sum a\cdot\frac{1}{3}\sum a+\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2\overset{AGM}{\geq}\lambda\sum a\cdot\sqrt[3]{abc}+\frac{1}{3}\left(3\sqrt[3]{abc}\right)^2=$$

$$=\lambda\sum a+3=Md\ .$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

4) If $a,b,c>0$ such that $abc=1$ and $\lambda\geq 0$, $n\in\mathbf{N}, n\geq 2$ then

$$\frac{b^n+\lambda c^n}{a}+\frac{c^n+\lambda a^n}{b}+\frac{a^n+\lambda b^n}{c}\geq\lambda(a+b+c)+3.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Hőlder obținem:

$$Ms=\left(\frac{b^n}{a}+\frac{c^n}{b}+\frac{a^n}{c}\right)+\lambda\left(\frac{c^n}{a}+\frac{a^n}{b}+\frac{b^n}{c}\right)=\sum\frac{b^n}{a}+\lambda\sum\frac{c^n}{a}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^n}{3^{n-2}\sum a}+\lambda\frac{\left(\sum a\right)^n}{3^{n-2}\sum a}=$$

$$=\lambda\frac{1}{3^{n-2}}\left(\sum a\right)^{n-1}+\frac{1}{3^{n-2}}\left(\sum a\right)^{n-1}=\lambda\sum a\cdot\frac{1}{3^{n-2}}\left(\sum a\right)^{n-2}+\frac{1}{3^{n-2}}\left(\sum a\right)^{n-1}\overset{AGM}{\geq}$$

$$\overset{AGM}{\geq}\lambda\sum a\cdot\frac{1}{3^{n-2}}\left(3\sqrt[3]{abc}\right)^{n-2}+\frac{1}{3^{n-2}}\left(3\sqrt[3]{abc}\right)^{n-1}=\lambda\sum a+3=Md\,.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

5) If $a,b,c>0$ such that $abc=1$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\frac{b^3+\lambda c^3}{a^2}+\frac{c^3+\lambda a^3}{b^2}+\frac{a^3+\lambda b^3}{c^2}\geq\lambda(a+b+c)+3.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Radon obținem:

$$Ms=\left(\frac{b^3}{a^2}+\frac{c^3}{b^2}+\frac{a^3}{c^2}\right)+\lambda\left(\frac{c^3}{a^2}+\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}\right)=\sum\frac{b^3}{a^2}+\lambda\sum\frac{c^3}{a^2}\overset{Radon}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^3}{\left(\sum a\right)^2}+\lambda\frac{\left(\sum a\right)^3}{\left(\sum a\right)^2}=$$

$$=\lambda\sum a+\sum a\overset{AGM}{\geq}\lambda\sum a+3\sqrt[3]{abc}=\lambda\sum a+3=Md\,.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

6) If $a,b,c>0$ such that $abc=1$ and $\lambda\geq 0$, $n\in\mathbf{N}$ then

$$\frac{b^{n+1}+\lambda c^{n+1}}{a^n}+\frac{c^{n+1}+\lambda a^{n+1}}{b^n}+\frac{a^{n+1}+\lambda b^{n+1}}{c^n}\geq\lambda(a+b+c)+3.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Radon obținem:

$$Ms=\left(\frac{b^{n+1}}{a^n}+\frac{c^{n+1}}{b^n}+\frac{a^{n+1}}{c^n}\right)+\lambda\left(\frac{c^{n+1}}{a^n}+\frac{a^{n+1}}{b^n}+\frac{b^{n+1}}{c^n}\right)=\sum\frac{b^{n+1}}{a^n}+\lambda\sum\frac{c^{n+1}}{a^n}\overset{Radon}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^{n+1}}{\left(\sum a\right)^n}+\lambda\frac{\left(\sum a\right)^{n+1}}{\left(\sum a\right)^n}=$$

$$=\lambda\sum a+\sum a\overset{AGM}{\geq}\lambda\sum a+3\sqrt[3]{abc}=\lambda\sum a+3=Md\,.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația12.

If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=3$, then

$$\left(a^3+2\right)\left(b^3+2\right)\left(c^3+2\right)\geq 27.$$

Daniel Sitaru,28-RMM-Spring 2023,JP.406

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Hőlder obținem:

$$Ms=\left(a^3+1+1\right)\left(1+b^3+1\right)\left(1+1+c^3\right)\overset{Holder}{\geq}\left(a+b+c\right)^3=27=Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

Problema se poate dezvolta.

If $a_1,a_2,...,a_n,a_{n+1}>0$ such that $a_1+a_2+...+a_n+a_{n+1}=n+1$, then

$$\left(a_1^n+n\right)\left(a_2^n+n\right)...\left(a_n^n+n\right)\left(a_{n+1}^n+n\right)\geq\left(n+1\right)^{n+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Hőlder obținem:

$$Ms=\left(a_1^n+1+...+1\right)\left(1+a_2^n+1+...+1\right)...\left(1+1+...+a_{n+1}^n\right)\overset{Holder}{\geq}\left(a_1+a_2+...+a_n+a_{n+1}\right)^{n+1}=$$

$$=\left(n+1\right)^{n+1}=Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1=a_2=...,a_n=a_{n+1}=1$.

Aplicația13.

1) If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{a}{\sqrt{b+2c}}\geq\sqrt{a+b+c}.$$

Kostas Geronikolas,Greece,Problem(702)7/2021

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Hőlder obținem:

$$\sum\frac{a}{\sqrt{b+2c}}\sum\frac{a}{\sqrt{b+2c}}\sum a\left(b+2c\right)\overset{Holder}{\geq}\left(\sum a\right)^3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\sum\frac{a}{\sqrt{b+2c}}\right)^2\ge\frac{\left(\sum a\right)^3}{\sum a(b+2c)}=\frac{\left(\sum a\right)^3}{3\sum bc}\ge\frac{\left(\sum a\right)^3}{\left(\sum a\right)^2}\ge\sum a\Rightarrow\left(\sum\frac{a}{\sqrt{b+2c}}\right)^2\ge\sum a\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sum\frac{a}{\sqrt{b+2c}}\ge\sqrt{\sum a}\,.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

2) If $a,b,c>0$ and $\lambda\ge 0$ then

$$\sum\frac{a}{\sqrt{b+\lambda c}}\ge\sqrt{\frac{3(a+b+c)}{\lambda+1}}\,.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Hőlder obținem:

$$\sum\frac{a}{\sqrt{b+\lambda c}}\sum\frac{a}{\sqrt{b+\lambda c}}\sum a(b+\lambda c)\overset{Holder}{\ge}\left(\sum a\right)^3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\sum\frac{a}{\sqrt{b+\lambda c}}\right)^2\ge\frac{\left(\sum a\right)^3}{\sum a(b+\lambda c)}=\frac{\left(\sum a\right)^3}{(\lambda+1)\sum bc}\ge\frac{\left(\sum a\right)^3}{(\lambda+1)\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2}\ge\frac{3}{\lambda+1}\sum a\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\sum\frac{a}{\sqrt{b+2c}}\right)^2\ge\frac{3}{\lambda+1}\sum a\Rightarrow\sum\frac{a}{\sqrt{b+\lambda c}}\ge\sqrt{\frac{3\sum a}{\lambda+1}}\,.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Aplicația14.

1) If $a,b,c>0$ such that $\frac{ab}{1+bc}+\frac{bc}{1+ca}+\frac{ca}{1+ab}=1$ then

$$\frac{1}{a^6}+\frac{1}{b^6}+\frac{1}{c^6}\ge 24\,.$$

Boris Colakovic, Mathematical Inequalities 7/2021

Soluție.

Lema

2) If $a,b,c>0$ such that $\frac{ab}{1+bc}+\frac{bc}{1+ca}+\frac{ca}{1+ab}=1$ then

$$ab+bc+ca\le\frac{3}{2}\,.$$

Demonstrație.

$$1=\sum\frac{ab}{1+bc}=\sum\frac{(ab)^2}{ab(1+bc)}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum ab\right)^2}{\sum ab+abc\sum a}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum ab\right)^2}{\sum ab+\frac{1}{3}\left(\sum ab\right)^2}=\frac{3\sum ab}{3+\sum ab}.$$

Din $1\geq\frac{3\sum ab}{3+\sum ab}\Leftrightarrow\sum bc\leq\frac{3}{2}$, cu egalitate pentru $a=b=c$.

Folosind inegalitatea lui Hőlder și **Lema** obținem:

$$Ms=\sum\frac{1}{a^6}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum\frac{1}{a^2}\right)^3}{9}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum\frac{1}{bc}\right)^3}{9}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\frac{9}{\sum bc}\right)^3}{9}\overset{Lema}{\geq}\frac{\left(\frac{9}{3/2}\right)^3}{9}=\frac{1}{9}\cdot 6^2=24=Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3) If $a,b,c>0$ such that $\frac{ab}{\lambda+bc}+\frac{bc}{\lambda+ca}+\frac{ca}{\lambda+ab}=\frac{3}{2\lambda+1}$ and $\lambda>0$ then

$$\frac{1}{a^6}+\frac{1}{b^6}+\frac{1}{c^6}\geq 24.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema

4) If $a,b,c>0$ such that $\frac{ab}{\lambda+bc}+\frac{bc}{\lambda+ca}+\frac{ca}{\lambda+ab}=\frac{3}{2\lambda+1}$ and $\lambda>0$ then

$$ab+bc+ca\leq\frac{3}{2}.$$

Demonstrație.

Folosind inegalitatea lui Bergstrőm obținem:

$$\frac{3}{2\lambda+1}=\sum\frac{ab}{\lambda+bc}=\sum\frac{(ab)^2}{ab(\lambda+bc)}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum ab\right)^2}{\lambda\sum ab+abc\sum a}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum ab\right)^2}{\lambda\sum ab+\frac{1}{3}\left(\sum ab\right)^2}=\frac{3\sum ab}{3\lambda+\sum ab}.$$

Din $\frac{3}{2\lambda+1}\geq\frac{3\sum ab}{3\lambda+\sum ab}\Leftrightarrow\sum bc\leq\frac{3}{2}$, cu egalitate pentru $a=b=c$.

Folosind inegalitatea lui Hőlder și **Lema** obținem:

$$Ms=\sum\frac{1}{a^6}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum\frac{1}{a^2}\right)^3}{9}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum\frac{1}{bc}\right)^3}{9}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\frac{9}{\sum bc}\right)^3}{9}\overset{Lema}{\geq}\frac{\left(\frac{9}{3/2}\right)^3}{9}=\frac{1}{9}\cdot 6^2=24=Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

5) If $a,b,c>0$ such that $\dfrac{ab}{\lambda+bc}+\dfrac{bc}{\lambda+ca}+\dfrac{ca}{\lambda+ab}=\dfrac{3}{2\lambda+1}$ and $\lambda>0$, $n\in\mathbf{N}$ then

$$\frac{1}{a^{2n}}+\frac{1}{b^{2n}}+\frac{1}{c^{2n}}\ge 3\cdot 2^n.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n=0$ se obține 3=3.

În continuare vom considera $n\in\mathbf{N}^*$

Lema

6) If $a,b,c>0$ such that $\dfrac{ab}{\lambda+bc}+\dfrac{bc}{\lambda+ca}+\dfrac{ca}{\lambda+ab}=\dfrac{3}{2\lambda+1}$ and $\lambda>0$ then

$$ab+bc+ca\le\frac{3}{2}.$$

Demonstrație.

Folosind inegalitatea lui Bergstrőm obținem:

$$\frac{3}{2\lambda+1}=\sum\frac{ab}{\lambda+bc}=\sum\frac{(ab)^2}{ab(\lambda+bc)}\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\sum ab\right)^2}{\lambda\sum ab+abc\sum a}\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\sum ab\right)^2}{\lambda\sum ab+\frac{1}{3}\left(\sum ab\right)^2}=\frac{3\sum ab}{3\lambda+\sum ab}.$$

Din $\dfrac{3}{2\lambda+1}\ge\dfrac{3\sum ab}{3\lambda+\sum ab}\Leftrightarrow\sum bc\le\dfrac{3}{2}$, cu egalitate pentru $a=b=c$.

Folosind inegalitatea lui Hőlder și **Lema** obținem:

$$Ms=\sum\frac{1}{a^{2n}}\overset{Holder}{\ge}\frac{\left(\sum\frac{1}{a^2}\right)^n}{3^{n-1}}\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\sum\frac{1}{bc}\right)^n}{3^{n-1}}\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\frac{9}{\sum bc}\right)^n}{3^{n-1}}\overset{Lema}{\ge}\frac{\left(\frac{9}{3/2}\right)^n}{3^{n-1}}=\frac{1}{3^{n-1}}\cdot 6^n=3\cdot 2^n=Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Aplicația15.

If $a,b,c>0$ and $abc=1$ prove that

1. $$\sum\sqrt{\frac{a+b}{a+c}}\ge a+b+c.$$

2. $\sqrt[3]{\dfrac{a+b}{a+c}} \geq a+b+c$.

Nguyen Van Canh, Vietnam,RMM7/2021

Soluție.

Lema.

If $a,b,c>0$ and $abc=1$ then

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}.$$

Demonstrație.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$.

Avem $p\geq 3, q\geq 3, r=1, q\leq \dfrac{p^2}{3}$.

Inegaitatea $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a} \leq \dfrac{a+b+c}{2}$ se scrie $2p^2+2q+p\leq p^2q$, care rezultă din:

$$2p^2+2q+p\leq 2p^2+2\cdot\frac{p^2}{3}+p\cdot\frac{p}{3}=3p^2\leq qp^2.$$

Folosind **Lema** obținem:

1. $\displaystyle\sum\sqrt{\frac{a+b}{a+c}} \overset{CBS}{\leq} \sqrt{\sum(a+b)\sum\frac{1}{a+c}} \overset{Lema}{\leq} \sqrt{2\sum a\cdot\frac{\sum a}{2}}=\sum a$.

   Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

2. $\displaystyle\sum\sqrt[3]{\frac{a+b}{a+c}}=\sum\sqrt[3]{1\cdot\frac{a+b}{a+c}} \overset{Holder}{\leq} \sqrt[3]{\sum 1\cdot\sum(a+b)\sum\frac{1}{a+c}} \overset{Lema}{\leq}$

   $\displaystyle\overset{Lema}{\leq} \sqrt[3]{3\cdot 2\sum a\cdot\frac{\sum a}{2}} \overset{\sum a\geq 3}{\leq} \sqrt[3]{\sum a\cdot 2\sum a\cdot\frac{\sum a}{2}}=\sum a$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $n\in\mathbf{N}, n\geq 2$ then

$$\sum\sqrt[n]{\frac{a+b}{a+c}} \geq a+b+c.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $a,b,c>0$ and $abc=1$ then

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\leq\frac{a+b+c}{2}.$$

Demonstrație.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$.

Avem $p\geq 3, q\geq 3, r=1, q\leq\frac{p^2}{3}$.

Inegalitatea $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\leq\frac{a+b+c}{2}$ se scrie $2p^2+2q+p\leq p^2q$, care rezultă din:

$$2p^2+2q+p\leq 2p^2+2\cdot\frac{p^2}{3}+p\cdot\frac{p}{3}=3p^2\leq qp^2.$$

Folosind **Lema** de mai sus obținem:

$$Ms=\sum\sqrt[n]{\frac{a+b}{a+c}}=\sum\sqrt[n]{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1\cdot\frac{a+b}{a+c}}\overset{Holder}{\leq}\sqrt[n]{\sum 1\cdot\ldots\cdot 1\cdot\sum(a+b)\sum\frac{1}{a+c}}\overset{Lema}{\leq}$$

$$\overset{Lema}{\leq}n\sqrt[n]{3\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\sum a\cdot\frac{\sum a}{2}}\overset{\sum a\geq 3}{\leq}n\sqrt[n]{\sum a\cdot\ldots\cdot\sum a\cdot 2\sum a\cdot\frac{\sum a}{2}}=\sum a=Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația16.

1) If $a,b,c>0$ such that $ab+bc+ca=3$ then

$$\sqrt[3]{\left(a^3+\frac{2}{3}\right)\left(b^3+\frac{2}{3}\right)\left(c^3+\frac{2}{3}\right)}\geq\frac{5}{3}.$$

George Apostolopoulos, Greece

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Hőlder și $\sum ab=3$ obținem:

$$Ms=\sqrt[3]{\left(\frac{a^3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{a^3}{2}+\frac{1}{6}\right)\left(\frac{b^3}{2}+\frac{b^3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{c^3}{2}+\frac{c^3}{2}+\frac{1}{6}\right)}\overset{Holder}{\geq}$$

$$\overset{Holder}{\geq}\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{\frac{a^3}{2}\cdot\frac{b^3}{2}\cdot\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot\frac{b^3}{2}\cdot\frac{c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{a^3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}}\right)^3}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{a^3}{2}\cdot\frac{b^3}{2}\cdot\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot\frac{b^3}{2}\cdot\frac{c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{a^3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}}=\frac{ab}{2}+\frac{bc}{2}+\frac{ca}{2}+\frac{1}{6}=\frac{3}{2}+\frac{1}{6}=\frac{5}{3}=Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

2) If $a,b,c>0$ such that $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)=16$ then

$$\sqrt[4]{(a^4+1)(b^4+1)(c^4+1)(d^4+1)}\geq 2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Hőlder și $\prod(a+1)=16$ obținem:

$$Ms=\sqrt[4]{(a^4+1)(b^4+1)(c^4+1)(d^4+1)}\overset{Holder}{\geq}\sqrt[4]{\frac{(a+1)^4}{8}\cdot\frac{(b+1)^4}{8}\cdot\frac{(c+1)^4}{8}\cdot\frac{(d+1)^4}{8}}=$$

$$=\frac{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)}{8}=\frac{16}{8}=2.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=1$.

3) If $a_1,a_2,...,a_n>0$ such that $(a_1+1)(a_2+1)...(a_n+1)=2^n, n\in\mathbf{N}, n\geq 2$ then

$$\sqrt[n]{(a_1^n+1)(a_2^n+1)...(a_n^n+1)}\geq 2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Hőlder și $\prod(a_1+1)=2^n$ obținem:

$$Ms=\sqrt[n]{(a_1^n+1)(a_2^n+1)...(a_n^n+1)}\overset{Holder}{\geq}\sqrt[n]{\frac{(a_1+1)^n}{2^{n-1}}\cdot\frac{(a_2+1)^n}{2^{n-1}}\cdot...\cdot\frac{(a_n+1)^n}{2^{n-1}}}=$$

$$=\frac{(a_1+1)(a_2+1)...(a_n+1)}{2^{n-1}}=\frac{2^n}{2^{n-1}}=2.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1=a_2=...=a_n=1$.

4) If $a,b,c>0$ such that $ab+bc+ca=3$ then

$$\sqrt[3]{(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)}\geq 2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Hőlder și $\sum ab=3$ obținem:

$$Ms=\sqrt[3]{\left(\frac{a^3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{a^3}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{b^3}{2}+\frac{b^3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{c^3}{2}+\frac{c^3}{2}+\frac{1}{2}\right)}\overset{Holder}{\geq}$$

$$\overset{Holder}{\geq}\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{\frac{a^3}{2}\cdot\frac{b^3}{2}\cdot\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot\frac{b^3}{2}\cdot\frac{c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{a^3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\right)^3}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{a^3}{2}\cdot\frac{b^3}{2}\cdot\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot\frac{b^3}{2}\cdot\frac{c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{a^3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{ab}{2}+\frac{bc}{2}+\frac{ca}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2=Md\,.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

5) If $a,b,c>0$ such that $ab+bc+ca=3$ then

$$\sqrt[3]{\left(a^3+\frac{4}{3}\right)\left(b^3+\frac{4}{3}\right)\left(c^3+\frac{4}{3}\right)}\geq\frac{5}{3}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Hőlder și $\sum ab=3$ obținem:

$$Ms=\sqrt[3]{\left(\frac{a^3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{a^3}{2}+\frac{5}{6}\right)\left(\frac{b^3}{2}+\frac{b^3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{c^3}{2}+\frac{c^3}{2}+\frac{5}{6}\right)}\overset{Holder}{\geq}$$

$$\overset{Holder}{\geq}\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{\frac{a^3}{2}\cdot\frac{b^3}{2}\cdot\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot\frac{b^3}{2}\cdot\frac{c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{a^3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}}\right)^3}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{a^3}{2}\cdot\frac{b^3}{2}\cdot\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot\frac{b^3}{2}\cdot\frac{c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{a^3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}}=\frac{ab}{2}+\frac{bc}{2}+\frac{ca}{2}+\frac{5}{6}=\frac{3}{2}+\frac{5}{6}=\frac{7}{3}=Md\,.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

6) If $a,b,c>0$ such that $ab+bc+ca=3$ and $\lambda\geq\frac{3}{2}$ then

$$\sqrt[3]{\left(a^3+\frac{\lambda}{3}\right)\left(b^3+\frac{\lambda}{3}\right)\left(c^3+\frac{\lambda}{3}\right)}\geq 1+\frac{\lambda}{3}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Hőlder și $\sum ab=3$ obținem:

$$Ms=\sqrt[3]{\left(\frac{a^3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{a^3}{2}+\frac{2\lambda-3}{6}\right)\left(\frac{b^3}{2}+\frac{b^3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2\lambda-3}{6}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{c^3}{2}+\frac{c^3}{2}+\frac{2\lambda-3}{6}\right)}\overset{Holder}{\geq}$$

$$\overset{Holder}{\geq} \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{\frac{a^3}{2}\cdot\frac{b^3}{2}\cdot\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot\frac{b^3}{2}\cdot\frac{c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{a^3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{2\lambda-3}{6}\cdot\frac{2\lambda-3}{6}\cdot\frac{2\lambda-3}{6}}\right)^3}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{a^3}{2}\cdot\frac{b^3}{2}\cdot\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot\frac{b^3}{2}\cdot\frac{c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{a^3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{2\lambda-3}{6}\cdot\frac{2\lambda-3}{6}\cdot\frac{2\lambda-3}{6}}=\frac{ab}{2}+\frac{bc}{2}+\frac{ca}{2}+\frac{2\lambda-3}{6}=$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{2\lambda-3}{6}=\frac{\lambda+3}{3}=Md\,.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

7) If $a,b,c>0$ such that $ab+bc+ca=3$ and $\lambda\geq\frac{1}{2}$ then

$$\sqrt[3]{\left(a^3+\lambda\right)\left(b^3+\lambda\right)\left(c^3+\lambda\right)}\geq\lambda+1.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Hőlder și $\sum ab=3$ obținem:

$$Ms=\sqrt[3]{\left(\frac{a^3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{a^3}{2}+\frac{2\lambda-1}{2}\right)\left(\frac{b^3}{2}+\frac{b^3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2\lambda-1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{c^3}{2}+\frac{c^3}{2}+\frac{2\lambda-1}{2}\right)}\overset{Holder}{\geq}$$

$$\overset{Holder}{\geq}\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{\frac{a^3}{2}\cdot\frac{b^3}{2}\cdot\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot\frac{b^3}{2}\cdot\frac{c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{a^3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{2\lambda-1}{2}\cdot\frac{2\lambda-1}{2}\cdot\frac{2\lambda-1}{2}}\right)^3}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{a^3}{2}\cdot\frac{b^3}{2}\cdot\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot\frac{b^3}{2}\cdot\frac{c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{a^3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{2\lambda-1}{2}\cdot\frac{2\lambda-1}{2}\cdot\frac{2\lambda-1}{2}}=\frac{ab}{2}+\frac{bc}{2}+\frac{ca}{2}+\frac{2\lambda-1}{2}=$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{2\lambda-1}{2}=\frac{2\lambda+2}{2}=\lambda+1=Md\,.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația17.

1) If $a,b,c,d>0$ then

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{cd}+\frac{c^3}{da}+\frac{d^3}{ab}\geq a+b+c+d\,.$$

Dorin Marghidanu, Mathematical Inequalities9/2021

Soluție.

Folosind inegalitatea lui **Hőder** obținem:

$$Ms=\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{cd}+\frac{c^3}{da}+\frac{d^3}{ab}\overset{Holder}{\geq}\frac{(a+b+c+d)^3}{4(bc+cd+da+ab)}\overset{(1)}{\geq}a+b+c+d=Md\ ,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \dfrac{(a+b+c+d)^3}{4(bc+cd+da+ab)}\geq a+b+c+d \Leftrightarrow (a+b+c+d)^2\geq 4(bc+cd+da+ab) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-b+c-d)^2\geq 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d$.

2) If $a,b,c>0$ then

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\geq a+b+c\,.$$

***

Soluție.

Folosind inegalitatea lui **Hőder** obținem:

$$Ms=\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\overset{Holder}{\geq}\frac{(a+b+c)^3}{3(bc+ca+ab)}\overset{(1)}{\geq}a+b+c=Md\ ,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \dfrac{(a+b+c)^3}{3(bc+ca+ab)}\geq a+b+c \Leftrightarrow (a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca) \Leftrightarrow \sum(a-b)^2\geq 0$,

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Aplicația18.

1) If $x,y,z>0$ such that $x+y+z=3$ then

$$x^3+y^3+z^3+xyz\geq 4.$$

Imad Zak, Lebanon, Mathematical Inequalities, 9/2021

Soluție.

Lema1

If $x,y,z>0$ such that $x+y+z=3$ then

$$x^3+y^3+z^3\geq x^2+y^2+z^2\,.$$

Demonstrație.

Avem $x^3+y^3+z^3\overset{Chebyshev}{\geq}\dfrac{1}{3}\sum x\sum x^2=\dfrac{1}{3}\cdot 3\sum x^2=x^2+y^2+z^2$.

Lema2

If $x,y,z>0$ such that $x+y+z=3$ then

$$x^2+y^2+z^2+xyz\geq 4.$$

Demonstrație.

Omogenizând avem: $x^2+y^2+z^2+xyz\geq 4 \Leftrightarrow \ \Leftrightarrow$

$\frac{1}{3}(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)+xyz\geq \frac{4}{27}(x+y+z)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)+27xyz\geq 4(x+y+z)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9\sum x^3+9\sum yz(y+z)+27xyz\geq 4\sum x^3+12\sum yz(y+z)+24xyz \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\sum x^3+3xyz\geq 3\sum yz(y+z)$, care rezultă din adunarea inegalităților:

$\sum x^3+3xyz\geq \sum yz(y+z)$,(1) și $4\sum x^3\geq 2\sum yz(y+z)$,(2).

Inegalitatea (1) este Schur pentru $r=1$, iar inegalitatea (2)rezultă din $x^3+y^3\geq xy(x+y)$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Soluție2.

Omogenizând avem: $x^3+y^3+z^3+xyz\geq 4 \Leftrightarrow \ \Leftrightarrow x^3+y^3+z^3+xyz\geq \frac{4}{27}(x+y+z)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 27(x^3+y^3+z^3)+27xyz\geq 4(x+y+z)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 27(x^3+y^3+z^3)+27xyz\geq 4\left[\sum x^3+3\prod(y+z)\right]$

$27(x^3+y^3+z^3)+27xyz\geq 4\left[\sum x^3+3\left(2xyz+\sum yz(y+z)\right)\right]$

$27\sum x^3+27xyz\geq 4\sum x^3+12\sum yz(y+z)+24xyz$

$\Leftrightarrow 23\sum x^3+3xyz\geq 12\sum yz(y+z)$, care rezultă din adunarea inegalităților:

$\sum x^3+3xyz\geq \sum yz(y+z)$,(1) și $22\sum x^3\geq 11\sum yz(y+z)$,(2).

Inegalitatea (1) este Schur pentru $r=1$, iar inegalitatea (2)rezultă din $x^3+y^3\geq xy(x+y)$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

2) If $x,y,z>0$ such that $x+y+z=3$ and $\frac{6}{7}\leq\lambda\leq\frac{3}{2}$ then

$$x^3+y^3+z^3+\lambda xyz\geq \lambda+3.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema1

If $x, y, z > 0$ such that $x + y + z = 3$ then

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2 + y^2 + z^2 .$$

Demonstrație.

Avem $x^3 + y^3 + z^3 \overset{Chebyshev}{\geq} \frac{1}{3}\sum x \sum x^2 = \frac{1}{3} \cdot 3\sum x^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Lema2

If $x, y, z > 0$ such that $x + y + z = 3$ then

$$x^2 + y^2 + z^2 + \lambda xyz \geq \lambda + 3 .$$

Demonstrație.

Omogenizând avem: $x^2 + y^2 + z^2 + \lambda xyz \geq \lambda + 3 \Leftrightarrow \Leftrightarrow$

$\frac{1}{3}(x+y+z)(x^2+y^2+z^2) + \lambda xyz \geq \frac{\lambda+3}{27}(x+y+z)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9(x+y+z)(x^2+y^2+z^2) + 27\lambda xyz \geq (\lambda+3)(x+y+z)^3 \Leftrightarrow$

$9\sum x^3 + 9\sum yz(y+z) + 27\lambda xyz \geq (\lambda+3)\left[\sum x^3 + 3\prod(y+z)\right]$

$9\sum x^3 + 9\sum yz(y+z) + 27\lambda xyz \geq (\lambda+3)\left[\sum x^3 + 3\left(2xyz + \sum yz(y+z)\right)\right]$

$\Leftrightarrow 9\sum x^3 + 9\sum yz(y+z) + 27\lambda xyz \geq (\lambda+3)\sum x^3 + (\lambda+3)\sum yz(y+z) + 6(\lambda+3)xyz \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (6-\lambda)\sum x^3 + 3(7\lambda-6)xyz \geq 3\lambda\sum yz(y+z)$, care rezultă din adunarea inegalităților:

$(7\lambda-6)\sum x^3 + 3(7\lambda-6)xyz \geq (7\lambda-6)\sum yz(y+z)$,(1) și
$4(3-2\lambda)\sum x^3 \geq 2(3-2\lambda)\sum yz(y+z)$,(2).

Inegalitatea (1) rezultă din inegalitatea lui Schur pentru $r = 1$ și $(7\lambda-6) \geq 0$, iar inegalitatea (2)rezultă din $x^3 + y^3 \geq xy(x+y) \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ și $(3-2\lambda) \geq 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 1$.

3) If $x, y, z > 0$ such that $x + y + z = 3$ and $\frac{6}{7} \leq \lambda \leq \frac{3}{2}, n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ then

$$x^n + y^n + z^n + \lambda xyz \geq \lambda + 3 .$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema1

If $x, y, z > 0$ such that $x + y + z = 3$ and $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ then

$$x^n + y^n + z^n \geq x^2 + y^2 + z^2 .$$

Demonstrație.

Avem $x^n + y^n + z^n \overset{Chebyshev}{\geq} \frac{1}{3}\sum x^{n-2}\sum x^2 \overset{Holder}{\geq} \frac{1}{3}\cdot\frac{\left(\sum x\right)^{n-2}}{3^{n-3}}\sum x^2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{3^{n-2}}{3^{n-3}}\sum x^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Lema2

If $x, y, z > 0$ such that $x + y + z = 3$ then

$$x^2 + y^2 + z^2 + \lambda xyz \geq \lambda + 3 .$$

Demonstrație.

Omogenizând avem: $x^2 + y^2 + z^2 + \lambda xyz \geq \lambda + 3 \Leftrightarrow \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{3}(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right)+\lambda xyz \geq \frac{\lambda+3}{27}(x+y+z)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right)+27\lambda xyz \geq (\lambda+3)(x+y+z)^3 \Leftrightarrow$$

$$9\sum x^3+9\sum yz(y+z)+27\lambda xyz \geq (\lambda+3)\left[\sum x^3+3\prod(y+z)\right]$$

$$9\sum x^3+9\sum yz(y+z)+27\lambda xyz \geq (\lambda+3)\left[\sum x^3+3\left(2xyz+\sum yz(y+z)\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow 9\sum x^3+9\sum yz(y+z)+27\lambda xyz \geq (\lambda+3)\sum x^3+(\lambda+3)\sum yz(y+z)+6(\lambda+3)xyz \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (6-\lambda)\sum x^3+3(7\lambda-6)xyz \geq 3\lambda\sum yz(y+z)$, care rezultă din adunarea inegalităților:

$(7\lambda-6)\sum x^3+3(7\lambda-6)xyz \geq (7\lambda-6)\sum yz(y+z)$,(1) și
$4(3-2\lambda)\sum x^3 \geq 2(3-2\lambda)\sum yz(y+z)$,(2).

Inegalitatea (1) rezultă din inegalitatea lui Schur pentru $r=1$ și $(7\lambda-6)\geq 0$, iar inegalitatea (2)rezultă din $x^3+y^3 \geq xy(x+y) \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ și $(3-2\lambda)\geq 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 1$.

4) If $x, y, z > 0$ such that $x + y + z = 3$ and $0 \leq \lambda \leq \frac{3}{2}$, $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ then

$$x^n + y^n + z^n + \lambda xyz \geq \lambda + 3 .$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema1

If $x, y, z > 0$ such that $x + y + z = 3$ and $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ then

$$x^n + y^n + z^n \geq x^2 + y^2 + z^2 .$$

Demonstrație.

Avem $x^n + y^n + z^n \overset{Chebyshev}{\geq} \frac{1}{3}\sum x^{n-2}\sum x^2 \overset{Holder}{\geq} \frac{1}{3}\cdot\frac{\left(\sum x\right)^{n-2}}{3^{n-3}}\sum x^2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{3^{n-2}}{3^{n-3}}\sum x^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Lema2

If $x, y, z > 0$ such that $x + y + z = 3$ then

$$xyz \geq \frac{4(xy + yz + zx) - 9}{3}.$$

Demonstrație.

Notăm $p = x + y + z = 3, q = xy + yz + zx \leq \frac{p^2}{3} = 3, r = xyz$.

Folosind inegalitatea lui Schur $p^3 + 9r \geq 4qr$ rezultă $r \geq \frac{4q - 9}{3}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 1$.

Folosind cele două **Leme** de mai sus obținem:

$$Ms = x^n + y^n + z^n + \lambda xyz \underset{Lema2}{\overset{Lema1}{\geq}} x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\frac{4(xy + yz + zx) - 9}{3} \overset{(1)}{\geq} \lambda + 3 = Md,$$

unde (1) $\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\frac{4(xy + yz + zx) - 9}{3} \geq \lambda + 3 \Leftrightarrow$

$3\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + 4\lambda\left(xy + yz + zx\right) \geq 12\lambda + 9$, care rezultă din pqr -Method.

Avem $p = x + y + z = 3, q = xy + yz + zx \leq \frac{p^2}{3} = 3, r = xyz$.

Ultima inegalitate se scrie:

$$3(9 - 2q) + 4\lambda q \geq 12\lambda + 9 \Leftrightarrow 9 - 3q + 2\lambda q - 6\lambda \geq 0 \Leftrightarrow (3 - q)(3 - 2\lambda) \geq 0,$$

care rezultă din $q \leq 3$ și $\lambda \leq \frac{3}{2}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 1$.

Aplicația19

1) If $x, y, z > 0$ then

$$\sum\left(\frac{x^2-xy+y^2}{\sqrt{x+y}}\right)\geq\frac{3}{2}xyz.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, RMM 11/2021

Soluție.

Lema

If $x,y,z>0$ then

$$\frac{x^2-xy+y^2}{\sqrt{x+y}}\geq\frac{1}{4}(x+y)^{\frac{3}{2}}.$$

Demonstrație.

Avem $\frac{x^2-xy+y^2}{\sqrt{x+y}}\overset{(1)}{\geq}\frac{1}{4\sqrt{x+y}}(x+y)^2=\frac{1}{4}(x+y)^{\frac{3}{2}}$,

unde (1) $\Leftrightarrow 4\left(x^2+\lambda xy+y^2\right)\geq(x+y)^2\Leftrightarrow 3(x-y)^2\geq 0$, cu egalitate pentru $x=y$.

$$Ms=\sum\left(\frac{x^2-xy+y^2}{\sqrt{x+y}}\right)^2\overset{Lema}{\geq}\sum\left(\frac{1}{4}(x+y)^{\frac{3}{2}}\right)^2=\frac{1}{16}\sum(x+y)^3\overset{Holder}{\geq}\frac{1}{16}\frac{\left[\sum(x+y)\right]^3}{9}=$$
$$=\frac{1}{16}\frac{\left(2\sum x\right)^3}{9}=\frac{\left(\sum x\right)^3}{18}\overset{AGM}{\geq}\frac{\left(3\sqrt[3]{xyz}\right)^3}{18}=\frac{27xyz}{18}=\frac{3}{2}xyz=Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z$.

2) If $x,y,z>0$ and $-2\leq\lambda\leq 2$ then

$$\sum\left(\frac{x^2+\lambda xy+y^2}{\sqrt{x+y}}\right)\geq\frac{3}{2}(\lambda+2)^2xyz.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema

If $x,y,z>0$ and $-2\leq\lambda\leq 2$ then

$$\frac{x^2+\lambda xy+y^2}{\sqrt{x+y}}\geq\frac{\lambda+2}{4}(x+y)^{\frac{3}{2}}.$$

Demonstrație.

Avem $\frac{x^2+\lambda xy+y^2}{\sqrt{x+y}}\overset{(1)}{\geq}\frac{\lambda+2}{4\sqrt{x+y}}(x+y)^2=\frac{\lambda+2}{4}(x+y)^{\frac{3}{2}}$, unde (1) $\Leftrightarrow 4\left(x^2+\lambda xy+y^2\right)\geq(\lambda+2)(x+y)^2 \Leftrightarrow (2-\lambda)(x-y)^2\geq 0$, care resultă din condiția din ipoteză $-2\leq\lambda\leq 2$, cu egalitate pentru $x=y$.

$$Ms=\sum\left(\frac{x^2+\lambda xy+y^2}{\sqrt{x+y}}\right)^2\overset{Lema}{\geq}\sum\left(\frac{\lambda+2}{4}(x+y)^{\frac{3}{2}}\right)^2=\frac{(\lambda+2)^2}{16}\sum(x+y)^3\overset{Holder}{\geq}\frac{(\lambda+2)^2}{16}\frac{\left[\sum(x+y)\right]^3}{9}=$$

$$=\frac{(\lambda+2)^2}{16}\frac{\left(2\sum x\right)^3}{9}=\frac{(\lambda+2)^2\left(\sum x\right)^3}{18}\overset{AGM}{\geq}\frac{(\lambda+2)^2\left(3\sqrt[3]{xyz}\right)^3}{18}=\frac{(\lambda+2)^2\cdot 27xyz}{18}=$$

$$=\frac{3}{2}(\lambda+2)^2 xyz=Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z$.

Aplicația20

1) If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2=26(a+b+c)$ then

$$\frac{1}{\sqrt{a+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c+a^2}}\geq\frac{1}{\sqrt{a+b+c}}.$$

Daniel Sitaru,RMM12/2021

Soluție

Folosind inegalitatea lui Hőlder obținem:

$$\sum\frac{1}{\sqrt{a+b^2}}\sum\frac{1}{\sqrt{a+b^2}}\sum\left(a+b^2\right)\geq\left(\sum 1\right)^3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow M^2s=\left(\sum\frac{1}{\sqrt{a+b^2}}\right)^2\geq\frac{27}{\sum\left(a+b^2\right)}\overset{(1)}{\geq}\frac{1}{\sum a}=M^2d,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{27}{\sum\left(a+b^2\right)}\geq\frac{1}{\sum a}\Leftrightarrow 27\sum a\geq\sum\left(a+b^2\right)\Leftrightarrow 26\sum a\geq\sum b^2$, care rezultă din condiția din ipoteză $a^2+b^2+c^2=26(a+b+c)$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=26$.

2) If $a,b,c,\lambda>0$, $a^2+b^2+c^2=\lambda(a+b+c)$ then

$$\frac{1}{\sqrt{a+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c+a^2}}\geq\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{(\lambda+1)(a+b+c)}}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Folosind inegalitatea lui Hőlder obținem:

$$\sum\frac{1}{\sqrt{a+b^2}}\sum\frac{1}{\sqrt{a+b^2}}\sum\left(a+b^2\right)\geq\left(\sum 1\right)^3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow M^2s=\left(\sum\frac{1}{\sqrt{a+b^2}}\right)^2\geq\frac{27}{\sum\left(a+b^2\right)}\overset{(1)}{\geq}\frac{27}{(\lambda+1)\sum a}=M^2d\,,$$

unde (1) $\Leftrightarrow\dfrac{27}{\sum\left(a+b^2\right)}\geq\dfrac{27}{(\lambda+1)\sum a}\Leftrightarrow(\lambda+1)\sum a\geq\sum\left(a+b^2\right)\Leftrightarrow\lambda\sum a\geq\sum b^2$,

care rezultă din condiția din ipoteză $a^2+b^2+c^2=\lambda(a+b+c)$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\lambda$.

Aplicația21

1) If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\sum\sqrt{\frac{a}{a+6b+2bc}}\geq 1.$$

Phan Ngoc Chau, Vietnam, RMM 12/2021

Soluție.

Decondiționăm inegalitatea cu substituția $a=\dfrac{x}{y},b=\dfrac{y}{z},c=\dfrac{z}{x}$. Inegalitatea se scrie:

$$\sum\sqrt{\frac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}+6\frac{z}{y}+2\frac{z}{y}\frac{x}{z}}}\geq 1\Leftrightarrow\sum\sqrt{\frac{y^2}{y^2+6xz+2z^2}}\geq 1\Leftrightarrow\sum\sqrt{\frac{x^2}{x^2+6yz+2y^2}}\geq 1\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\sum\dfrac{x}{\sqrt{x^2+6yz+2y^2}}\geq 1$, care rezultă din inegalitatea lui Holder:

$$\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+6yz+2y^2}}\cdot\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+6yz+2y^2}}\cdot\sum x\left(x^2+6yz+2y^2\right)\overset{Holder}{\geq}\left(\sum x\right)^3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+6yz+2y^2}}\right)^2\geq\frac{\left(\sum x\right)^3}{\sum x\left(x^2+6yz+2y^2\right)}.$$

$$M^2s=\left(\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+6yz+2y^2}}\right)^2\geq\frac{\left(\sum x\right)^3}{\sum x\left(x^2+6yz+2y^2\right)}\overset{(1)}{\geq}1=M^2s\,,$$

unde (1) $\Leftrightarrow\dfrac{\left(\sum x\right)^3}{\sum x\left(x^2+6yz+2y^2\right)}\geq 1\Leftrightarrow\left(\sum x\right)^3\geq\sum x\left(x^2+6yz+2y^2\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sum x^3+3\prod(y+z)\geq \sum x^3+18xyz+2\sum xy^2 \Leftrightarrow 3\prod(y+z)\geq 18xyz+2\sum xy^2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 3\left(2xyz+\sum xy^2+\sum x^2y\right)\geq 18xyz+2\sum xy^2 \Leftrightarrow \sum xy^2+3x^2y\geq 12xyz$, care rezultă din :

$$\sum xy^2+3x^2y\geq 3\sqrt[3]{\prod xy^2}+3\cdot 3\sqrt[3]{\prod xy^2}=3xyz+9xyz=12xyz.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z \Leftrightarrow a=b=c=1$.

2) If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $n\geq 2$, $0\leq k\leq 3$, $n+k=8$ then

$$\sum\sqrt{\frac{a}{a+nb+kbc}}\geq 1.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Decondiționăm inegalitatea cu substituția $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$. Inegalitatea se scrie:

$$\sum\sqrt{\frac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}+n\frac{z}{y}+k\frac{z}{y}\frac{x}{z}}}\geq 1 \Leftrightarrow \sum\sqrt{\frac{y^2}{y^2+nxz+kz^2}}\geq 1 \Leftrightarrow \sum\sqrt{\frac{x^2}{x^2+nyz+ky^2}}\geq 1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sum\frac{x}{\sqrt{x^2+nyz+ky^2}}\geq 1$, care rezultă din inegalitatea lui Holder:

$$\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+nyz+ky^2}}\cdot\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+nyz+ky^2}}\cdot\sum x\left(x^2+nyz+ky^2\right)\overset{Holder}{\geq}\left(\sum x\right)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+nyz+ky^2}}\right)^2\geq\frac{\left(\sum x\right)^3}{\sum x\left(x^2+nyz+ky^2\right)}.$$

$$M^2s=\left(\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+nyz+ky^2}}\right)^2\geq\frac{\left(\sum x\right)^3}{\sum x\left(x^2+nyz+ky^2\right)}\overset{(1)}{\geq}1=M^2s,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{\left(\sum x\right)^3}{\sum x\left(x^2+nyz+ky^2\right)}\geq 1 \Leftrightarrow \left(\sum x\right)^3\geq\sum x\left(x^2+nyz+ky^2\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sum x^3+3\prod(y+z)\geq\sum x^3+3nxyz+k\sum xy^2 \Leftrightarrow 3\prod(y+z)\geq 3nxyz+k\sum xy^2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 3\left(2xyz+\sum xy^2+\sum x^2y\right)\geq 3nxyz+k\sum xy^2 \Leftrightarrow (3-k)\sum xy^2+3x^2y\geq(3n-6)xyz$,vezi:

$$(3-k)\sum xy^2+3x^2y\overset{k\leq 3}{\geq}(3-k)\cdot 3\sqrt[3]{\prod xy^2}+3\cdot 3\sqrt[3]{\prod xy^2}=(9-3k)xyz+9xyz=$$

$=(18-3k)xyz \overset{n+k=8}{=} (3n-6)xyz$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z \Leftrightarrow a=b=c=1$.

3) If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $0\le\lambda\le 3$ then

$$\sum\sqrt{\frac{a}{a+(8-\lambda)b+\lambda bc}}\ge 1.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Decondiționăm inegalitatea cu substituția $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$. Inegalitatea se scrie:

$$\sum\sqrt{\frac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}+(8-\lambda)\frac{z}{y}+\lambda\frac{z}{y}\frac{x}{z}}}\ge 1 \Leftrightarrow \sum\sqrt{\frac{y^2}{y^2+(8-\lambda)xz+\lambda z^2}}\ge 1 \Leftrightarrow \sum\sqrt{\frac{x^2}{x^2+(8-\lambda)yz+\lambda y^2}}\ge 1$$

$\Leftrightarrow \sum\frac{x}{\sqrt{x^2+(8-\lambda)yz+\lambda y^2}}\ge 1$, vezi Holder:

$$\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+(8-\lambda)yz+\lambda y^2}}\cdot\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+(8-\lambda)yz+\lambda y^2}}\cdot\sum x\left(x^2+(8-\lambda)yz+\lambda y^2\right)\overset{Holder}{\ge}\left(\sum x\right)^3$$

$$\Leftrightarrow\left(\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+(8-\lambda)yz+\lambda y^2}}\right)^2\ge\frac{\left(\sum x\right)^3}{\sum x\left(x^2+(8-\lambda)yz+\lambda y^2\right)}.$$

$$M^2s=\left(\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+(8-\lambda)yz+\lambda y^2}}\right)^2\ge\frac{\left(\sum x\right)^3}{\sum x\left(x^2+(8-\lambda)yz+\lambda y^2\right)}\overset{(1)}{\ge}1=M^2s,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{\left(\sum x\right)^3}{\sum x\left(x^2+(8-\lambda)yz+\lambda y^2\right)}\ge 1 \Leftrightarrow \left(\sum x\right)^3\ge\sum x\left(x^2+(8-\lambda)yz+\lambda y^2\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\sum x^3+3\prod(y+z)\ge\sum x^3+3(8-\lambda)xyz+\lambda\sum xy^2 \Leftrightarrow 3\prod(y+z)\ge 3(8-\lambda)xyz+\lambda\sum xy^2$$

$\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3\left(2xyz+\sum xy^2+\sum x^2y\right)\ge 3(8-\lambda)xyz+\lambda\sum xy^2 \Leftrightarrow (3-\lambda)\sum xy^2+3x^2y\ge$$

$\ge(18-3\lambda)xyz$, care rezultă din inegalitatea mediilor:

$$(3-\lambda)\sum xy^2+3x^2y\overset{\lambda\le 3}{\ge}(3-\lambda)\cdot 3\sqrt[3]{\prod xy^2}+3\cdot 3\sqrt[3]{\prod xy^2}=(9-3\lambda)xyz+9xyz=$$

$=(18-3\lambda)xyz$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z \Leftrightarrow a=b=c=1$.

4) If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $n,k\geq 0$, $n+k\geq 8$, $n-2k+1\geq 0$ then

$$\sum\sqrt{\frac{a}{a+nb+kbc}}\geq\frac{3}{\sqrt{1+n+k}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Decondiționăm inegalitatea cu substituția $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$. Inegalitatea se scrie:

$$\sum\sqrt{\frac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}+n\frac{z}{y}+k\frac{z}{y}\frac{x}{z}}}\geq\frac{3}{\sqrt{1+n+k}}\Leftrightarrow\sum\sqrt{\frac{y^2}{y^2+nxz+kz^2}}\geq\frac{3}{\sqrt{1+n+k}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum\sqrt{\frac{x^2}{x^2+nyz+ky^2}}\geq\frac{3}{\sqrt{1+n+k}}\Leftrightarrow\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+nyz+ky^2}}\geq\frac{3}{\sqrt{1+n+k}}, \text{veziHolder:}$$

$$\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+nyz+ky^2}}\cdot\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+nyz+ky^2}}\cdot\sum x\left(x^2+nyz+ky^2\right)\overset{Holder}{\geq}\left(\sum x\right)^3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+nyz+ky^2}}\right)^2\geq\frac{\left(\sum x\right)^3}{\sum x\left(x^2+nyz+ky^2\right)}.$$

$$M^2s=\left(\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+nyz+ky^2}}\right)^2\geq\frac{\left(\sum x\right)^3}{\sum x\left(x^2+nyz+ky^2\right)}\overset{(1)}{\geq}\frac{9}{1+n+k}=M^2s,$$

unde (1) $\Leftrightarrow\frac{\left(\sum x\right)^3}{\sum x\left(x^2+nyz+ky^2\right)}\geq\frac{9}{1+n+k}\Leftrightarrow(1+n+k)\left(\sum x\right)^3\geq 9\sum x\left(x^2+nyz+ky^2\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(1+n+k)\left[\sum x^3+3\prod(y+z)\right]\geq 9\left(\sum x^3+3nxyz+k\sum xy^2\right)\Leftrightarrow$$

$$(n+k-8)\sum x^3+3(n+k+1)\left(2xyz+\sum xy^2+\sum x^2y\right)\geq 9\left(3nxyz+k\sum xy^2\right)$$

$$(n+k-8)\sum x^3+3(n+k+1)\left(2xyz+\sum xy^2+\sum x^2y\right)\geq 9\left(3nxyz+k\sum xy^2\right)$$

$$(n+k-8)\sum x^3+3(n-2k+1)\sum xy^2+3(n+k+1)\sum x^2y\geq 3(7n-2k-2)xyz,$$

care rezultă din inegalitatea mediilor:

$$(n+k-8)\sum x^3+3(n-2k+1)\sum xy^2+3(n+k+1)\sum x^2y\geq$$

$$\geq (n+k-8)\cdot 3\sqrt[3]{\prod x^3}+3(n-2k+1)\cdot 3\sqrt[3]{\prod xy^2}+3(n+k+1)\cdot 3\sqrt[3]{\prod x^2y}=$$

$$=(n+k-8)\cdot 3xyz+3(n-2k+1)\cdot 3xyz+3(n+k+1)\cdot 3xyz=3(7n-2k-2)xyz.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z \Leftrightarrow a=b=c=1$.

Aplicația22

1) If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$, then

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)^5+\left(y+\frac{1}{z}\right)^5+\left(z+\frac{1}{x}\right)^5\geq\frac{100.000}{81}.$$

Daniel Sitaru,RMM-Spring2024,SP472

Soluție

Folosind inegalitatea lui Hőlder obținem:

$$Ms=\sum\left(x+\frac{1}{y}\right)^5\overset{Holder}{\geq}\frac{\left[\sum\left(x+\frac{1}{y}\right)\right]^5}{3^4}\overset{x+y+z=1}{=}\frac{\left[\sum\left(x+\frac{x+y+z}{y}\right)\right]^5}{3^4}=\frac{\left(\sum x+\sum\frac{x}{y}+\sum 1+\sum\frac{z}{y}\right)^5}{81}=$$

$$=\frac{\left(1+3+\sum\frac{x}{y}+\sum\frac{z}{y}\right)^5}{81}\overset{AGM}{\geq}\frac{\left(1+3+3\sqrt[3]{\prod\frac{x}{y}}+3\sqrt[3]{\prod\frac{z}{y}}\right)^5}{3^4}=\frac{(1+3+3\cdot 1+3\cdot 1)^5}{3^4}=\frac{10^5}{3^4}=$$

$$=\frac{100.000}{81}=Md.$$

Eegalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

2) If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)^n+\left(y+\frac{1}{z}\right)^n+\left(z+\frac{1}{x}\right)^n\geq 3\left(\frac{10}{3}\right)^n.$$

Marin Chirciu

Soluție

Pentru $n=0$ se oține egalitatea3=3.

Pentru $n=1$ inegalitatea se scrie: $\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(y+\frac{1}{z}\right)+\left(z+\frac{1}{x}\right)\geq 10$, care rezultă din:

$x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 1+\frac{9}{x+y+z}=1+\frac{9}{1}=10$, cu egalitate pentru $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Pentru $n\geq 2$ folosim inegalitatea lui Hőlder: $\frac{X^n}{A}+\frac{Y^n}{B}+\frac{Z^n}{C}\geq\frac{(X+Y+Z)^n}{3^{n-2}(A+B+C)}$, unde

$X,Y,Z,A,B,C>0$ și $n\geq 2$.

Folosind inegalitatea lui Hőlder obținem:

$$Ms=\sum\left(x+\frac{1}{y}\right)^n\overset{Holder}{\geq}\frac{\left[\sum\left(x+\frac{1}{y}\right)\right]^n}{3^{n-1}}\overset{x+y+z=1}{=}\frac{\left[\sum\left(x+\frac{x+y+z}{y}\right)\right]^n}{3^{n-1}}=\frac{\left(\sum x+\sum\frac{x}{y}+\sum 1+\sum\frac{z}{y}\right)^n}{3^{n-1}}=$$

$$=\frac{\left(1+3+\sum\frac{x}{y}+\sum\frac{z}{y}\right)^n}{3^{n-1}}\overset{AGM}{\geq}\frac{\left(1+3+3\sqrt[3]{\prod\frac{x}{y}}+3\sqrt[3]{\prod\frac{z}{y}}\right)^n}{3^{n-1}}=\frac{(1+3+3\cdot 1+3\cdot 1)^n}{3^{n-1}}=\frac{10^n}{3^{n-1}}=$$

$$=3\left(\frac{10}{3}\right)^n=Md.$$

Eegalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

3) If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ and $n\in\mathbf{N}$, $\lambda\geq 0$ then

$$\left(x+\frac{\lambda}{y}\right)^n+\left(y+\frac{\lambda}{z}\right)^n+\left(z+\frac{\lambda}{x}\right)^n\geq 3\left(3\lambda+\frac{1}{3}\right)^n.$$

Marin Chirciu

Soluție

Pentru $n=0$ se oține egalitatea3=3.

Pentru $n=1$ inegalitatea se scrie: $\left(x+\frac{\lambda}{y}\right)+\left(y+\frac{\lambda}{z}\right)+\left(z+\frac{\lambda}{x}\right)\geq 9\lambda+1$, care rezultă din:

$x+y+z+\frac{\lambda}{x}+\frac{\lambda}{y}+\frac{\lambda}{z}\geq 1+\frac{9\lambda}{x+y+z}=1+\frac{9\lambda}{1}=9\lambda+1$, cu egalitate pentru $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Pentru $n\geq 2$ folosim inegalitatea lui Hőlder: $\frac{X^n}{A}+\frac{Y^n}{B}+\frac{Z^n}{C}\geq\frac{(X+Y+Z)^n}{3^{n-2}(A+B+C)}$, unde

$X,Y,Z,A,B,C>0$ și $n\geq 2$.

Folosind inegalitatea lui Hőlder obținem:

$$Ms=\sum\left(x+\frac{\lambda}{y}\right)^n \overset{Holder}{\geq} \frac{\left[\sum\left(x+\frac{\lambda}{y}\right)\right]^n}{3^{n-1}} \overset{x+y+z=1}{=} \frac{\left[\sum\left(x+\lambda\frac{x+y+z}{y}\right)\right]^n}{3^{n-1}} = \frac{\left(\sum x+\lambda\sum\frac{x}{y}+\lambda\sum 1+\lambda\sum\frac{z}{y}\right)^n}{3^{n-1}} =$$

$$=\frac{\left(1+3\lambda+\lambda\sum\frac{x}{y}+\lambda\sum\frac{z}{y}\right)^n}{3^{n-1}} \overset{AGM}{\geq} \frac{\left(1+3\lambda+\lambda\cdot 3\sqrt[3]{\prod\frac{x}{y}}+\lambda\cdot 3\sqrt[3]{\prod\frac{z}{y}}\right)^n}{3^{n-1}} = \frac{(1+3\lambda+3\lambda+3\lambda)^n}{3^{n-1}} =$$

$$=\frac{(9\lambda+1)^n}{3^{n-1}}=3\left(\frac{9\lambda+1}{3}\right)^n=3\left(3\lambda+\frac{1}{3}\right)^n=Md.$$

Eegalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Aplicația23.

1) If $a,b,c>0$, $ab+bc+ca+2abc\geq 1$ then find the minimum value of

$$P=\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}.$$

Phan Ngoc Chau, Vietnam, RMM1/2022

Soluție

Lema

If $a,b,c>0$ then

$$ab+bc+ca+2abc=1 \Leftrightarrow \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2.$$

Folosind **Lema** obținem:

$$ab+bc+ca+2abc\geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\leq 2, \text{ (1)}.$$

Cu inegalitatea lui Hőlder obținem: $\sum\frac{1}{a+1}\sum\sqrt{a+1}\sum\sqrt{a+1} \overset{Holder}{\geq} \left(\sum 1\right)^3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sum\frac{1}{a+1}\cdot P\cdot P\geq (3)^3 \Leftrightarrow P^2\cdot\sum\frac{1}{a+1}\geq 27 \Leftrightarrow P^2\geq\frac{27}{\sum\frac{1}{a+1}}, \text{ (2)}.$$

Din (1) și (2) rezultă:

$P^2\geq\frac{27}{\sum\frac{1}{a+1}}\geq\frac{27}{2}\Rightarrow P^2\geq\frac{27}{2}\Rightarrow P\geq\frac{3\sqrt{6}}{2}$, cu egalitate pentru $(a,b,c)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Din $P \geq \frac{3\sqrt{6}}{2}$, cu egalitate pentru $(a,b,c)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, deducem că $\min P=\frac{3\sqrt{6}}{2}$ și minimul este atins pentru $(a,b,c)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

2) If $a,b,c>0$, $a+b+c+2=abc$ then find the minimum value of

$$P=\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $a,b,c>0$ then

$a+b+c+2=abc \Leftrightarrow \frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=1$, (1). Folosind **Lema** obținem:

Cu inegalitatea lui Hőlder obținem: $\sum\frac{1}{a+1}\sum\sqrt{a+1}\sum\sqrt{a+1}\overset{Holder}{\geq}\left(\sum 1\right)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum\frac{1}{a+1}\cdot P\cdot P\geq(3)^3 \Leftrightarrow P^2\cdot\sum\frac{1}{a+1}\geq 27 \Leftrightarrow P^2\geq\frac{27}{\sum\frac{1}{a+1}}$, (2).

Din (1) și (2) rezultă:

$P^2\geq\frac{27}{\sum\frac{1}{a+1}}\geq\frac{27}{1}\Rightarrow P^2\geq 27\Rightarrow P\geq 3\sqrt{3}$, cu egalitate pentru $(a,b,c)=(2,2,2)$.

Din $P\geq 3\sqrt{3}$, cu egalitate pentru $(a,b,c)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, deducem că $\min P=3\sqrt{3}$ și minimul este atins pentru $(a,b,c)=(2,2,2)$.

3) If $a,b,c>0$, $a+b+c+2=abc$ then

$$\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}\geq 3\sqrt{3}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $a,b,c>0$ then

$a+b+c+2=abc \Leftrightarrow \frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=1$, (1).

.

Folosind **Lema** obținem:

Cu inegalitatea lui Hőlder obținem: $\sum\frac{1}{a+1}\sum\sqrt{a+1}\sum\sqrt{a+1}\overset{Holder}{\geq}\left(\sum 1\right)^3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\sum\frac{1}{a+1}\cdot\sum\sqrt{a+1}\cdot\sum\sqrt{a+1}\geq(3)^3\Leftrightarrow\left(\sum\sqrt{a+1}\right)^2\cdot\sum\frac{1}{a+1}\geq 27\Leftrightarrow\left(\sum\sqrt{a+1}\right)^2\geq\frac{27}{\sum\frac{1}{a+1}},$$

(2). Din (1) și (2) rezultă:

$$\left(\sum\sqrt{a+1}\right)^2\geq\frac{27}{\sum\frac{1}{a+1}}\geq\frac{27}{1}\Rightarrow\left(\sum\sqrt{a+1}\right)^2\geq 27\Rightarrow\sum\sqrt{a+1}\geq 3\sqrt{3}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=2$.

Aplicația24.

1) If $x,y,z>0$ then

$$\sum\frac{x^4}{\sqrt{x^2+xy+yz+zx}}\geq\frac{3}{2}xyz.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities 2/2022

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$ then

$$\sqrt{x^2+xy+yz+zx}\leq\frac{1}{2}(2x+y+z).$$

Demonstrație.

Avem $\sqrt{x^2+xy+yz+zx}\leq\sqrt{(x+y)(x+z)}\overset{AGM}{\leq}\frac{(x+y)+(x+z)}{2}\leq\frac{1}{2}(2x+y+z)$.

Folosind **Lema** obținem:

$$Ms=\sum\frac{x^4}{\sqrt{x^2+xy+yz+zx}}\overset{Lema}{\geq}\sum\frac{x^4}{\frac{1}{2}(2x+y+z)}=2\sum\frac{x^4}{2x+y+z}\overset{Holder}{\geq}2\frac{\left(\sum x\right)^4}{9\sum(2x+y+z)}=$$

$$=2\frac{\left(\sum x\right)^4}{9\cdot 4\sum x}=\frac{1}{18}\left(\sum x\right)^3\overset{AGM}{\geq}\frac{1}{18}\left(3\sqrt[3]{xyz}\right)^3=\frac{3}{2}xyz=Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z$.

2) If $x,y,z>0$, $xyz=1$ and $n\in\mathbf{N}, n\geq 2$ then

$$\sum \frac{x^n}{\sqrt{x^2+xy+yz+zx}} \ge \frac{3}{2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$ then

$$\sqrt{x^2+xy+yz+zx} \le \frac{1}{2}(2x+y+z).$$

Demonstrație.

Avem $\sqrt{x^2+xy+yz+zx} \le \sqrt{(x+y)(x+z)} \overset{AGM}{\le} \frac{(x+y)+(x+z)}{2} \le \frac{1}{2}(2x+y+z)$.

Folosind **Lema** obținem:

$$Ms = \sum \frac{x^n}{\sqrt{x^2+xy+yz+zx}} \overset{Lema}{\ge} \sum \frac{x^n}{\frac{1}{2}(2x+y+z)} = 2\sum \frac{x^n}{2x+y+z} \overset{Holder}{\ge} 2\frac{\left(\sum x\right)^n}{3^{n-2}\sum(2x+y+z)} =$$

$$= 2\frac{\left(\sum x\right)^n}{3^{n-2}\cdot 4\sum x} = \frac{1}{2\cdot 3^{n-2}}\left(\sum x\right)^{n-1} \overset{AGM}{\ge} \frac{1}{2\cdot 3^{n-2}}\left(3\sqrt[3]{xyz}\right)^{n-1} = \frac{1}{2\cdot 3^{n-2}}\cdot 3^{n-1} = \frac{3}{2} = Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z$.

Aplicația25.

1) If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then

$$\sum \frac{x^5(x+y)}{\left(y+\sqrt{zx}\right)^2} \ge \frac{1}{54}.$$

George Apostolopoulos,Greece, Mathematical Inequalities2/2022

Soluție.

Cu inegalitățileCBS și Holder obținem:

$$Ms = \sum \frac{x^5(x+y)}{\left(y+\sqrt{zx}\right)^2} \overset{CBS}{\ge} \sum \frac{x^5(x+y)}{(x+y)(y+z)} = \sum \frac{x^5}{y+z} \overset{Holder}{\ge} \frac{\left(\sum x\right)^5}{27\sum(y+z)} = \frac{\left(\sum x\right)^5}{27\cdot 2\sum x} =$$

$$= \frac{\left(\sum x\right)^4}{54} = \frac{1}{54} = Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

2) If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ and $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ then

$$\sum \frac{x^n (x+y)}{\left(y+\sqrt{zx}\right)^2} \geq \frac{1}{54}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Cu inegalitățile CBS și Holder obținem:

$$Ms = \sum \frac{x^n (x+y)}{\left(y+\sqrt{zx}\right)^2} \overset{CBS}{\geq} \sum \frac{x^n (x+y)}{(x+y)(y+z)} = \sum \frac{x^n}{y+z} \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum x\right)^n}{3^{n-2} \sum (y+z)} = \frac{\left(\sum x\right)^n}{3^{n-2} \cdot 2 \sum x} =$$

$$= \frac{\left(\sum x\right)^{n-1}}{3^{n-2} \cdot 2} = \frac{1}{2 \cdot 3^{n-2}} = \frac{18}{3^n} = Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

3) If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 3$ and $n \in \mathbf{N}$ then

$$\sum \frac{x^n (x+y)}{\left(y+\sqrt{zx}\right)^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n = 0$ inegalitatea se scrie: $\sum \frac{x+y}{\left(y+\sqrt{zx}\right)^2} \geq \frac{3}{2}$, care rezultă din inegalitatea CBS:

$$\sum \frac{x+y}{\left(y+\sqrt{zx}\right)^2} \overset{CBS}{\geq} \sum \frac{x+y}{(x+y)(y+z)} = \sum \frac{1}{y+z} \overset{CS}{\geq} \frac{9}{2\sum x} = \frac{9}{2 \cdot 3} = \frac{3}{2}.$$

Pentru $n = 1$ inegalitatea se scrie: $\sum \frac{x(x+y)}{\left(y+\sqrt{zx}\right)^2} \geq \frac{3}{2}$, care rezultă din inegalitatea CBS:

$$\sum \frac{x(x+y)}{\left(y+\sqrt{zx}\right)^2} \overset{CBS}{\geq} \sum \frac{x(x+y)}{(x+y)(y+z)} = \sum \frac{x}{y+z} \overset{Nesbitt}{\geq} \frac{3}{2}.$$

În continuare vom considera $n \geq 2$.

Cu inegalitățile CBS și Holder obținem:

$$Ms=\sum\frac{x^n(x+y)}{\left(y+\sqrt{zx}\right)^2}\overset{CBS}{\geq}\sum\frac{x^n(x+y)}{(x+y)(y+z)}=\sum\frac{x^n}{y+z}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum x\right)^n}{3^{n-2}\sum(y+z)}=\frac{\left(\sum x\right)^n}{3^{n-2}\cdot 2\sum x}=$$

$$=\frac{3^{n-1}}{3^{n-2}\cdot 2}=\frac{3}{2}=Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Aplicația26.

1) If $a,b,c>0$ $abc=1$ then

$$\sum\frac{(2a-b)^4}{a+2b}\geq 1.$$

Kostantinos Geronikolas, Greece,Mathematical Inequalitires2/2022

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Hőlder obținem:

$$Ms=\sum\frac{(2a-b)^4}{a+2b}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum(2a-b)\right)^4}{9\sum(a+2b)}=\frac{\left(\sum a\right)^4}{9\sum 3a}=\frac{\left(\sum a\right)^4}{27\sum a}=\frac{\left(\sum a\right)^3}{27}\overset{AGM}{\geq}\frac{\left(3\sqrt[3]{abc}\right)^3}{27}=$$

$$=\frac{\left(3\sqrt[3]{1}\right)^3}{27}=1=Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

2) If $a,b,c>0$ $abc=1$ and $n\in\mathbf{N}^*$ then

$$\sum\frac{(2a-b)^{2n}}{a+2b}\geq 1.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Hőlder obținem:

$$Ms=\sum\frac{(2a-b)^{2n}}{a+2b}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum(2a-b)\right)^{2n}}{3^{n-2}\sum(a+2b)}=\frac{\left(\sum a\right)^{2n}}{3^{2n-2}\sum 3a}=\frac{\left(\sum a\right)^{2n}}{3^{2n-1}\sum a}=\frac{\left(\sum a\right)^{2n-1}}{3^{2n-1}}\overset{AGM}{\geq}\frac{\left(3\sqrt[3]{abc}\right)^{2n-1}}{3^{2n-1}}=$$

$$=\frac{\left(3\sqrt[3]{1}\right)^{2n-1}}{3^{2n-1}}=1=Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

3) If $a,b,c>0$ $abc=1$ and $n\in\mathbf{N}^*$ then

$$\sum\frac{(3a-2b)^{2n}}{2a+3b}\geq\frac{3}{5}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Hőlder obținem:

$$Ms=\sum\frac{(3a-2b)^{2n}}{2a+3b}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum(3a-2b)\right)^{2n}}{3^{2n-2}\sum(2a+3b)}=\frac{\left(\sum a\right)^{2n}}{3^{2n-2}\sum 5a}=\frac{\left(\sum a\right)^{2n}}{3^{2n-2}5\sum a}=\frac{\left(\sum a\right)^{2n-1}}{3^{2n-2}\cdot 5}\overset{AGM}{\geq}\frac{\left(3\sqrt[3]{abc}\right)^{2n-1}}{3^{2n-2}\cdot 5}=$$

$$=\frac{\left(3\sqrt[3]{1}\right)^{2n-1}}{3^{2n-2}\cdot 5}=\frac{3^{2n-1}}{3^{2n-2}\cdot 5}=\frac{3}{5}=Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

4) If $a,b,c>0$ $abc=1$ and $\lambda\geq 0$, $n\in\mathbf{N}^*$ then

$$\sum\frac{\left((\lambda+1)a-\lambda b\right)^{2n}}{\lambda a+(\lambda+1)b}\geq\frac{3}{2\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Hőlder obținem:

$$Ms=\sum\frac{\left((\lambda+1)a-\lambda b\right)^{2n}}{\lambda a+(\lambda+1)b}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum\left((\lambda+1)a-\lambda b\right)\right)^{2n}}{3^{2n-2}\sum\left(\lambda a+(\lambda+1)b\right)}=\frac{\left(\sum a\right)^{2n}}{3^{2n-2}\sum(2\lambda+1)a}=\frac{\left(\sum a\right)^{2n}}{3^{2n-2}(2\lambda+1)\sum a}=$$

$$=\frac{\left(\sum a\right)^{2n-1}}{3^{2n-2}(2\lambda+1)}\overset{AGM}{\geq}\frac{\left(3\sqrt[3]{abc}\right)^{2n-1}}{3^{2n-2}(2\lambda+1)}=\frac{\left(3\sqrt[3]{1}\right)^{2n-1}}{3^{2n-2}(2\lambda+1)}=\frac{3^{2n-1}}{3^{2n-2}(2\lambda+1)}=\frac{3}{2\lambda+1}=Md.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația27.

1) Fie $x,y,z>0$. In ΔABC

$$\sum\frac{a^5}{ax+y\sqrt{bc}}\geq\frac{16}{x+y}F^2.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Dan Nănuți, Romania,3 RMM2022,J.2094

Soluție

Cu inegalitatea mediilor și Holder obținem:

$$LHS=\sum\frac{a^5}{ax+y\sqrt{bc}}\overset{AGM}{\geq}\sum\frac{a^5}{ax+y\frac{b+c}{2}}=\sum\frac{2a^5}{2ax+y(b+c)}\overset{Holder}{\geq}\frac{2\left(\sum a\right)^5}{3^3\sum(2ax+y(b+c))}=$$

$$=\frac{2\left(\sum a\right)^5}{3^3\cdot 2(x+y)\sum a}=\frac{\left(\sum a\right)^4}{3^3\cdot(x+y)}=\frac{(2p)^4}{3^3\cdot(x+y)}=\frac{2^4p^4}{3^3\cdot(x+y)}=\frac{16p^2\cdot p^2}{27(x+y)}\overset{Mitrinovic}{\geq}\frac{16p^2\cdot 27r^2}{27(x+y)}=$$

$$\frac{16p^2r^2}{x+y}=\frac{16}{x+y}F^2=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2) Fie $x,y,z>0$ și $n\in\mathbf{N}^*$. In ΔABC

$$\sum\frac{a^{4n+1}}{ax+y\sqrt{bc}}\geq\left(\frac{16}{3}\right)^n\frac{3}{x+y}F^{2n}.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție</u>

Cu inegalitatea mediilor și Holder obținem:

$$LHS=\sum\frac{a^{4n+1}}{ax+y\sqrt{bc}}\overset{AGM}{\geq}\sum\frac{a^{4n+1}}{ax+y\frac{b+c}{2}}=\sum\frac{2a^{4n+1}}{2ax+y(b+c)}\overset{Holder}{\geq}\frac{2\left(\sum a\right)^{4n+1}}{3^{4n-1}\sum(2ax+y(b+c))}=$$

$$=\frac{2\left(\sum a\right)^{4n+1}}{3^{4n-1}\cdot 2(x+y)\sum a}=\frac{\left(\sum a\right)^{4n}}{3^{4n-1}\cdot(x+y)}=\frac{(2p)^{4n}}{3^{4n-1}\cdot(x+y)}=\frac{2^{4n}p^{4n}}{3^{4n-1}\cdot(x+y)}=3\left(\frac{2}{3}\right)^{4n}\frac{p^{2n}\cdot p^{2n}}{x+y}\overset{Mitrinovic}{\geq}$$

$$\overset{Mitrinovic}{\geq}3\left(\frac{2}{3}\right)^{4n}\frac{\left(p^2\right)^n\cdot\left(27r^2\right)^n}{x+y}=3\left(\frac{2}{3}\right)^{4n}\frac{\left(27p^2r^2\right)^n}{x+y}=3\left(\frac{2}{3}\right)^{4n}\frac{\left(27F^2\right)^n}{x+y}=3\cdot\frac{2^{4n}}{3^{4n}}\cdot\frac{3^{3n}}{x+y}F^{2n}=.$$

$$=3\cdot\frac{16^n}{3^n}\cdot\frac{1}{x+y}F^{2n}=\left(\frac{16}{3}\right)^n\frac{3}{x+y}F^{2n}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

<u>Aplicația28</u>

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$

$$\sum\frac{a^2}{\sqrt{b^2+bc+c^2}}\geq\sqrt{3}.$$

George Apostolopoulos, Greece, Mathmatical Inequalities4/2022

Soluție

Folosind inegalitatea lui Holder obținem:

$$LHS=\sum\frac{a^2}{\sqrt{b^2+bc+c^2}}\geq\sum\frac{a^3}{a\sqrt{b^2+bc+c^2}}\geq\frac{\left(\sum a\right)^3}{3\sum a\sqrt{b^2+bc+c^2}}=\frac{\left(\sum a\right)^3}{3\sum\sqrt{a}\sqrt{a\left(b^2+bc+c^2\right)}}\overset{CS}{\geq}$$

$$\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^3}{3\sqrt{\sum a\sum\left(a\left(b^2+c^2\right)+abc\right)}}=\frac{\left(\sum a\right)^3}{3\sqrt{\sum a\left(\sum bc(b+c)+3abc\right)}}=\frac{\left(\sum a\right)^3}{3\sqrt{\sum a\sum a\sum bc}}=$$

$$=\frac{\left(\sum a\right)^3}{3\sqrt{\left(\sum a\right)^2\sum bc}}=\frac{\left(\sum a\right)^2}{3\sqrt{\sum bc}}\overset{SOS}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^2}{3\sqrt{\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2}}=\frac{\sum a}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația29

1) If $a,b,c>0$ then

$$\frac{a}{(b+c)^3}+\frac{b}{(c+a)^3}+\frac{c}{(a+b)^3}\geq\frac{27}{8(a+b+c)^2}.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, București,THCS3/2022

Soluție

$$LHS=\sum\frac{a}{(b+c)^3}=\sum\frac{\left(\frac{a}{b+c}\right)^2}{a(b+c)}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum\frac{a}{b+c}\right)^2}{\sum a(b+c)}\overset{Nesbitt}{\geq}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2\sum bc}=\frac{9}{8\sum bc}\overset{SOS}{\geq}\frac{27}{8(a+b+c)^2}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

2) If $a,b,c>0$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\frac{a}{(b+\lambda c)^3}+\frac{b}{(c+\lambda a)^3}+\frac{c}{(a+\lambda b)^3}\geq\frac{27}{(\lambda+1)^3(a+b+c)^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$LHS=\sum\frac{a}{(b+\lambda c)^3}=\sum\frac{\left(\frac{a}{b+\lambda c}\right)^2}{a(b+\lambda c)}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum\frac{a}{b+\lambda c}\right)^2}{\sum a(b+\lambda c)}\overset{Nesbitt}{\geq}\frac{\left(\frac{3}{\lambda+1}\right)^2}{(\lambda+1)\sum bc}=$$

$$\frac{9}{(\lambda+1)^3\sum bc}\overset{SOS}{\geq}\frac{27}{(\lambda+1)^3(a+b+c)^2}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

3) If $a,b,c>0$ and $\lambda \ge 0$, $n\in\mathbf{N}$ then

$$\frac{a^n}{(b+\lambda c)^{n+2}}+\frac{b^n}{(c+\lambda a)^{n+2}}+\frac{c^n}{(a+\lambda b)^{n+2}}\ge\frac{27}{(\lambda+1)^{n+2}(a+b+c)^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$LHS=\sum\frac{a^n}{(b+\lambda c)^{n+2}}=\sum\frac{\left(\frac{a}{b+\lambda c}\right)^{n+1}}{a(b+\lambda c)}\overset{Holder}{\ge}\frac{\left(\sum\frac{a}{b+\lambda c}\right)^{n+1}}{3^{n-1}\sum a(b+\lambda c)}\overset{Nesbitt}{\ge}\frac{\left(\frac{3}{\lambda+1}\right)^{n+1}}{3^{n-1}(\lambda+1)\sum bc}=$$

$$\frac{9}{(\lambda+1)^{n+2}\sum bc}\overset{SOS}{\ge}\frac{27}{(\lambda+1)^{n+2}(a+b+c)^2}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Aplicația30

1) If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{a^2}{b+c}+\sqrt{3\sum bc}\ge\frac{3}{2}\sum a.$$

Nguyen Viet Hung, Vietnam, Pure Inequalities3/2022

Soluție

Lema

If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{a^2}{b+c}\ge\frac{\left(\sum a\right)^3}{6\sum bc}.$$

Demonstrație

Folosind inegalitatea lui Holder obținem:

$$\sum\frac{a^2}{b+c}=\sum\frac{a^3}{a(b+c)}\overset{Holder}{\ge}\frac{\left(\sum a\right)^3}{3\sum a(b+c)}=\frac{\left(\sum a\right)^3}{6\sum bc}.$$

Folosind **Lema** obținem:

$$LHS=\sum\frac{a^2}{b+c}+\sqrt{3\sum bc}\overset{Lema}{\ge}\frac{\left(\sum a\right)^3}{6\sum bc}+\sqrt{3\sum bc}=\frac{\left(\sum a\right)^3}{6\sum bc}+\frac{1}{2}\sqrt{3\sum bc}+\frac{1}{2}\sqrt{3\sum bc}\overset{AGM}{\ge}$$

$$\overset{AGM}{\ge}3\sqrt[3]{\frac{\left(\sum a\right)^3}{6\sum bc}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3\sum bc}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3\sum bc}}=\frac{3}{2}\sum a=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

2) If $a,b,c>0$ and $\lambda\ge 0$ then

$$\frac{a^2}{b+\lambda c}+\frac{b^2}{c+\lambda a}+\frac{c^2}{a+\lambda b}+\frac{2}{\lambda+1}\sqrt{3(ab+bc+ca)}\ge\frac{3(a+b+c)}{\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{a^2}{b+\lambda c}\ge\frac{\left(\sum a\right)^3}{3(\lambda+1)\sum bc}.$$

Demonstrație

Folosind inegalitatea lui Holder obținem:

$$\sum\frac{a^2}{b+\lambda c}=\sum\frac{a^3}{a(b+\lambda c)}\overset{Holder}{\ge}\frac{\left(\sum a\right)^3}{3\sum a(b+\lambda c)}=\frac{\left(\sum a\right)^3}{3(\lambda+1)\sum bc}.$$

Folosind **Lema** obținem:

$$LHS=\sum\frac{a^2}{b+\lambda c}+\frac{2}{\lambda+1}\sqrt{3\sum bc}\overset{Lema}{\ge}\frac{\left(\sum a\right)^3}{3(\lambda+1)\sum bc}+\frac{2}{\lambda+1}\sqrt{3\sum bc}=$$

$$=\frac{\left(\sum a\right)^3}{3(\lambda+1)\sum bc}+\frac{1}{\lambda+1}\sqrt{3\sum bc}+\frac{1}{\lambda+1}\sqrt{3\sum bc}\overset{AGM}{\ge}$$

$$\overset{AGM}{\ge}3\sqrt[3]{\frac{\left(\sum a\right)^3}{3(\lambda+1)\sum bc}\cdot\frac{1}{(\lambda+1)}\sqrt{3\sum bc}\cdot\frac{1}{(\lambda+1)}\sqrt{3\sum bc}}=\frac{3}{\lambda+1}\sum a=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

3) If $a,b,c>0$ then

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+2\sqrt{3(ab+bc+ca)}\ge 3(a+b+c).$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{a^2}{b}\geq\frac{\left(\sum a\right)^3}{3\sum bc}.$$

Demonstrație

Folosind inegalitatea lui Holder obținem:

$$\sum\frac{a^2}{b}=\sum\frac{a^3}{ab}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^3}{3\sum ab}=\frac{\left(\sum a\right)^3}{3\sum bc}.$$

Folosind **Lema** obținem:

$$LHS=\sum\frac{a^2}{b}+2\sqrt{3\sum bc}\overset{Lema}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^3}{3\sum bc}+2\sqrt{3\sum bc}=\frac{\left(\sum a\right)^3}{3\sum bc}+\sqrt{3\sum bc}+\sqrt{3\sum bc}\overset{AGM}{\geq}$$

$$\overset{AGM}{\geq}3\sqrt[3]{\frac{\left(\sum a\right)^3}{3\sum bc}\cdot\sqrt{3\sum bc}\cdot\sqrt{3\sum bc}}=3\sum a=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Sol2.(Sanong Huayrerai).

$$\sum\frac{a^2}{b}+2\sqrt{3(ab+bc+ca)}=\sum\frac{a^2}{b}+2\cdot3\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}\overset{Jensen}{\geq}\sum\frac{a^2}{b}+6\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{3}=$$

$$=\sum\frac{a^2}{b}+2\sum\sqrt{ab}=\sum\left(\frac{a^2}{b}+\sqrt{ab}+\sqrt{ab}\right)\overset{AGM}{\geq}\sum3\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}\cdot\sqrt{ab}\cdot\sqrt{ab}}=3\sum a=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Aplicații în triunghi.

4) În ΔABC

$$\frac{m_a^2}{m_b}+\frac{m_b^2}{m_c}+\frac{m_c^2}{m_a}+2\sqrt{3(m_am_b+m_bm_c+m_cm_a)}\geq3(m_a+m_b+m_c).$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $x,y,z>0$ then

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+2\sqrt{3(xy+yz+zx)}\geq3(x+y+z).$$

Demonstrație

$$\sum \frac{x^2}{y}+2\sqrt{3(xy+yz+zx)}=\sum \frac{x^2}{y}+2\cdot 3\sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}}\overset{Jensen}{\geq}\sum \frac{x^2}{y}+6\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}{3}=$$

$$=\sum \frac{x^2}{y}+2\sum\sqrt{xy}=\sum\left(\frac{x^2}{y}+\sqrt{xy}+\sqrt{xy}\right)\overset{AGM}{\geq}\sum 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}\cdot\sqrt{xy}\cdot\sqrt{xy}}=3\sum x.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=(m_a,m_b,m_c)$ obținem:

$$\frac{m_a^2}{m_b}+\frac{m_b^2}{m_c}+\frac{m_c^2}{m_a}+2\sqrt{3(m_am_b+m_bm_c+m_cm_a)}\geq 3(m_a+m_b+m_c).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

5) În ΔABC

$$\frac{w_a^2}{w_b}+\frac{w_b^2}{w_c}+\frac{w_c^2}{w_a}+2\sqrt{3(w_aw_b+w_bw_c+w_cw_a)}\geq 3(w_a+w_b+w_c).$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $x,y,z>0$ then

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+2\sqrt{3(xy+yz+zx)}\geq 3(x+y+z).$$

Demonstrație

$$\sum \frac{x^2}{y}+2\sqrt{3(xy+yz+zx)}=\sum \frac{x^2}{y}+2\cdot 3\sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}}\overset{Jensen}{\geq}\sum \frac{x^2}{y}+6\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}{3}=$$

$$=\sum \frac{x^2}{y}+2\sum\sqrt{xy}=\sum\left(\frac{x^2}{y}+\sqrt{xy}+\sqrt{xy}\right)\overset{AGM}{\geq}\sum 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}\cdot\sqrt{xy}\cdot\sqrt{xy}}=3\sum x.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=(w_a,w_b,w_c)$ obținem:

$$\frac{w_a^2}{w_b}+\frac{w_b^2}{w_c}+\frac{w_c^2}{w_a}+2\sqrt{3(w_aw_b+w_bw_c+w_cw_a)}\geq 3(w_a+w_b+w_c).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

6) În ΔABC

$$\frac{r_a^2}{r_b}+\frac{r_b^2}{r_c}+\frac{r_c^2}{r_a}+2p\sqrt{3}\geq 3(4R+r).$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $x,y,z>0$ then

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+2\sqrt{3(xy+yz+zx)}\geq 3(x+y+z).$$

Demonstrație

$$\sum\frac{x^2}{y}+2\sqrt{3(xy+yz+zx)}=\sum\frac{x^2}{y}+2\cdot 3\sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}}\overset{Jensen}{\geq}\sum\frac{x^2}{y}+6\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}{3}=$$

$$=\sum\frac{x^2}{y}+2\sum\sqrt{xy}=\sum\left(\frac{x^2}{y}+\sqrt{xy}+\sqrt{xy}\right)\overset{AGM}{\geq}\sum 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}\cdot\sqrt{xy}\cdot\sqrt{xy}}=3\sum x.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=(r_a,r_b,r_c)$ obținem:

$$\frac{r_a^2}{r_b}+\frac{r_b^2}{r_c}+\frac{r_c^2}{r_a}+2\sqrt{3(r_ar_b+r_br_c+r_cr_a)}\geq 3(r_a+r_b+r_c),\ (1).$$

Folosind $\sum r_a=4R+r$ și $\sum r_br_c=p^2$, inegalitatea(1) se scrie:

$$\frac{r_a^2}{r_b}+\frac{r_b^2}{r_c}+\frac{r_c^2}{r_a}+2\sqrt{3p^2}\geq 3(4R+r)\Leftrightarrow\frac{r_a^2}{r_b}+\frac{r_b^2}{r_c}+\frac{r_c^2}{r_a}+2p\sqrt{3}\geq 3(4R+r).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

7) În ΔABC

$$\frac{h_a^2}{h_b}+\frac{h_b^2}{h_c}+\frac{h_c^2}{h_a}+2p\sqrt{\frac{3r}{R}}\geq\frac{3}{2R}\left(p^2+r^2+4Rr\right).$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $x,y,z>0$ then

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+2\sqrt{3(xy+yz+zx)}\geq 3(x+y+z).$$

Demonstrație

$$\sum\frac{x^2}{y}+2\sqrt{3(xy+yz+zx)}=\sum\frac{x^2}{y}+2\cdot 3\sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}}\overset{Jensen}{\geq}\sum\frac{x^2}{y}+6\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}{3}=$$

$$=\sum\frac{x^2}{y}+2\sum\sqrt{xy}=\sum\left(\frac{x^2}{y}+\sqrt{xy}+\sqrt{xy}\right)\overset{AGM}{\geq}\sum 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}\cdot\sqrt{xy}\cdot\sqrt{xy}}=3\sum x.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=(h_a,h_b,h_c)$ obținem:

$$\frac{h_a^2}{h_b}+\frac{h_b^2}{h_c}+\frac{h_c^2}{h_a}+2\sqrt{3(h_ah_b+h_bh_c+h_ch_a)}\geq 3(h_a+h_b+h_c),\ (1).$$

Folosind $\sum h_a=\frac{p^2+r^2+4Rr}{2R}$ și $\sum h_bh_c=\frac{2rp^2}{R}$, inegalitatea(1) se scrie:

$$\frac{h_a^2}{h_b}+\frac{h_b^2}{h_c}+\frac{h_c^2}{h_a}+2\sqrt{3\frac{rp^2}{R}}\geq 3\cdot\frac{p^2+r^2+4Rr}{2R}\Leftrightarrow\frac{h_a^2}{h_b}+\frac{h_b^2}{h_c}+\frac{h_c^2}{h_a}+2p\sqrt{\frac{3r}{R}}\geq\frac{3}{2R}\left(p^2+r^2+4Rr\right).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

8) În ΔABC

$$\frac{\tan^2\frac{A}{2}}{\tan\frac{B}{2}}+\frac{\tan^2\frac{B}{2}}{\tan\frac{C}{2}}+\frac{\tan^2\frac{C}{2}}{\tan\frac{A}{2}}+2\sqrt{3}\geq\frac{3}{p}(4R+r).$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $x,y,z>0$ then

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+2\sqrt{3(xy+yz+zx)}\geq 3(x+y+z).$$

Demonstrație

$$\sum\frac{x^2}{y}+2\sqrt{3(xy+yz+zx)}=\sum\frac{x^2}{y}+2\cdot 3\sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}}\overset{Jensen}{\geq}\sum\frac{x^2}{y}+6\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}{3}=$$

$$=\sum\frac{x^2}{y}+2\sum\sqrt{xy}=\sum\left(\frac{x^2}{y}+\sqrt{xy}+\sqrt{xy}\right)\overset{AGM}{\geq}\sum 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}\cdot\sqrt{xy}\cdot\sqrt{xy}}=3\sum x.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\tan\frac{A}{2},\tan\frac{B}{2},\tan\frac{C}{2}\right)$ obținem:

$$\frac{\tan^2\frac{A}{2}}{\tan\frac{B}{2}}+\frac{\tan^2\frac{B}{2}}{\tan\frac{C}{2}}+\frac{\tan^2\frac{C}{2}}{\tan\frac{A}{2}}+2\sqrt{3\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}\geq 3\sum\tan\frac{A}{2},\ (1).$$

Folosind $\sum\tan\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{p}$ și $\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=1$, inegalitatea(1) se scrie:

$$\frac{\tan^2\frac{A}{2}}{\tan\frac{B}{2}}+\frac{\tan^2\frac{B}{2}}{\tan\frac{C}{2}}+\frac{\tan^2\frac{C}{2}}{\tan\frac{A}{2}}+2\sqrt{3\cdot 1}\geq 3\cdot\frac{4R+r}{p}\Leftrightarrow\sum\frac{\tan^2\frac{A}{2}}{\tan\frac{B}{2}}+2\sqrt{3}\geq\frac{3}{p}(4R+r).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

9) În ΔABC

$$\frac{\cot^2\frac{A}{2}}{\cot\frac{B}{2}}+\frac{\cot^2\frac{B}{2}}{\cot\frac{C}{2}}+\frac{\cot^2\frac{C}{2}}{\cot\frac{A}{2}}+2\sqrt{3\left(1+\frac{4R}{r}\right)}\geq\frac{3p}{r}.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție</u>

<u>Lema</u>

If $x,y,z>0$ then

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+2\sqrt{3(xy+yz+zx)}\geq 3(x+y+z).$$

<u>Demonstrație</u>

$$\sum\frac{x^2}{y}+2\sqrt{3(xy+yz+zx)}=\sum\frac{x^2}{y}+2\cdot 3\sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}}\overset{Jensen}{\geq}\sum\frac{x^2}{y}+6\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}{3}=$$

$$=\sum\frac{x^2}{y}+2\sum\sqrt{xy}=\sum\left(\frac{x^2}{y}+\sqrt{xy}+\sqrt{xy}\right)\overset{AGM}{\geq}\sum 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}\cdot\sqrt{xy}\cdot\sqrt{xy}}=3\sum x.$$

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\cot\frac{A}{2},\cot\frac{B}{2},\cot\frac{C}{2}\right)$ obținem:

$$\frac{\cot^2\frac{A}{2}}{\cot\frac{B}{2}}+\frac{\cot^2\frac{B}{2}}{\cot\frac{C}{2}}+\frac{\cot^2\frac{C}{2}}{\cot\frac{A}{2}}+2\sqrt{3\sum\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}\geq 3\sum\cot\frac{A}{2}, \text{(1).}$$

Folosind $\sum\cot\frac{A}{2}=\frac{p}{r}$ și $\sum\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{r}$, inegalitatea(1) se scrie:

$$\frac{\cot^2\frac{A}{2}}{\cot\frac{B}{2}}+\frac{\cot^2\frac{B}{2}}{\cot\frac{C}{2}}+\frac{\cot^2\frac{C}{2}}{\cot\frac{A}{2}}+2\sqrt{3\frac{4R+r}{r}}\geq 3\frac{p}{r}\Leftrightarrow\sum\frac{\cot^2\frac{A}{2}}{\cot\frac{B}{2}}+2\sqrt{3\left(1+\frac{4R}{r}\right)}\geq\frac{3p}{r}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

<u>Aplicația31</u>

1) If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geq\frac{3}{\sqrt{a^3+b^3+c^3-1}}.$$

Phan Ngoc Chau, Vietnam, RMM 4/2022.

<u>Soluție</u>

Punând $abc=1$ inegalitatea se scrie $\sum\sqrt{\frac{1}{bc(b+c)}}\geq\frac{3}{\sqrt{a^3+b^3+c^3-1}}$.

Folosind inegalitatea lui Holder avem:

$$\sum\sqrt{\frac{1}{bc(b+c)}}\sum\sqrt{\frac{1}{bc(b+c)}}\sum bc(b+c)\geq\left(\sum1\right)^3\Leftrightarrow LHS^2\geq\frac{27}{\sum bc(b+c)}\overset{(1)}{\geq}\frac{9}{\sum a^3-1}=RHS^2,$$

unde (1) $\Leftrightarrow\frac{27}{\sum bc(b+c)}\geq\frac{9}{\sum a^3-1}\Leftrightarrow 3\left(\sum a^3-1\right)\geq\sum bc(b+c)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\sum a^3-3\geq\sum bc(b+c)$, care rezultă din $b^3+c^3\geq bc(b+c)\Leftrightarrow(b-c)^2\geq0$.

Rămâne să arătăm că:

$3\sum a^3-3\geq\sum\left(b^3+c^3\right)\Leftrightarrow 3\sum a^3-3\geq2\sum a^3\Leftrightarrow\sum a^3\geq3$, adevărată din:

$\sum a^3\overset{AGM}{\geq}3abc=3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

2) If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b+c}}+\sqrt[3]{\frac{b}{c+a}}+\sqrt[3]{\frac{c}{a+b}}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{a^3+b^3+c^3-1}}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Punând $abc=1$ inegalitatea se scrie $\sum\sqrt[3]{\frac{1}{bc(b+c)}}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{a^3+b^3+c^3-1}}$.

Folosind inegalitatea lui Holder avem:

$$\sum\sqrt[3]{\frac{1}{bc(b+c)}}\sum\sqrt[3]{\frac{1}{bc(b+c)}}\sum\sqrt[3]{\frac{1}{bc(b+c)}}\sum bc(b+c)\geq\left(\sum 1\right)^4\Leftrightarrow$$

$$LHS^3\geq\frac{81}{\sum bc(b+c)}\overset{(1)}{\geq}\frac{27}{\sum a^3-1}=RHS^3,$$

unde (1) $\Leftrightarrow\frac{81}{\sum bc(b+c)}\geq\frac{27}{\sum a^3-1}\Leftrightarrow 3\left(\sum a^3-1\right)\geq\sum bc(b+c)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\sum a^3-3\geq\sum bc(b+c)$, care rezultă din $b^3+c^3\geq bc(b+c)\Leftrightarrow(b-c)^2\geq 0$.

Rămâne să arătăm că:

$3\sum a^3-3\geq\sum\left(b^3+c^3\right)\Leftrightarrow 3\sum a^3-3\geq 2\sum a^3\Leftrightarrow\sum a^3\geq 3$, adevărată din:

$$\sum a^3\overset{AGM}{\geq}3abc=3.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

3) If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $n\in\mathbf{N}, n\geq 2$ then

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b+c}}+\sqrt[n]{\frac{b}{c+a}}+\sqrt[n]{\frac{c}{a+b}}\geq\frac{3}{\sqrt[n]{a^3+b^3+c^3-1}}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Punând $abc=1$ inegalitatea se scrie $\sum\sqrt[n]{\frac{1}{bc(b+c)}}\geq\frac{3}{\sqrt[n]{a^3+b^3+c^3-1}}$.

Folosind inegalitatea lui Holder avem:

$$\underbrace{\sum\sqrt[n]{\frac{1}{bc(b+c)}}\cdot\ldots\cdot\sum\sqrt[n]{\frac{1}{bc(b+c)}}}_{n}\sum bc(b+c)\geq\left(\sum 1\right)^{n+1}\Leftrightarrow$$

$$LHS^n\geq\frac{3^{n+1}}{\sum bc(b+c)}\overset{(1)}{\geq}\frac{3^n}{\sum a^3-1}=RHS^n,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \dfrac{3^{n+1}}{\sum bc(b+c)} \geq \dfrac{3^n}{\sum a^3 - 1} \Leftrightarrow 3\left(\sum a^3 - 1\right) \geq \sum bc(b+c) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\sum a^3 - 3 \geq \sum bc(b+c)$, care rezultă din $b^3 + c^3 \geq bc(b+c) \Leftrightarrow (b-c)^2 \geq 0$.

Rămâne să arătăm că:

$3\sum a^3 - 3 \geq \sum\left(b^3 + c^3\right) \Leftrightarrow 3\sum a^3 - 3 \geq 2\sum a^3 \Leftrightarrow \sum a^3 \geq 3$, adevărată din:

$\sum a^3 \overset{AGM}{\geq} 3abc = 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Aplicația32

1) If $x, y, z > 0$, $xy + yz + zx \geq 3$ then find Min of

$$P = \sum \frac{x^3}{\sqrt{y^2 + 3}}.$$

Hoanghai Nguyen, Vietnam,THCS 5/2022

Soluție

$$P = \sum \frac{x^3}{\sqrt{y^2+3}} = \sum \frac{x^3}{\sqrt{y^2 + xy + yz + zx}} = \sum \frac{x^3}{\sqrt{(y+x)(y+z)}} \geq \sum \frac{x^3}{\frac{(y+x)+(y+z)}{2}} =$$

$$= 2\sum \frac{x^3}{x+2y+z} \overset{Holder}{\geq} 2\frac{\left(\sum x\right)^3}{3\sum(x+2y+z)} = 2\frac{\left(\sum x\right)^3}{3 \cdot 4\sum x} = \frac{\left(\sum x\right)^2}{6} \overset{SOS}{\geq} \frac{3\sum xy}{6} \geq \frac{3}{2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 1$.

Deducem că minP=$\dfrac{3}{2}$ pentru $(x, y, z) = (1,1,1)$.

2) If $x, y, z > 0$, $xy + yz + zx \geq 3$ then find Min of

$$P = \sum \frac{x^5}{\sqrt{y^2 + 3}}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$P = \sum \frac{x^5}{\sqrt{y^2+3}} = \sum \frac{x^5}{\sqrt{y^2 + xy + yz + zx}} = \sum \frac{x^5}{\sqrt{(y+x)(y+z)}} \geq \sum \frac{x^5}{\frac{(y+x)+(y+z)}{2}} =$$

$$=2\sum\frac{x^5}{x+2y+z}\overset{Holder}{\geq}2\frac{\left(\sum x\right)^5}{27\sum(x+2y+z)}=2\frac{\left(\sum x\right)^5}{27\cdot 4\sum x}=\frac{\left(\sum x\right)^4}{54}\overset{SOS}{\geq}\frac{\left(3\sum xy\right)^2}{54}=\frac{(3\cdot 3)^2}{54}=\frac{3}{2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Deducem că minP= $\frac{3}{2}$ pentru $(x,y,z)=(1,1,1)$.

3) If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx\geq 3$, and $n\in\mathbf{N}^*$ then find Min of

$$P=\sum\frac{x^{2n+1}}{\sqrt{y^2+3}}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$P=\sum\frac{x^{2n+1}}{\sqrt{y^2+3}}=\sum\frac{x^{2n+1}}{\sqrt{y^2+xy+yz+zx}}=\sum\frac{x^{2n+1}}{\sqrt{(y+x)(y+z)}}\geq\sum\frac{x^{2n+1}}{\frac{(y+x)+(y+z)}{2}}=$$

$$=2\sum\frac{x^5}{x+2y+z}\overset{Holder}{\geq}2\frac{\left(\sum x\right)^{2n+1}}{3^{2n-1}\sum(x+2y+z)}=2\frac{\left(\sum x\right)^{2n+1}}{3^{2n-1}\cdot 4\sum x}=\frac{\left(\sum x\right)^{2n}}{2\cdot 3^{2n-1}}\overset{SOS}{\geq}\frac{\left(3\sum xy\right)^n}{2\cdot 3^{2n-1}}=$$

$$\frac{(3\cdot 3)^n}{2\cdot 3^{2n-1}}=\frac{3}{2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Deducem că minP= $\frac{3}{2}$ pentru $(x,y,z)=(1,1,1)$.

Aplicația32

1) If $x,y,z>0$, $xyz=1$ then

$$\sum\frac{x^8}{x+y+1}\geq 1.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities 5/2022.

Soluție

Lema

Folosind inegalitatea lui Holder obținem:

$$LHS=\sum\frac{x^8}{x+y+1}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum x\right)^8}{3^6\sum(x+y+1)}\overset{(1)}{\geq}1=RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \dfrac{\left(\sum x\right)^8}{3^6\sum(x+y+1)} \geq 1 \Leftrightarrow \left(\sum x\right)^8 \geq 3^6\left(2\sum x+3\right) \overset{\sum x=t}{\Leftrightarrow} t^8 \geq 3^6(2t+3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t^8-1458t-2187 \geq 0 \Leftrightarrow (t-3)\left(t^7+3t^6+9t^5+27t^4+81t^3+243t^2+729t+729\right) \geq 0$,

care rezultă din $t \geq 3$,(vezi $t=x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}=3$, cu egalitate pentru $x=y=z=1$).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

2) If $x,y,z>0$, $xyz=1$ and $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ then

$$\sum \frac{x^n}{x+y+1} \geq 1.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție</u>

<u>Lema</u>

Folosind inegalitatea lui Holder obținem:

$$LHS=\sum \frac{x^n}{x+y+1} \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum x\right)^n}{3^{n-2}\sum(x+y+1)} \overset{(1)}{\geq} 1=RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \dfrac{\left(\sum x\right)^n}{3^{n-2}\sum(x+y+1)} \geq 1 \Leftrightarrow \left(\sum x\right)^n \geq 3^{n-2}\left(2\sum x+3\right) \overset{\sum x=t}{\Leftrightarrow} t^n \geq 3^{n-2}(2t+3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t^n-2\cdot 3^{n-2}t-3^{n-1} \geq 0 \Leftrightarrow$
$(t-3)\left(t^{n-1}+3t^{n-2}+3^2t^{n-3}+3^3t^{n-4}+3^4t^{n-5}+\ldots+3^{n-3}t^2+3^{n-2}t+3^{n-2}\right) \geq 0$,

care rezultă din $t \geq 3$,(vezi $t=x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}=3$, cu egalitate pentru $x=y=z=1$).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

<u>Aplicația33</u>

1) If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\sum \frac{a^3}{\sqrt{a+15}} \geq \frac{3}{4}.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities5/2022.

<u>Soluție</u>

Avem:

$$LHS=\sum\frac{a^3}{\sqrt{a+15}}=\sum\frac{4a^3}{\sqrt{(a+15)16}}\overset{AGM}{\geq}\sum\frac{4a^3}{\frac{(a+15)+16}{2}}=\sum\frac{8a^3}{a+31}\overset{Holder}{\geq}\frac{8\left(\sum a\right)^3}{3\sum(a+31)}=$$

$$=\frac{8\left(\sum a\right)^3}{3\left(\sum a+93\right)}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{4}=RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow\frac{8\left(\sum a\right)^3}{3\left(\sum a+93\right)}\geq\frac{3}{4}\overset{\sum a=t}{\Leftrightarrow}\frac{8t^3}{3(t+93)}\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow 32t^3\geq 9(t+93)\Leftrightarrow 32t^3-9t-837\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(t-3)\left(32t^2+96t+279\right)\geq 0$, care rezultă din: $(t-3)\geq 0$, (vezi $t=\sum a\geq 3\sqrt[3]{abc}=3$, cu egalitate pentru $a=b=c=1$).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

2) If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $\lambda\geq 1$ then

$$\sum\frac{a^3}{\sqrt{a+\lambda^2-1}}\geq\frac{3}{\lambda}.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție</u>

Avem:

$$LHS=\sum\frac{a^3}{\sqrt{a+\lambda^2-1}}=\sum\frac{\lambda a^3}{\sqrt{\lambda^2\left(a+\lambda^2-1\right)}}\overset{AGM}{\geq}\sum\frac{\lambda a^3}{\frac{\lambda^2+\left(a+\lambda^2-1\right)}{2}}=\sum\frac{2\lambda a^3}{a+2\lambda^2-1}\overset{Holder}{\geq}$$

$$\overset{Holder}{\geq}\frac{2\lambda\left(\sum a\right)^3}{3\sum\left(a+2\lambda^2-1\right)}=\frac{2\lambda\left(\sum a\right)^3}{3\left(\sum a+3\left(2\lambda^2-1\right)\right)}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{\lambda}=RHS$$, unde (1)

$$\Leftrightarrow\frac{2\lambda\left(\sum a\right)^3}{3\left(\sum a+3\left(2\lambda^2-1\right)\right)}\geq\frac{3}{\lambda}\overset{\sum a=t}{\Leftrightarrow}\frac{2\lambda t^3}{3\left(t+3\left(2\lambda^2-1\right)\right)}\geq\frac{3}{\lambda}\Leftrightarrow 2\lambda^2t^3\geq 9\left(t+3\left(2\lambda^2-1\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$2\lambda^2t^3-9t-27\left(2\lambda^2-1\right)\geq 0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow(t-3)\left(32\lambda^2t^2+6\lambda^2t+9\left(2\lambda^2-1\right)\right)\geq 0$, care rezultă din: $(t-3)\geq 0$, (vezi $t=\sum a\geq 3\sqrt[3]{abc}=3$, cu egalitate pentru $a=b=c=1$)și condiția din ipoteză $\lambda\geq 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

3) If $a,b,c\geq 0$, $(a+1)(b+1)(c+1)=1$ and $\lambda\geq 1$ then

$$\sum\frac{(a+1)^3}{\sqrt{a+\lambda^2}}\geq\frac{3}{\lambda}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Avem:

Notând $(a+1,b+1,c+1)=(x,y,z)$, problema se reformulează:

If $x,y,z>0$, $xyz=1$ and $\lambda\geq 1$ then

$$\sum\frac{x^3}{\sqrt{x+\lambda^2-1}}\geq\frac{3}{\lambda}.$$

$$LHS=\sum\frac{x^3}{\sqrt{x+\lambda^2-1}}=\sum\frac{\lambda x^3}{\sqrt{\lambda^2\left(x+\lambda^2-1\right)}}\overset{AGM}{\geq}\sum\frac{\lambda x^3}{\frac{\lambda^2+\left(x+\lambda^2-1\right)}{2}}=\sum\frac{2\lambda x^3}{x+2\lambda^2-1}\overset{Holder}{\geq}$$

$$\overset{Holder}{\geq}\frac{2\lambda\left(\sum x\right)^3}{3\sum\left(x+2\lambda^2-1\right)}=\frac{2\lambda\left(\sum x\right)^3}{3\left(\sum x+3\left(2\lambda^2-1\right)\right)}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{\lambda}=RHS$$, unde (1)

$$\Leftrightarrow\frac{2\lambda\left(\sum x\right)^3}{3\left(\sum x+3\left(2\lambda^2-1\right)\right)}\geq\frac{3}{\lambda}\overset{\sum x=t}{\Leftrightarrow}\frac{2\lambda t^3}{3\left(t+3\left(2\lambda^2-1\right)\right)}\geq\frac{3}{\lambda}\Leftrightarrow 2\lambda^2t^3\geq 9\left(t+3\left(2\lambda^2-1\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$2\lambda^2t^3-9t-27\left(2\lambda^2-1\right)\geq 0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow(t-3)\left(32\lambda^2t^2+6\lambda^2t+9\left(2\lambda^2-1\right)\right)\geq 0$, care rezultă din: $(t-3)\geq 0$, (vezi $t=\sum x\geq 3\sqrt[3]{xyz}=3$, cu egalitate pentru $x=y=z=1$)și condiția din ipoteză $\lambda\geq 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1\Leftrightarrow a=b=c=0$.

Aplicația34

1) If $a,b,c>0$, $a^5b^5+b^5c^5+c^5a^5+a^5b^5c^5=4$ then

$$\sqrt[3]{a^5+2}+\sqrt[3]{b^5+2}+\sqrt[3]{c^5+2}\geq 3\sqrt[3]{3}.$$

Zaza Mzhavanadze, Georgia, RMM 5/2022

Soluție

Lema

If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx+xyz=4$ then

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}=1.$$

Demonstrație

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}=1\Leftrightarrow\sum(y+2)(z+2)=\prod(x+2)\Leftrightarrow\sum yz+xyz=4.$$

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=(a^5,b^5,c^5)$ problema se poate reformula:

If $a,b,c>0$, $\frac{1}{a^5+2}+\frac{1}{a^5+2}+\frac{1}{a^5+2}=1$ then

$$\sqrt[3]{a^5+2}+\sqrt[3]{b^5+2}+\sqrt[3]{c^5+2}\ge 3\sqrt[3]{3}.$$

Folosind inegalitatea lui Holder obținem:

$$\sum\sqrt[3]{a^5+2}\cdot\sum\sqrt[3]{a^5+2}\cdot\sum\sqrt[3]{a^5+2}\cdot\sum\frac{1}{a^5+2}\ge\left(\sum 1\right)^4\Leftrightarrow\left(\sum\sqrt[3]{a^5+2}\right)^3\cdot\sum\frac{1}{a^5+2}\ge 3^4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sum\sqrt[3]{a^5+2}\right)^3\cdot 1\ge 3^4\Leftrightarrow\sum\sqrt[3]{a^5+2}\ge\sqrt[3]{3^4}\Leftrightarrow\sum\sqrt[3]{a^5+2}\ge 3\sqrt[3]{3}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$

2) If $a,b,c>0$, $a^nb^n+b^nc^n+c^na^n+a^nb^nc^n=4$ then

$$\sqrt[3]{a^n+2}+\sqrt[3]{b^n+2}+\sqrt[3]{c^n+2}\ge 3\sqrt[3]{3}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx+xyz=4$ then

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}=1.$$

Demonstrație

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}=1\Leftrightarrow\sum(y+2)(z+2)=\prod(x+2)\Leftrightarrow\sum yz+xyz=4.$$

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=(a^n,b^n,c^n)$ problema se poate reformula:

If $a,b,c>0$, $\frac{1}{a^n+2}+\frac{1}{a^n+2}+\frac{1}{a^n+2}=1$ then

$$\sqrt[3]{a^n+2}+\sqrt[3]{b^n+2}+\sqrt[3]{c^n+2}\ge 3\sqrt[3]{3}.$$

Folosind inegalitatea lui Holder obținem:

$$\sum\sqrt[3]{a^n+2}\cdot\sum\sqrt[3]{a^n+2}\cdot\sum\sqrt[3]{a^n+2}\cdot\sum\frac{1}{a^n+2}\ge\left(\sum 1\right)^4\Leftrightarrow\left(\sum\sqrt[3]{a^n+2}\right)^3\cdot\sum\frac{1}{a^n+2}\ge 3^4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sum\sqrt[3]{a^n+2}\right)^3\cdot 1\ge 3^4\Leftrightarrow\sum\sqrt[3]{a^n+2}\ge\sqrt[3]{3^4}\Leftrightarrow\sum\sqrt[3]{a^n+2}\ge 3\sqrt[3]{3}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

3) If $a,b,c>0$, $a^nb^n+b^nc^n+c^na^n+a^nb^nc^n=4$ then

$$\sqrt[4]{a^n+2}+\sqrt[4]{b^n+2}+\sqrt[4]{c^n+2}\geq 3\sqrt[4]{3}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx+xyz=4$ then

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}=1.$$

Demonstrație

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}=1\Leftrightarrow\sum(y+2)(z+2)=\prod(x+2)\Leftrightarrow\sum yz+xyz=4.$$

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=(a^n,b^n,c^n)$ problema se poate reformula:

If $a,b,c>0$, $\frac{1}{a^n+2}+\frac{1}{a^n+2}+\frac{1}{a^n+2}=1$ then

$$\sqrt[4]{a^n+2}+\sqrt[4]{b^n+2}+\sqrt[4]{c^n+2}\geq 3\sqrt[4]{3}.$$

Folosind inegalitatea lui Holder obținem:

$$\sum\sqrt[4]{a^n+2}\cdot\sum\sqrt[4]{a^n+2}\cdot\sum\sqrt[4]{a^n+2}\cdot\sum\sqrt[4]{a^n+2}\cdot\sum\frac{1}{a^n+2}\geq\left(\sum 1\right)^5\Leftrightarrow$$

$$\left(\sum\sqrt[4]{a^n+2}\right)^4\cdot\sum\frac{1}{a^n+2}\geq 3^5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sum\sqrt[4]{a^n+2}\right)^4\cdot 1\geq 3^5\Leftrightarrow\sum\sqrt[4]{a^n+2}\geq\sqrt[4]{3^5}\Leftrightarrow\sum\sqrt[4]{a^n+2}\geq 3\sqrt[4]{3}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

4) If $a,b,c>0$, $a^nb^n+b^nc^n+c^na^n+a^nb^nc^n=4$ then

$$\sqrt[k]{a^n+2}+\sqrt[k]{b^n+2}+\sqrt[k]{c^n+2}\geq 3\sqrt[k]{3}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx+xyz=4$ then

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}=1.$$

Demonstrație

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}=1 \Leftrightarrow \sum(y+2)(z+2)=\prod(x+2) \Leftrightarrow \sum yz+xyz=4.$$

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=(a^n,b^n,c^n)$ problema se poate reformula:

5) If $a,b,c>0$, $\frac{1}{a^n+2}+\frac{1}{a^n+2}+\frac{1}{a^n+2}=1$ then

$$\sqrt[k]{a^n+2}+\sqrt[k]{b^n+2}+\sqrt[k]{c^n+2}\ge 3\sqrt[k]{3}.$$

Folosind inegalitatea lui Holder obținem:

$$\underbrace{\sum\sqrt[k]{a^n+2}\cdot\ldots\cdot\sum\sqrt[k]{a^n+2}}_{k}\cdot\sum\frac{1}{a^n+2}\ge\left(\sum 1\right)^{k+1} \Leftrightarrow \left(\sum\sqrt[k]{a^n+2}\right)^k\cdot\sum\frac{1}{a^n+2}\ge 3^{k+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum\sqrt[k]{a^n+2}\right)^k\cdot 1\ge 3^{k+1} \Leftrightarrow \sum\sqrt[k]{a^n+2}\ge\sqrt[k]{3^{k+1}} \Leftrightarrow \sum\sqrt[k]{a^n+2}\ge 3\sqrt[k]{3}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația35

1) If $a,b,c,d>0$, $abcd=1$ then

$$\frac{a^4}{a+b+c}+\frac{b^4}{b+c+d}+\frac{c^4}{c+d+a}+\frac{d^4}{d+a+b}\ge\frac{4}{3}.$$

Neculai Stanciu, Buzău, RMT1/2022, O.IX.355

Soluție

$$LHS=\sum\frac{a^4}{a+b+c}\overset{Holder}{\ge}\frac{\left(\sum a\right)^4}{4^2\sum(a+b+c)}=\frac{\left(\sum a\right)^4}{16\cdot 3\sum a}=\frac{\left(\sum a\right)^3}{48}\overset{AM-GM}{\ge}\frac{\left(4\sqrt[4]{abcd}\right)^3}{48}=\frac{4^3}{48}=$$

$$=\frac{4}{3}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=1$.

2) If $a,b,c,d>0$, $abcd=1$ and $n\in\mathbf{N}, n\ge 2$ then

$$\frac{a^n}{a+b+c}+\frac{b^n}{b+c+d}+\frac{c^n}{c+d+a}+\frac{d^n}{d+a+b}\ge\frac{4}{3}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$LHS=\sum\frac{a^n}{a+b+c}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^n}{4^{n-2}\sum(a+b+c)}=\frac{\left(\sum a\right)^n}{4^{n-2}\cdot 3\sum a}=\frac{\left(\sum a\right)^{n-1}}{4^{n-2}\cdot 3}\overset{AM-GM}{\geq}\frac{\left(4\sqrt[4]{abcd}\right)^{n-1}}{4^{n-2}\cdot 3}=$$

$$=\frac{4^{n-1}}{4^{n-2}\cdot 3}=\frac{4}{3}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=1$.

3) If $a,b,c,d>0$, $abcd=1$ and $n\in\mathbf{N}, n\geq 2, \lambda\geq 0$ then

$$\frac{a^n}{\lambda a+b+c}+\frac{b^n}{\lambda b+c+d}+\frac{c^n}{\lambda c+d+a}+\frac{d^n}{\lambda d+a+b}\geq\frac{4}{\lambda+2}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Avem:

$$LHS=\sum\frac{a^n}{\lambda a+b+c}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^n}{4^{n-2}\sum(\lambda a+b+c)}=\frac{\left(\sum a\right)^n}{4^{n-2}\cdot(\lambda+2)\sum a}=\frac{\left(\sum a\right)^{n-1}}{4^{n-2}\cdot(\lambda+2)}\overset{AM-GM}{\geq}\frac{\left(4\sqrt[4]{abcd}\right)^{n-1}}{4^{n-2}\cdot(\lambda+2)}=$$

$$=\frac{4^{n-1}}{4^{n-2}\cdot(\lambda+2)}=\frac{4}{\lambda+2}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=1$.

4) If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $n\in\mathbf{N}, n\geq 2, \lambda\geq 0$ then

$$\frac{a^n}{\lambda a+b}+\frac{b^n}{\lambda b+c}+\frac{c^n}{\lambda c+a}+\geq\frac{3}{\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$LHS=\sum\frac{a^n}{\lambda a+b}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^n}{3^{n-2}\sum(\lambda a+b)}=\frac{\left(\sum a\right)^n}{3^{n-2}\cdot(\lambda+1)\sum a}=\frac{\left(\sum a\right)^{n-1}}{3^{n-2}\cdot(\lambda+1)}\overset{AM-GM}{\geq}\frac{\left(3\sqrt[4]{abc}\right)^{n-1}}{3^{n-2}\cdot(\lambda+1)}=$$

$$=\frac{3^{n-1}}{3^{n-2}\cdot(\lambda+1)}=\frac{3}{\lambda+1}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația36

1) If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{a^5}{b+c}\geq\frac{1}{2}abc\left(a+b+c\right).$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities 6/2022, Problem(40)

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^5}{b+c}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^5}{3^3\sum\left(b+c\right)}=\frac{\left(\sum a\right)^5}{27\cdot 2\sum a}=\frac{\left(\sum a\right)^4}{27\cdot 2}\overset{(1)}{\geq}\frac{1}{2}abc\left(a+b+c\right)=RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow\dfrac{\left(\sum a\right)^4}{27\cdot 2}\geq\dfrac{1}{2}abc\sum a\Leftrightarrow\left(\sum a\right)^3\geq 27abc$, care rezultă din inegalitatea mediilor.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

2) If $a,b,c>0$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\sum\frac{a^{n+4}}{b+c}\geq\frac{1}{2\cdot 3^n}abc\left(a+b+c\right)^n.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^{n+4}}{b+c}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^{n+4}}{3^{n+3}\sum\left(b+c\right)}=\frac{\left(\sum a\right)^{n+4}}{3^{n+3}\cdot 2\sum a}=\frac{\left(\sum a\right)^{n+3}}{3^{n+3}\cdot 2}\overset{(1)}{\geq}\frac{1}{2\cdot 3^n}abc\left(a+b+c\right)^n=RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow\dfrac{\left(\sum a\right)^{n+3}}{3^{n+3}\cdot 2}\geq\dfrac{1}{2\cdot 3^n}abc\left(\sum a\right)^n\Leftrightarrow\left(\sum a\right)^3\geq 27abc$, vezi inegalitatea mediilor.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

3) If $a,b,c>0$ and $n\in\mathbf{N}$, $\lambda\geq 0$ then

$$\sum\frac{a^{n+4}}{b+\lambda c}\geq\frac{1}{\left(\lambda+1\right)\cdot 3^n}abc\left(a+b+c\right)^n.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^{n+4}}{b+\lambda c}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^{n+4}}{3^{n+3}\sum\left(b+\lambda c\right)}=\frac{\left(\sum a\right)^{n+4}}{3^{n+3}\cdot\left(\lambda+1\right)\sum a}=\frac{\left(\sum a\right)^{n+3}}{3^{n+3}\cdot\left(\lambda+1\right)}\overset{(1)}{\geq}$$

$$\overset{(1)}{\geq}\frac{1}{\left(\lambda+1\right)\cdot 3^n}abc\left(a+b+c\right)^n=RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{\left(\sum a\right)^{n+3}}{3^{n+3}\cdot(\lambda+1)} \geq \frac{1}{(\lambda+1)\cdot 3^n}abc\left(\sum a\right)^n \Leftrightarrow \left(\sum a\right)^3 \geq 27abc$, vezi AM-GM.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Aplicația37

1) If $a,b,c>0$ then

$$\sum \frac{a^5}{b+c} \geq \frac{1}{2}abc(a+b+c).$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities 6/2020,Problem(40)

Soluție.

$$LHS=\sum \frac{a^5}{b+c} \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^5}{3^3\sum(b+c)} = \frac{\left(\sum a\right)^5}{27\cdot 2\sum a} = \frac{\left(\sum a\right)^4}{27\cdot 2} \overset{(1)}{\geq} \frac{1}{2}abc(a+b+c)=RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{\left(\sum a\right)^4}{27\cdot 2} \geq \frac{1}{2}abc\sum a \Leftrightarrow \left(\sum a\right)^3 \geq 27abc$, vezi AM-GM.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

2) If $a,b,c>0$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\sum \frac{a^{n+4}}{b+c} \geq \frac{1}{2\cdot 3^n}abc(a+b+c)^n.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum \frac{a^{n+4}}{b+c} \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^{n+4}}{3^{n+3}\sum(b+c)} = \frac{\left(\sum a\right)^{n+4}}{3^{n+3}\cdot 2\sum a} = \frac{\left(\sum a\right)^{n+3}}{3^{n+3}\cdot 2} \overset{(1)}{\geq} \frac{1}{2\cdot 3^n}abc(a+b+c)^n=RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{\left(\sum a\right)^{n+3}}{3^{n+3}\cdot 2} \geq \frac{1}{2\cdot 3^n}abc\left(\sum a\right)^n \Leftrightarrow \left(\sum a\right)^3 \geq 27abc$, vezi AM-GM.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

3) If $a,b,c>0$ and $n\in\mathbf{N}$, $\lambda\geq 0$ then

$$\sum \frac{a^{n+4}}{b+\lambda c} \geq \frac{1}{(\lambda+1)\cdot 3^n}abc(a+b+c)^n.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^{n+4}}{b+\lambda c}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^{n+4}}{3^{n+3}\sum(b+\lambda c)}=\frac{\left(\sum a\right)^{n+4}}{3^{n+3}\cdot(\lambda+1)\sum a}=\frac{\left(\sum a\right)^{n+3}}{3^{n+3}\cdot(\lambda+1)}\overset{(1)}{\geq}$$

$$\overset{(1)}{\geq}\frac{1}{(\lambda+1)\cdot 3^{n}}abc(a+b+c)^{n}=RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow\dfrac{\left(\sum a\right)^{n+3}}{3^{n+3}\cdot(\lambda+1)}\geq\dfrac{1}{(\lambda+1)\cdot 3^{n}}abc\left(\sum a\right)^{n}\Leftrightarrow\left(\sum a\right)^{3}\geq 27abc$, vezi AM-GM.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Aplicația38

1) If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{a^3}{b^2(5a+2b)}\geq\frac{3}{7}.$$

Kaltrin Surdulli, Pure Inequalities6/2022

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Hoder obținem:

$$LHS=\sum\frac{a^3}{b^2(5a+2b)}=\sum\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^3}{5\frac{a}{b}+2}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum\frac{a}{b}\right)^3}{3\sum\left(5\frac{a}{b}+2\right)}=\frac{\left(\sum\frac{a}{b}\right)^3}{3\left(5\sum\frac{a}{b}+6\right)}=\frac{t^3}{3(5t+6)}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{7}=RHS$$

,unde(1) $\Leftrightarrow\dfrac{t^3}{3(5t+6)}\geq\dfrac{3}{7}\Leftrightarrow 7t^3-45t-54\geq 0\Leftrightarrow(t-3)(7t^2+21t+18)\geq 0$, care rezultă din

$t\geq 3$, (vezi $t=\sum\frac{a}{b}\overset{AGM}{\geq}3\sqrt[3]{\prod\frac{a}{b}}=3$, cu egalitate pentru $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}\Leftrightarrow a=b=c$).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

2) If $a,b,c>0$ and $\lambda,\mu\geq 0$, $\lambda^2+\mu^2\neq 0$ then

$$\sum\frac{a^3}{b^2(\lambda a+\mu b)}\geq\frac{3}{\lambda+\mu}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind inegalitatea lui Hoder obținem:

$$LHS=\sum\frac{a^3}{b^2(\lambda a+\mu b)}=\sum\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^3}{\lambda\frac{a}{b}+\mu}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum\frac{a}{b}\right)^3}{3\sum\left(\lambda\frac{a}{b}+\mu\right)}=\frac{\left(\sum\frac{a}{b}\right)^3}{3\left(\lambda\sum\frac{a}{b}+3\mu\right)}=\frac{t^3}{3(\lambda t+3\mu)}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{7}=RHS$$

,unde(1) $\Leftrightarrow\frac{t^3}{3(\lambda t+3\mu)}\geq\frac{3}{\lambda+\mu}\Leftrightarrow(\lambda+\mu)t^3-9\lambda t-27\mu\geq0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(t-3)\left[(\lambda+\mu)t^2+3(\lambda+\mu)t+9\mu\right]\geq0$, care rezultă din $t\geq3$,

(vezi $t=\sum\frac{a}{b}\overset{AGM}{\geq}3\sqrt[3]{\prod\frac{a}{b}}=3$, cu egalitate pentru $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}\Leftrightarrow a=b=c$) și condițiile din ipoteză $\lambda,\mu\geq0,\lambda^2+\mu^2\neq0$, care asigură $\left[(\lambda+\mu)t^2+3(\lambda+\mu)t+9\mu\right]>0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

3) If $a,b,c>0$ and $\lambda\geq0$ then

$$\sum\frac{a^3}{b^2(a+\lambda b)}\geq\frac{3}{\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție.</u>

Folosind inegalitatea lui Hoder obținem:

$$LHS=\sum\frac{a^3}{b^2(a+\lambda b)}=\sum\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^3}{\frac{a}{b}+\lambda}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum\frac{a}{b}\right)^3}{3\sum\left(\frac{a}{b}+\lambda\right)}=\frac{\left(\sum\frac{a}{b}\right)^3}{3\left(\sum\frac{a}{b}+3\lambda\right)}=\frac{t^3}{3(t+3\lambda)}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{\lambda+1}=RHS$$

,unde(1) $\Leftrightarrow\frac{t^3}{3(t+3\lambda)}\geq\frac{3}{\lambda+1}\Leftrightarrow(\lambda+1)t^3-9t-27\lambda\geq0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(t-3)\left[(\lambda+1)t^2+3(\lambda+1)t+9\lambda\right]\geq0$, care rezultă din $t\geq3$,

(vezi $t=\sum\frac{a}{b}\overset{AGM}{\geq}3\sqrt[3]{\prod\frac{a}{b}}=3$, cu egalitate pentru $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}\Leftrightarrow a=b=c$) și condiția din ipoteză $\lambda\geq0$, care asigură $\left[(\lambda+1)t^2+3(\lambda+1)t+9\lambda\right]>0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

<u>Aplicația39</u>

1) If $a,b,c>0$ then

$$\frac{1}{(1+2a)^3}+\frac{1}{(1+2b)^3}+\frac{1}{(1+2c)^3}\geq\frac{1}{3(1+2abc)}.$$

An Zhenping, China, Mathematical Reflections 3/2022

Soluție.

Lema

If $a,b,c>0$ then

$$\frac{1}{(1+2a)^3}\geq\frac{1}{1+2abc}\cdot\frac{b^2c^2}{(ab+bc+ca)^2}.$$

Demonstrație.

Cu inegalitatea lui Holder obținem:

$$(1+abc+abc)\left(1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\right)\left(1+\frac{a}{c}+\frac{a}{b}\right)\geq(1+a+a)^3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(1+2abc)\frac{ab+bc+ca}{bc}\cdot\frac{ab+bc+ca}{bc}\geq(1+2a)^3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{(1+2a)^3}\geq\frac{1}{1+2abc}\cdot\frac{b^2c^2}{(ab+bc+ca)^2}.$$

Folosind **Lema** obținem:

$$LHS=\sum\frac{1}{(1+2a)^3}\overset{Lema}{\geq}\sum\frac{1}{1+2abc}\cdot\frac{b^2c^2}{(ab+bc+ca)^2}=\frac{\sum b^2c^2}{(1+2abc)(ab+bc+ca)^2}\overset{CS}{\geq}$$

$$\overset{CS}{\geq}\frac{\frac{1}{3}\left(\sum bc\right)^2}{(1+2abc)(ab+bc+ca)^2}=\frac{1}{3(1+2abc)}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

2) If $a,b,c,\lambda>0$ then

$$\frac{1}{(\lambda+2a)^3}+\frac{1}{(\lambda+2b)^3}+\frac{1}{(\lambda+2c)^3}\geq\frac{1}{3(\lambda+2abc)}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema

If $a,b,c,\lambda>0$ then

$$\frac{1}{(\lambda+2a)^3}\geq\frac{1}{\lambda+2abc}\cdot\frac{b^2c^2}{(ab+bc+ca)^2}.$$

Demonstrație.

Cu inegalitatea lui Holder obținem:

$$(\lambda+abc+abc)\left(\lambda+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\right)\left(\lambda+\frac{a}{c}+\frac{a}{b}\right)\geq(\lambda+a+a)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\lambda+2abc)\frac{ab+bc+ca}{bc}\cdot\frac{ab+bc+ca}{bc}\geq(\lambda+2a)^3 \Leftrightarrow \frac{1}{(\lambda+2a)^3}\geq\frac{1}{\lambda+2abc}\cdot\frac{b^2c^2}{(ab+bc+ca)^2}.$$

Folosind **Lema** obținem:

$$LHS=\sum\frac{1}{(\lambda+2a)^3}\overset{Lema}{\geq}\sum\frac{1}{\lambda+2abc}\cdot\frac{b^2c^2}{(ab+bc+ca)^2}=\frac{\sum b^2c^2}{(\lambda+2abc)(ab+bc+ca)^2}\overset{CS}{\geq}$$

$$\overset{CS}{\geq}\frac{\frac{1}{3}\left(\sum bc\right)^2}{(\lambda+2abc)(ab+bc+ca)^2}=\frac{1}{3(\lambda+2abc)}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\lambda=1$.

Aplicația40

1) If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{a^4+3}{a+b}\geq 6.$$

Sidi Abdallah Lemrabott, RMM 9/2022

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^4+3}{a+b}=\sum\frac{a^4}{a+b}+3\sum\frac{1}{a+b}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^4}{9\sum(a+b)}+3\cdot\frac{\left(\sum 1\right)^2}{\sum(a+b)}=\frac{\left(\sum a\right)^4}{9\cdot 2\sum a}+3\cdot\frac{9}{2\sum a}=$$

$=\frac{\left(\sum a\right)^3}{18}+\frac{27}{2\sum a}\overset{(1)}{\geq}6=RHS$, unde (1) $\frac{\left(\sum a\right)^3}{18}+\frac{27}{2\sum a}\geq 6$, care rezultă din:

Notând $\sum a=t$ inegalitatea se scrie:

$\frac{t^3}{18}+\frac{27}{2t}\geq 6\Leftrightarrow t^4-108t+243\geq 0\Leftrightarrow(t-3)^2\left(t^2+6t+27\right)\geq 0$, egalitate pentru $t=3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

2) If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{a^5+4}{a+b}\geq\frac{15}{2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^5+4}{a+b}=\sum\frac{a^5}{a+b}+4\sum\frac{1}{a+b}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^5}{3^2\sum(a+b)}+4\cdot\frac{\left(\sum 1\right)^2}{\sum(a+b)}=\frac{\left(\sum a\right)^5}{27\cdot 2\sum a}+4\cdot\frac{9}{2\sum a}=$$

$=\frac{\left(\sum a\right)^4}{54}+\frac{18}{\sum a}\overset{(1)}{\geq}\frac{15}{2}=RHS$, unde (1) $\Leftrightarrow \frac{\left(\sum a\right)^4}{54}+\frac{18}{\sum a}\geq\frac{15}{2}$, care rezultă din:

Notând $\sum a=t$ inegalitatea se scrie:

$\frac{t^4}{54}+\frac{18}{t}\geq\frac{15}{2}\Leftrightarrow t^5-405t+972\geq 0\Leftrightarrow (t-3)^2\left(t^3+6t^2+27t+108\right)\geq 0$,

evident cu egalitate pentru $t=3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

3) If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{a^6+5}{a+b}\geq 9.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^6+5}{a+b}=\sum\frac{a^6}{a+b}+5\sum\frac{1}{a+b}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^6}{3^4\sum(a+b)}+5\cdot\frac{\left(\sum 1\right)^2}{\sum(a+b)}=\frac{\left(\sum a\right)^5}{81\cdot 2\sum a}+5\cdot\frac{9}{2\sum a}=$$

$=\frac{\left(\sum a\right)^5}{162}+\frac{45}{2\sum a}\overset{(1)}{\geq}9=RHS$, unde (1) $\Leftrightarrow \frac{\left(\sum a\right)^5}{162}+\frac{45}{2\sum a}\geq 9$, care rezultă din:

Notând $\sum a=t$ inegalitatea se scrie:

$\frac{t^5}{162}+\frac{45}{2t}\geq 9\Leftrightarrow t^6-1458t+3645\geq 0\Leftrightarrow (t-3)^2\left(t^4+6t^3+27t^2+108t+405\right)\geq 0$, evident.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

4) If $a,b,c>0$ and $n\in\mathbf{N}^*$ then

$$\sum\frac{a^{n+1}+n}{a+b}\geq\frac{3}{2}(n+1).$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^{n+1}+n}{a+b}=\sum\frac{a^{n+1}}{a+b}+n\sum\frac{1}{a+b}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^{n+1}}{3^{n-1}\sum(a+b)}+n\cdot\frac{\left(\sum 1\right)^{2}}{\sum(a+b)}=\frac{\left(\sum a\right)^{n+1}}{3^{n-1}\cdot 2\sum a}+n\cdot\frac{9}{2\sum a}=$$

$$=\frac{\left(\sum a\right)^{n}}{2\cdot 3^{n-1}}+\frac{9n}{2\sum a}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{2}(n+1)=RHS$$, unde (1) $\Leftrightarrow \frac{\left(\sum a\right)^{n}}{2\cdot 3^{n-1}}+\frac{9n}{2\sum a}\geq\frac{3}{2}(n+1)$,adevărată din:

Notând $\sum a=t$ inegalitatea se scrie:

$$\frac{t^{n}}{2\cdot 3^{n-1}}+\frac{9n}{2t}\geq\frac{3}{2}(n+1)\Leftrightarrow t^{n+1}-(n+1)3^{n}t+n\cdot 3^{n+1}\geq 0\Leftrightarrow$$

$(t-3)^{2}\left(t^{n-1}+6t^{n-2}+27t^{n-3}+108t^{n-4}+(n-1)3^{n-2}t+n\cdot 3^{n-1}\right)\geq 0$, cu egalitate pentru $t=3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația41

1) If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\sum\frac{a^{3}}{\sqrt{a+24}}\geq\frac{3}{5}.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, MathTime, Problem(85)

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^{3}}{\sqrt{a+24}}=\sum\frac{5a^{3}}{\sqrt{25(a+24)}}\overset{AM-GM}{\geq}\sum\frac{5a^{3}}{\frac{25+(a+24)}{2}}=\sum\frac{10a^{3}}{a+49}\overset{Holder}{\geq}$$

$$\overset{Holder}{\geq}\frac{10\left(\sum a\right)^{3}}{3\sum(a+49)}=\frac{10\left(\sum a\right)^{3}}{3\left(\sum a+147\right)}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{5}=RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow\frac{10\left(\sum a\right)^{3}}{3\left(\sum a+147\right)}\geq\frac{3}{5}\overset{\sum a=t}{\Leftrightarrow}\frac{10t^{3}}{3(t+147)}\geq\frac{3}{5}\Leftrightarrow 50t^{3}-9t-1323\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(t-3)\left(50t^{2}+150t+441\right)\geq 0\Leftrightarrow(t-3)\geq 0$, care rezultă din $t=\sum a\geq 3\sqrt[3]{abc}=3\sqrt[3]{1}=3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

2) If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $\lambda\geq 1$ then

$$\sum\frac{a^{3}}{\sqrt{a+\lambda^{2}-1}}\geq\frac{3}{\lambda}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^3}{\sqrt{a+\lambda^2-1}}=\sum\frac{\lambda a^3}{\sqrt{\lambda^2\left(a+\lambda^2-1\right)}}\overset{AM-GM}{\geq}\sum\frac{\lambda a^3}{\frac{\lambda^2+\left(a+\lambda^2-1\right)}{2}}=\sum\frac{2\lambda a^3}{a+2\lambda^2-1}\overset{Holder}{\geq}$$

$$\overset{Holder}{\geq}\frac{2\lambda\left(\sum a\right)^3}{3\sum\left(a+2\lambda^2-1\right)}=\frac{2\lambda\left(\sum a\right)^3}{3\left(\sum a+2\lambda^2-1\right)}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{\lambda}=RHS \text{, unde } (1)\Leftrightarrow\frac{2\lambda\left(\sum a\right)^3}{3\left(\sum a+2\lambda^2-1\right)}\geq\frac{3}{\lambda}$$

$$\overset{\sum a=t}{\Leftrightarrow}\frac{2\lambda t^3}{3\left(t+3\left(2\lambda^2-1\right)\right)}\geq\frac{3}{\lambda}\Leftrightarrow 2\lambda^2t^3-9t+27\left(1-2\lambda^2\right)\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(t-3)\left(2\lambda^2t^2+6\lambda^2t+9\left(2\lambda^2-1\right)\right)\geq 0\Leftrightarrow(t-3)\geq 0\text{, vezi: } t=\sum a\geq 3\sqrt[3]{abc}=3\sqrt[3]{1}=3.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

3) If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\sum\frac{a^3}{\sqrt{a+99}}\geq\frac{3}{10}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^3}{\sqrt{a+99}}=\sum\frac{10a^3}{\sqrt{100(a+99)}}\overset{AM-GM}{\geq}\sum\frac{10a^3}{\frac{100+(a+99)}{2}}=\sum\frac{20a^3}{a+199}\overset{Holder}{\geq}$$

$$\overset{Holder}{\geq}\frac{20\left(\sum a\right)^3}{3\sum(a+199)}=\frac{20\left(\sum a\right)^3}{3\left(\sum a+199\right)}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{10}=RHS,$$

$$\text{unde } (1)\Leftrightarrow\frac{20\left(\sum a\right)^3}{3\left(\sum a+3\cdot 199\right)}\geq\frac{3}{10}\overset{\sum a=t}{\Leftrightarrow}\frac{20t^3}{3(t+199)}\geq\frac{3}{10}\Leftrightarrow 200t^3-9t-5373\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(t-3)\left(200t^2+600t+1791\right)\geq 0\Leftrightarrow(t-3)\geq 0\text{, vezi: } t=\sum a\geq 3\sqrt[3]{abc}=3\sqrt[3]{1}=3.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

4) If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $\lambda\geq 1$ then

$$\sum\frac{a^4}{\sqrt{a+\lambda^2-1}}\geq\frac{3}{\lambda}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^4}{\sqrt{a+\lambda^2-1}}=\sum\frac{\lambda a^4}{\sqrt{\lambda^2\left(a+\lambda^2-1\right)}}\overset{AM-GM}{\geq}\sum\frac{\lambda a^4}{\frac{\lambda^2+\left(a+\lambda^2-1\right)}{2}}=\sum\frac{2\lambda a^4}{a+2\lambda^2-1}\overset{Holder}{\geq}$$

$$\overset{Holder}{\geq}\frac{2\lambda\left(\sum a\right)^4}{3^2\sum\left(a+2\lambda^2-1\right)}=\frac{2\lambda\left(\sum a\right)^4}{9\left(\sum a+2\lambda^2-1\right)}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{\lambda}=RHS\text{, unde (1)}\Leftrightarrow\frac{2\lambda\left(\sum a\right)^4}{9\left(\sum a+2\lambda^2-1\right)}\geq\frac{3}{\lambda}$$

$$\overset{\sum a=t}{\Leftrightarrow}\frac{2\lambda t^4}{9\left(t+3\left(2\lambda^2-1\right)\right)}\geq\frac{3}{\lambda}\Leftrightarrow 2\lambda^2t^4-27t+81\left(1-2\lambda^2\right)\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(t-3)\left(2\lambda^2t^3+6\lambda^2t^2+18\lambda^2t+27\left(2\lambda^2-1\right)\right)\geq 0\Leftrightarrow(t-3)\geq 0,$$

care rezultă din $t=\sum a\geq 3\sqrt[3]{abc}=3\sqrt[3]{1}=3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

5) If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $\lambda\geq 1$ then

$$\sum\frac{a^5}{\sqrt{a+\lambda^2-1}}\geq\frac{3}{\lambda}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^5}{\sqrt{a+\lambda^2-1}}=\sum\frac{\lambda a^5}{\sqrt{\lambda^2\left(a+\lambda^2-1\right)}}\overset{AM-GM}{\geq}\sum\frac{\lambda a^5}{\frac{\lambda^2+\left(a+\lambda^2-1\right)}{2}}=\sum\frac{2\lambda a^5}{a+2\lambda^2-1}\overset{Holder}{\geq}$$

$$\overset{Holder}{\geq}\frac{2\lambda\left(\sum a\right)^5}{3^3\sum\left(a+2\lambda^2-1\right)}=\frac{2\lambda\left(\sum a\right)^5}{27\left(\sum a+2\lambda^2-1\right)}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{\lambda}=RHS,\ \frac{2\lambda\left(\sum a\right)^5}{27\left(\sum a+2\lambda^2-1\right)}\geq\frac{3}{\lambda}$$

unde (1) $\overset{\sum a=t}{\Leftrightarrow}\dfrac{2\lambda t^5}{27\left(t+3\left(2\lambda^2-1\right)\right)}\geq\dfrac{3}{\lambda}\Leftrightarrow 2\lambda^2t^5-81t+243\left(1-2\lambda^2\right)\geq 0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(t-3)\left(2\lambda^2t^4+6\lambda^2t^3+18\lambda^2t^2+54\lambda^2t+81\left(2\lambda^2-1\right)\right)\geq 0\Leftrightarrow(t-3)\geq 0,$$

care rezultă din $t=\sum a\geq 3\sqrt[3]{abc}=3\sqrt[3]{1}=3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

6) If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $\lambda\geq 1$, $n\in\mathbf{N}, n\geq 2$ then

$$\sum\frac{a^n}{\sqrt{a+\lambda^2-1}}\geq\frac{3}{\lambda}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^n}{\sqrt{a+\lambda^2-1}}=\sum\frac{\lambda a^n}{\sqrt{\lambda^2\left(a+\lambda^2-1\right)}}\overset{AM-GM}{\geq}\sum\frac{\lambda a^n}{\frac{\lambda^2+\left(a+\lambda^2-1\right)}{2}}=\sum\frac{2\lambda a^n}{a+2\lambda^2-1}\overset{Holder}{\geq}$$

$$\overset{Holder}{\geq}\frac{2\lambda\left(\sum a\right)^n}{3^{n-2}\sum\left(a+2\lambda^2-1\right)}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{\lambda}=RHS$$, unde (1) $\Leftrightarrow \frac{2\lambda\left(\sum a\right)^n}{3^{n-2}\left(\sum a+2\lambda^2-1\right)}\geq\frac{3}{\lambda}$

$$\overset{\sum a=t}{\Leftrightarrow}\frac{2\lambda t^n}{3^{n-2}\left(t+3\left(2\lambda^2-1\right)\right)}\geq\frac{3}{\lambda}\Leftrightarrow 2\lambda^2t^n-3^{n-1}t+3^n\left(1-2\lambda^2\right)\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(t-3)\left(2\lambda^2t^{n-1}+6\lambda^2t^{n-2}+18\lambda^2t^{n-3}+\ldots+2\cdot3^{n-2}\lambda^2t+3^{n-1}\left(2\lambda^2-1\right)\right)\geq 0\Leftrightarrow(t-3)\geq 0,$$

care rezultă din $t=\sum a\geq 3\sqrt[3]{abc}=3\sqrt[3]{1}=3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația41

1) If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{a}{\sqrt[3]{a^2+26bc}}+\frac{1}{a+b+c}\geq\frac{4}{3}.$$

Sidi Abdallah Lemrabott,RMM10/2022

Soluție.

Lema.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{a}{\sqrt[3]{a^2+26bc}}\geq\sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}}.$$

Demonstrație.

$$\left(\sum\frac{a}{\sqrt[3]{a^2+26bc}}\right)^3\sum a\left(a^2+26bc\right)\overset{Holder}{\geq}\left(\sum a\right)^4\Rightarrow\left(\sum\frac{a}{\sqrt[3]{a^2+26bc}}\right)^3\geq\frac{\left(\sum a\right)^4}{\sum a\left(a^2+26bc\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sum a\right)^4}{\sum a^3+3\cdot26abc}=\frac{\left(\sum a\right)^4}{\left(\sum a\right)^3-3\prod(b+c)+78abc}=\frac{\left(\sum a\right)^4}{\left(\sum a\right)^3-3\left(\sum a\sum bc-abc\right)+78abc}=$$

$$=\frac{\left(\sum a\right)^4}{\left(\sum a\right)^3-3\sum a\sum bc+81abc}\overset{(1)}{\geq}\frac{\sum a}{3}$$, unde (1) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sum a\right)^4}{\left(\sum a\right)^3 - 3\sum a \sum bc + 81abc} \geq \frac{\sum a}{3} \Leftrightarrow 3\left(\sum a\right)^3 \geq \left(\sum a\right)^3 - 3\sum a \sum bc + 81abc \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2\left(\sum a\right)^3 + 3\sum a \sum bc \geq 81abc$, care rezultă din inegalitatea mediilor:

$2\left(\sum a\right)^3 + 3\sum a \sum bc \geq 2\cdot 27abc + 3\cdot 9abc = 81abc$.

Din $\left(\sum \frac{a}{\sqrt[3]{a^2+26bc}}\right)^3 \geq \frac{\sum a}{3} \Rightarrow \sum \frac{a}{\sqrt[3]{a^2+26bc}} \geq \sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}}$.

Folosind **Lema** este suficient să arătăm că:

$$\sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}} + \frac{1}{a+b+c} \geq \frac{4}{3} \overset{\sum a = t}{\Leftrightarrow} \sqrt[3]{\frac{t}{3}} + \frac{1}{t} \geq \frac{4}{3} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{t}{3}} \geq \frac{4}{3} - \frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{t}{3} \geq \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{t}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{t}{3} \geq \frac{(4t-3)^3}{27t^3} \Leftrightarrow$$
$$9t^4 \geq (4t-3)^3 \Leftrightarrow 9t^4 - 64t^3 + 144t^2 - 108t + 27 \geq 0 \Leftrightarrow (t-3)^2(9t^2 - 10t + 3) \geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

2) If $a,b,c > 0$ then

$$\sum \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq 1.$$

Marin Chirciu

<u>**Soluție.**</u>

$$\left(\sum \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\right)^2 \sum a\left(a^2+8bc\right) \overset{Holder}{\geq} \left(\sum a\right)^3 \Rightarrow \left(\sum \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\right)^2 \geq \frac{\left(\sum a\right)^3}{\sum a\left(a^2+8bc\right)} =$$

$$= \frac{\left(\sum a\right)^3}{\sum a^3 + 3\cdot 8abc} = \frac{\left(\sum a\right)^3}{\left(\sum a\right)^3 - 3\prod(b+c) + 24abc} = \frac{\left(\sum a\right)^3}{\left(\sum a\right)^3 - 3\left(\sum a \sum bc - abc\right) + 24abc} =$$

$= \frac{\left(\sum a\right)^3}{\left(\sum a\right)^3 - 3\sum a \sum bc + 27abc} \overset{(1)}{\geq} 1$, unde (1) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\sum a\right)^3 \geq \left(\sum a\right)^3 - 3\sum a \sum bc + 27abc \Leftrightarrow 3\sum a \sum bc \geq 27abc \Leftrightarrow \sum a \sum bc \geq 9abc,$$

care rezultă din inegalitatea mediilor.

Din $\left(\sum \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\right)^2 \geq 1 \Rightarrow \sum \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

3) If $a,b,c>0$ and $abc=1$ then

$$\sum\frac{a}{\sqrt[4]{a^2+80bc}}+\frac{1}{a+b+c}\geq\frac{4}{3}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{a}{\sqrt[4]{a^2+80bc}}\geq\sqrt{\frac{a+b+c}{3}}.$$

Demonstrație.

$$\left(\sum\frac{a}{\sqrt[4]{a^2+80bc}}\right)^4\sum a\left(a^2+80bc\right)\overset{Holder}{\geq}\left(\sum a\right)^5\Rightarrow\left(\sum\frac{a}{\sqrt[4]{a^2+80bc}}\right)^4\geq\frac{\left(\sum a\right)^5}{\sum a\left(a^2+80bc\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sum a\right)^5}{\sum a^3+3\cdot 80abc}=\frac{\left(\sum a\right)^5}{\left(\sum a\right)^3-3\prod(b+c)+240abc}=\frac{\left(\sum a\right)^5}{\left(\sum a\right)^3-3\left(\sum a\sum bc-abc\right)+240abc}=$$

$$=\frac{\left(\sum a\right)^5}{\left(\sum a\right)^3-3\sum a\sum bc+243abc}\overset{(1)}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^2}{9}$$, unde (1) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sum a\right)^5}{\left(\sum a\right)^3-3\sum a\sum bc+81abc}\geq\frac{\left(\sum a\right)^2}{9}\Leftrightarrow 9\left(\sum a\right)^3\geq\left(\sum a\right)^3-3\sum a\sum bc+81abc\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 8\left(\sum a\right)^3+3\sum a\sum bc\geq 243abc$, care rezultă din inegalitatea mediilor:

$8\left(\sum a\right)^3+3\sum a\sum bc\geq 8\cdot 27abc+3\cdot 9abc=243abc$.

Din $\left(\sum\frac{a}{\sqrt[4]{a^2+80bc}}\right)^4\geq\left(\frac{\sum a}{3}\right)^2\Rightarrow\sum\frac{a}{\sqrt[4]{a^2+80bc}}\geq\sqrt{\frac{a+b+c}{3}}$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** este suficient să arătăm că:

$$\sqrt{\frac{a+b+c}{3}}+\frac{1}{a+b+c}\geq\frac{4}{3}\overset{\sum a=t}{\Leftrightarrow}\sqrt{\frac{t}{3}}+\frac{1}{t}\geq\frac{4}{3}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{t}{3}}\geq\frac{4}{3}-\frac{1}{t}\Leftrightarrow\frac{t}{3}\geq\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{t}\right)^2\Leftrightarrow\frac{t}{3}\geq\frac{(4t-3)^2}{9t^2}\Leftrightarrow$$

$3t^3\geq(4t-3)^2\Leftrightarrow 9t^3-16t^2+24t-9\geq 0\Leftrightarrow(t-3)\left(3t^2-7t+3\right)\geq 0$, care rezultă din $t\geq 3$,

(vezi inegalitatea mediilor și $abc=1$).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

4) Problema se poate dezvolta.
If $a,b,c>0$ and $abc=1$ then

$$\sum\frac{a}{\sqrt[5]{a^2+242bc}}+\frac{1}{a+b+c}\geq\frac{4}{3}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{a}{\sqrt[5]{a^2+242bc}}\geq\sqrt[6]{\frac{a+b+c}{3}}.$$

Demonstrație.

$$\left(\sum\frac{a}{\sqrt[5]{a^2+242bc}}\right)^5\sum a\left(a^2+242bc\right)\overset{Holder}{\geq}\left(\sum a\right)^6\Rightarrow$$

$$\left(\sum\frac{a}{\sqrt[5]{a^2+242bc}}\right)^5\geq\frac{\left(\sum a\right)^6}{\sum a\left(a^2+242bc\right)}=\frac{\left(\sum a\right)^6}{\sum a^3+3\cdot 242abc}=\frac{\left(\sum a\right)^6}{\left(\sum a\right)^3-3\prod(b+c)+726abc}=$$

$$=\frac{\left(\sum a\right)^6}{\left(\sum a\right)^3-3\sum a\sum bc+729abc}\overset{(1)}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^3}{27}$$, unde (1) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sum a\right)^6}{\left(\sum a\right)^3-3\sum a\sum bc+729abc}\geq\frac{\left(\sum a\right)^3}{27}\Leftrightarrow 27\left(\sum a\right)^3\geq\left(\sum a\right)^3-3\sum a\sum bc+729abc$$

$\Leftrightarrow 26\left(\sum a\right)^3+3\sum a\sum bc\geq 729abc$, care rezultă din inegalitatea mediilor:

$26\left(\sum a\right)^3+3\sum a\sum bc\geq 26\cdot 27abc+3\cdot 9abc=729abc$.

Din $\left(\sum\frac{a}{\sqrt[5]{a^2+242bc}}\right)^5\geq\left(\frac{\sum a}{3}\right)^3\Rightarrow\sum\frac{a}{\sqrt[5]{a^2+242bc}}\geq\sqrt[5]{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3}$.

Folosind **Lema** este suficient să arătăm că:

$$\sqrt[5]{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3}+\frac{1}{a+b+c}\geq\frac{4}{3}\overset{\sum a=t}{\Leftrightarrow}\sqrt[5]{\left(\frac{t}{3}\right)^3}+\frac{1}{t}\geq\frac{4}{3}\Leftrightarrow\sqrt[5]{\left(\frac{t}{3}\right)^3}\geq\frac{4}{3}-\frac{1}{t}\Leftrightarrow\left(\frac{t}{3}\right)^3\geq\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{t}\right)^5\Leftrightarrow$$

$$\frac{t^3}{27}\geq\frac{(4t-3)^5}{243t^5}\Leftrightarrow 9t^8\geq(4t-3)^5\Leftrightarrow 9t^8-1024t^5+3840t^4-5760t^3+4320t^2-1620t+243\geq 0\Leftrightarrow$$

$(t-3)\left(9t^7+54t^6+81t^5-781t^4+1497t^3-1269t^2+543t-81\right)\geq 0$, care rezultă din $t\geq 3$,

(vezi inegalitatea mediilor și $abc=1$).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

5) If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{a}{\sqrt[6]{a^2+728bc}}\geq\sqrt[3]{\left(\frac{\sum a}{3}\right)^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\left(\sum\frac{a}{\sqrt[6]{a^2+728bc}}\right)^6\sum a\left(a^2+728bc\right)\overset{Holder}{\geq}\left(\sum a\right)^7\Rightarrow$$

$$\left(\sum\frac{a}{\sqrt[6]{a^2+728bc}}\right)^5\geq\frac{\left(\sum a\right)^7}{\sum a\left(a^2+728bc\right)}=\frac{\left(\sum a\right)^7}{\sum a^3+3\cdot 728abc}=\frac{\left(\sum a\right)^7}{\left(\sum a\right)^3-3\prod(b+c)+2184abc}=$$

$$=\frac{\left(\sum a\right)^7}{\left(\sum a\right)^3-3\sum a\sum bc+2187abc}\overset{(1)}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^4}{81}$$, unde (1) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sum a\right)^7}{\left(\sum a\right)^3-3\sum a\sum bc+2187abc}\geq\frac{\left(\sum a\right)^4}{81}\Leftrightarrow 81\left(\sum a\right)^3\geq\left(\sum a\right)^3-3\sum a\sum bc+2187abc$$

$\Leftrightarrow 80\left(\sum a\right)^3+3\sum a\sum bc\geq 2187abc$, care rezultă din inegalitatea mediilor:

$80\left(\sum a\right)^3+3\sum a\sum bc\geq 80\cdot 27abc+3\cdot 9abc=2187abc$.

Din $\left(\sum\frac{a}{\sqrt[6]{a^2+728bc}}\right)^6\geq\left(\frac{\sum a}{3}\right)^4\Rightarrow\left(\sum\frac{a}{\sqrt[6]{a^2+728bc}}\right)^3\geq\left(\frac{\sum a}{3}\right)^2\Rightarrow$

$$\Rightarrow\sum\frac{a}{\sqrt[6]{a^2+728bc}}\geq\sqrt[3]{\left(\frac{\sum a}{3}\right)^2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

6) If $a,b,c>0$ and $n\in\mathbf{N},n\geq 2$ then

$$\sum \frac{a}{\sqrt[n]{a^2+\left(3^n-1\right)bc}} \geq \left(\frac{\sum a}{3}\right)^{\frac{n-2}{2}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\left(\sum \frac{a}{\sqrt[n]{a^2+\left(3^n-1\right)bc}}\right)^n \sum a\left(a^2+\left(3^n-1\right)bc\right) \overset{Holder}{\geq} \left(\sum a\right)^{n+1} \Rightarrow$$

$$\left(\sum \frac{a}{\sqrt[n]{a^2+\left(3^n-1\right)bc}}\right)^n = \frac{\left(\sum a\right)^{n+1}}{\sum a\left(a^2+\left(3^n-1\right)bc\right)} = \frac{\left(\sum a\right)^{n+1}}{\sum a^3+3\left(3^n-1\right)abc} =$$

$$= \frac{\left(\sum a\right)^{n+1}}{\left(\sum a\right)^3-3\prod(b+c)+3\left(3^n-1\right)abc} = \frac{\left(\sum a\right)^{n+1}}{\left(\sum a\right)^3-3\sum a\sum bc+3^{n+1}abc} \overset{(1)}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^{n-2}}{3^{n-2}}$$, unde (1) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sum a\right)^{n+1}}{\left(\sum a\right)^3-3\sum a\sum bc+3^{n+1}abc} \geq \frac{\left(\sum a\right)^{n-2}}{3^{n-2}} \Leftrightarrow 3^{n-2}\left(\sum a\right)^3 \geq \left(\sum a\right)^3-3\sum a\sum bc+3^{n+1}abc$$

$\Leftrightarrow \left(3^{n-2}-1\right)\left(\sum a\right)^3+3\sum a\sum bc \geq 3^{n+1}abc$, care rezultă din inegalitatea mediilor:

$$\left(3^{n-2}-1\right)\left(\sum a\right)^3+3\sum a\sum bc \geq \left(3^{n-2}-1\right)\cdot 27abc+3\cdot 9abc = 3^{n+1}abc.$$

Din $\left(\sum \frac{a}{\sqrt[n]{a^2+\left(3^n-1\right)bc}}\right)^n \geq \left(\frac{\sum a}{3}\right)^{n-2} \Rightarrow \sum \frac{a}{\sqrt[n]{a^2+\left(3^n-1\right)bc}} \geq \left(\frac{\sum a}{3}\right)^{\frac{n-2}{2}}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Aplicația42

1) If $a,b,c>0$ then

$$\sum \frac{a}{\sqrt[3]{a^3+26b^2c}} \geq 1.$$

Sidi Abdallah Lemrabott,RMM 102022

Soluție.

$$\left(\sum \frac{a}{\sqrt[3]{a^3+26b^2c}}\right)^3 \sum a\left(a^3+26b^2c\right) \overset{Holder}{\geq} \left(\sum a\right)^4 \Rightarrow \left(\sum \frac{a}{\sqrt[3]{a^3+26b^2c}}\right)^3 \geq \frac{\left(\sum a\right)^4}{\sum a\left(a^3+26b^2c\right)} =$$

$$=\frac{\left(\sum a\right)^4}{\sum a^4+26abc\sum b}=\frac{\left(\sum a\right)^4}{\sum a^4+26abc\sum a}\overset{(1)}{\geq}1,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \dfrac{\left(\sum a\right)^4}{\sum a^4+26abc\sum a}\geq 1 \Leftrightarrow \left(\sum a\right)^4\geq \sum a^4+26abc\sum a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum a^4+4\sum ab\left(a^2+b^2\right)+6\sum a^2b^2+12abc\sum a\geq \sum a^4+26abc\sum a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\sum ab\left(a^2+b^2\right)+6\sum a^2b^2\geq 14abc\sum a \Leftrightarrow 2\sum ab\left(a^2+b^2\right)+3\sum a^2b^2\geq 7abc\sum a$, vezi:

$$2\sum ab\left(a^2+b^2\right)+3\sum a^2b^2\overset{AM-GM}{\geq}2\sum ab\cdot 2ab+3\sum a^2b^2=7\sum a^2b^2\overset{SOS}{\geq}7abc\sum a.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

2) If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{a}{\sqrt[4]{a^4+80b^2c^2}}\geq 1.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\left(\sum\frac{a}{\sqrt[4]{a^4+80b^2c^2}}\right)^4\sum a\left(a^4+80b^2c^2\right)\overset{Holder}{\geq}\left(\sum a\right)^5\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\sum\frac{a}{\sqrt[4]{a^4+80b^2c^2}}\right)^4\geq\frac{\left(\sum a\right)^5}{\sum a\left(a^4+80b^2c^2\right)}=\frac{\left(\sum a\right)^5}{\sum a^5+80abc\sum bc}\overset{(1)}{\geq}1,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \dfrac{\left(\sum a\right)^5}{\sum a^5+80abc\sum bc}\geq 1\Leftrightarrow \left(\sum a\right)^5\geq \sum a^5+80abc\sum bc\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum a^5+5\sum a\left(b^4+c^4\right)+10\sum a^3\left(b^2+c^2\right)+20abc\sum a^2+30abc\sum bc\geq \sum a^5+80abc\sum bc\Leftrightarrow$
$5\sum a\left(b^4+c^4\right)+10\sum a^3\left(b^2+c^2\right)+20abc\sum a^2\geq 50abc\sum bc$, care rezultă din:

$$5\sum a\left(b^4+c^4\right)+10\sum a^3\left(b^2+c^2\right)+20abc\sum a^2\overset{AM-GM}{\geq}5\sum a\cdot 2b^2c^2+10\sum a^3\cdot 2bc+20abc\sum a^2=$$
$$=10abc\sum bc+10abc\sum a^2+20abc\sum a^2\overset{SOS}{\geq}10abc\sum bc+10abc\sum bc+20abc\sum bc=$$
$$=50abc\sum bc.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Aplicația43

1) In ΔABC

$$\sum \frac{r_a^4}{r_b^3+6r_ar_br_c+r_c^3} \ge \frac{9r^3}{2R^2}.$$

Marin Chirciu, IneMath12/2022

Soluție

Lema.

If $x, y, z > 0$ then

$$\sum \frac{x^4}{y^3+6xyz+z^3} \ge \frac{\left(\sum x\right)^4}{18\left(\left(\sum x\right)^3-15xyz\right)}.$$

Demonstrație

$$\sum \frac{x^4}{y^3+6xyz+z^3} \overset{Holder}{\ge} \frac{\left(\sum x\right)^4}{9\left(2\sum x^3+18xyz\right)} \overset{(1)}{\ge} \frac{\left(\sum x\right)^4}{9\left(2\left(\sum x\right)^3-48xyz+18xyz\right)} =$$

$$= \frac{\left(\sum x\right)^4}{18\left(\left(\sum x\right)^3-15xyz\right)}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z$.

Am folosit mai sus (1):

$$(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x) \overset{AM-GM}{\ge} x^3+y^3+z^3+3\cdot 2\sqrt{xy}\cdot 2\sqrt{yz}\cdot 2\sqrt{zx} =$$

$$= x^3+y^3+z^3+24xyz \Rightarrow \sum x^3 \le \left(\sum x\right)^3-24xyz.$$

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = (r_a, r_b, r_c)$ obținem:

$$\sum \frac{r_a^4}{r_b^3+6r_ar_br_c+r_c^3} \overset{Lema}{\ge} \frac{\left(\sum r_a\right)^4}{18\left(\left(\sum r_a\right)^3-15r_ar_br_c\right)} = \frac{(4R+r)^4}{18\left((4R+r)^3-15rp^2\right)} \overset{Gerretsen}{\ge}$$

$$\overset{Gerretsen}{\ge} \frac{(4R+r)^4}{18\left((4R+r)^3-15r\dfrac{r(4R+r)^2}{R+r}\right)} = \frac{(4R+r)^2}{18\left((4R+r)-15r\dfrac{r}{R+r}\right)} =$$

$$= \frac{(4R+r)^2(R+r)}{18\left(4R^2+5Rr-14r^2\right)} \overset{Euler}{\ge} \frac{R+r}{18}\cdot\frac{27r^2}{R^2} = \frac{3r^2(R+r)}{2R^2} \overset{Euler}{\ge} \frac{9r^3}{2R^2}.$$

Am folosit mai sus:

$$\frac{(4R+r)^2}{(4R^2+5Rr-14r^2)} \overset{Euler}{\geq} \frac{27r^2}{R^2} \Leftrightarrow 16R^4+8R^3r-107R^2r^2-135Rr^3+378r^4 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (R-2r)(16R^3+40R^2r-27Rr^2-189r^3) \geq 0$, evident din inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2) In ΔABC

$$\sum \frac{h_a^4}{h_b^3+6h_ah_bh_c+h_c^3} \geq \frac{36r^4}{9R^3-40r^3}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema.

If $x,y,z>0$ then

$$\sum \frac{x^4}{y^3+6xyz+z^3} \geq \frac{\left(\sum x\right)^4}{18\left(\left(\sum x\right)^3-15xyz\right)}.$$

Demonstrație

$$\sum \frac{x^4}{y^3+6xyz+z^3} \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum x\right)^4}{9\left(2\sum x^3+18xyz\right)} \overset{(1)}{\geq} \frac{\left(\sum x\right)^4}{9\left(2\left(\sum x\right)^3-48xyz+18xyz\right)} =$$

$$= \frac{\left(\sum x\right)^4}{18\left(\left(\sum x\right)^3-15xyz\right)}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z$.

Am folosit mai sus (1):

$$(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x) \overset{AM-GM}{\geq} x^3+y^3+z^3+3\cdot 2\sqrt{xy}\cdot 2\sqrt{yz}\cdot 2\sqrt{zx} =$$

$$= x^3+y^3+z^3+24xyz \Rightarrow \sum x^3 \leq \left(\sum x\right)^3-24xyz.$$

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=(h_a,h_b,h_c)$ obținem:

$$\sum \frac{h_a^4}{h_b^3+6h_ah_bh_c+h_c^3} \overset{Lema}{\geq} \frac{\left(\sum h_a\right)^4}{18\left(\left(\sum h_a\right)^3-15h_ah_bh_c\right)} = \frac{\left(\frac{p^2+r^2+4Rr}{2R}\right)^4}{18\left(\left(\frac{p^2+r^2+4Rr}{2R}\right)^3-15\cdot\frac{2r^2p^2}{R}\right)} \overset{Gerretsen}{\geq}$$

$$\overset{Gerretsen}{\geq}\frac{(9r)^4}{18\left(\left(\frac{9R}{2}\right)^3-15\cdot 27r^3\right)}=\frac{9r^4}{2\left(\frac{9R^3}{8}-5r^3\right)}=\frac{36r^4}{9R^3-40r^3}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Aplicația44

1) If $a,b,c>0$ then

$$\sqrt[3]{\left(a^a+b^a+c^a\right)\left(a^b+b^b+c^b\right)\left(a^c+b^c+c^c\right)}\geq a^{\frac{a+b+c}{3}}+b^{\frac{a+b+c}{3}}+c^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

Jose Luis Diaz Barrero, Spain, Arhimede Journal 1/2023

Soluție

Folosind inegalitatea lui Holder obținem:

$$LHS=\sqrt[3]{\left(a^a+b^a+c^a\right)\left(a^b+b^b+c^b\right)\left(a^c+b^c+c^c\right)}\overset{Holder}{\geq}\sqrt[3]{a^aa^ba^c}+\sqrt[3]{b^ab^bb^c}+\sqrt[3]{c^ac^bc^c}=$$

$$=a^{\frac{a+b+c}{3}}+b^{\frac{a+b+c}{3}}+c^{\frac{a+b+c}{3}}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

2) If $a,b,c,x,y,z>0$ then

$$\sqrt[3]{\left(x^a+y^a+z^a\right)\left(x^b+y^b+z^b\right)\left(x^c+y^c+z^c\right)}\geq x^{\frac{a+b+c}{3}}+y^{\frac{a+b+c}{3}}+z^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Folosind inegalitatea lui Holder obținem:

$$LHS=\sqrt[3]{\left(x^a+y^a+z^a\right)\left(x^b+y^b+z^b\right)\left(x^c+y^c+z^c\right)}\overset{Holder}{\geq}\sqrt[3]{x^ax^bx^c}+\sqrt[3]{y^ay^by^c}+\sqrt[3]{z^az^bz^c}=$$

$$=x^{\frac{a+b+c}{3}}+y^{\frac{a+b+c}{3}}+z^{\frac{a+b+c}{3}}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$ și $x=y=z$.

3) If $a,b,c,x,y,z>0$, $a+b+c=3$, $x+y+z=3$ then

$$\sqrt[3]{\left(x^a+y^a+z^a\right)\left(x^b+y^b+z^b\right)\left(x^c+y^c+z^c\right)}\geq 3.$$

Marin Chirciu

Soluție

Folosind inegalitatea lui Holder obținem:

$$LHS=\sqrt[3]{\left(x^a+y^a+z^a\right)\left(x^b+y^b+z^b\right)\left(x^c+y^c+z^c\right)}\overset{Holder}{\geq}\sqrt[3]{x^ax^bx^c}+\sqrt[3]{y^ay^by^c}+\sqrt[3]{z^az^bz^c}=$$

$$=x^{\frac{a+b+c}{3}}+y^{\frac{a+b+c}{3}}+z^{\frac{a+b+c}{3}}=x+y+z=3=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$ și $x=y=z=1$.

Aplicația45

1) In $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{a^2(a+b+c)}{c(b+c)^2}\geq\frac{9}{4}.$$

Neculai Stanciu, Romania,41RMM-Summer2024

Soluție

$$LHS=\sum\frac{a^2(a+b+c)}{c(b+c)^2}=(a+b+c)\sum\frac{\left(\frac{a}{b+c}\right)^2}{c}\overset{CS}{\geq}(a+b+c)\frac{\left(\sum\frac{a}{b+c}\right)^2}{a+b+c}=$$

$$=\left(\sum\frac{a}{b+c}\right)^2\overset{Nesbitt}{\geq}\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

2) In $a,b,c>0$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\sum\frac{a^2(a+b+c)}{c(b+\lambda c)^2}\geq\frac{9}{(\lambda+1)^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$LHS=\sum\frac{a^2(a+b+c)}{c(b+\lambda c)^2}=(a+b+c)\sum\frac{\left(\frac{a}{b+\lambda c}\right)^2}{c}\overset{CS}{\geq}(a+b+c)\frac{\left(\sum\frac{a}{b+\lambda c}\right)^2}{a+b+c}=$$

$$=\left(\sum\frac{a}{b+\lambda c}\right)^2\overset{Nesbitt}{\geq}\left(\frac{3}{\lambda+1}\right)^2=\frac{9}{(\lambda+1)^2}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

3) In $a,b,c>0$ and $\lambda\geq 0$, $n\in\mathbf{N}, n\geq 2$ then

$$\sum\frac{a^n(a+b+c)}{c(b+\lambda c)^n}\geq\frac{9}{(\lambda+1)^n}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$LHS=\sum\frac{a^n(a+b+c)}{c(b+\lambda c)^n}=(a+b+c)\sum\frac{\left(\frac{a}{b+\lambda c}\right)^n}{c}\overset{Holder}{\geq}(a+b+c)\frac{\left(\sum\frac{a}{b+\lambda c}\right)^n}{3^{n-2}(a+b+c)}=$$

$$=\frac{1}{3^{n-2}}\left(\sum\frac{a}{b+\lambda c}\right)^n\overset{Nesbitt}{\geq}\frac{1}{3^{n-2}}\left(\frac{3}{\lambda+1}\right)^n=\frac{9}{(\lambda+1)^n}=RHS\ .$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Aplicația46

1) If $x,y,z>0$, $xyz=1$ then

$$\sum\frac{x^5}{x+y+1}\geq 1.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities2/2022, Problem(03)

$$LHS=\sum\frac{x^5}{x+y+1}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum x\right)^5}{3^3\sum(x+y+1)}=\frac{\left(\sum x\right)^5}{27\left(2\sum x+3\right)}\overset{(1)}{\geq}1=RHS\ ,$$

unde (1) $\Leftrightarrow\dfrac{\left(\sum x\right)^5}{27\left(2\sum x+3\right)}\geq 1\Leftrightarrow\dfrac{t^5}{27(2t+3)}\geq 1\Leftrightarrow t^5\geq 54t+81\Leftrightarrow t^5-54t-81\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(t-3)\left(t^4+3t^3+9t^2+27t+27\right)\geq 0$,care rezultă din $t\geq 3$, (vezi: $t=x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}=3$).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

2) If $x,y,z>0$, $xyz=1$ then

$$\sum\frac{x^7}{x+y+1}\geq 1.$$

Marin Chirciu

$$LHS=\sum\frac{x^7}{x+y+1}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum x\right)^7}{3^5\sum(x+y+1)}=\frac{\left(\sum x\right)^5}{243\left(2\sum x+3\right)}\overset{(1)}{\geq}1=RHS\ ,$$

unde (1) $\Leftrightarrow\dfrac{\left(\sum x\right)^7}{243\left(2\sum x+3\right)}\geq 1\Leftrightarrow\dfrac{t^5}{243(2t+3)}\geq 1\Leftrightarrow t^7\geq 486t+729\Leftrightarrow t^7-486t-729\geq 0$

$\Leftrightarrow(t-3)\left(t^6+3t^5+9t^4+27t^3+81t^2+243t+243\right)\geq 0$,care rezultă din $t\geq 3$, (vezi:
$t=x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}=3$).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

3) If $x,y,z>0$, $xyz=1$ and $n\in\mathbf{N}, n\geq 2$ then

$$\sum \frac{x^n}{x+y+1} \geq 1.$$

Marin Chirciu

$LHS = \sum \frac{x^n}{x+y+1} \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum x\right)^n}{3^{n-2}\sum(x+y+1)} = \frac{\left(\sum x\right)^n}{3^{n-2}\left(2\sum x+3\right)} \overset{(1)}{\geq} 1 = RHS$, unde (1)

$\Leftrightarrow \frac{\left(\sum x\right)^n}{3^{n-2}\left(2\sum x+3\right)} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{t^n}{3^{n-2}(2t+3)} \geq 1 \Leftrightarrow t^n \geq 3^{n-2}(2t+3) \Leftrightarrow t^n - 2\cdot 3^{n-2}t - 3^{n-1} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (t-3)\left(t^{n-1}+3t^{n-2}+9t^{n-3}+\ldots+3^{n-3}t^2+3^{n-2}t+3^{n-2}\right) \geq 0$,care rezultă din $t \geq 3$, (vezi: $t = x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

4) If $x,y,z>0$, $xyz=1$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{x^5}{x+y+\lambda} \geq \frac{3}{\lambda+2}.$$

Marin Chirciu

$LHS = \sum \frac{x^5}{x+y+\lambda} \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum x\right)^5}{3^3\sum(x+y+\lambda)} = \frac{\left(\sum x\right)^5}{27\left(2\sum x+3\lambda\right)} \overset{(1)}{\geq} \frac{3}{\lambda+2} = RHS$,

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{\left(\sum x\right)^5}{27\left(2\sum x+3\lambda\right)} \geq \frac{3}{\lambda+2} \Leftrightarrow \frac{t^5}{27(2t+3\lambda)} \geq \frac{3}{\lambda+2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\lambda+2)t^5 \geq 162t+243\lambda \Leftrightarrow (\lambda+2)t^5-162t-243\lambda \geq 0 \Leftrightarrow$
$(t-3)\left[(\lambda+2)t^4+3(\lambda+2)t^3+9(\lambda+2)t^2+27(\lambda+2)t+81\lambda\right] \geq 0$,

care rezultă din $t \geq 3$, (vezi: $t = x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

5) If $x,y,z>0$, $xyz=1$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{x^7}{x+y+\lambda} \geq \frac{3}{\lambda+2}.$$

Marin Chirciu

$LHS = \sum \frac{x^7}{x+y+\lambda} \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum x\right)^7}{3^5\sum(x+y+\lambda)} = \frac{\left(\sum x\right)^7}{243\left(2\sum x+3\lambda\right)} \overset{(1)}{\geq} \frac{3}{\lambda+2} = RHS$, unde (1) $\Leftrightarrow \dfrac{\left(\sum x\right)^7}{243\left(2\sum x+3\lambda\right)} \geq \dfrac{3}{\lambda+2} \Leftrightarrow \dfrac{t^7}{243(2t+3\lambda)} \geq \dfrac{3}{\lambda+2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\lambda+2)t^7 \geq 1458t+2187\lambda \Leftrightarrow (\lambda+2)t^7-1458t-2187\lambda \geq 0 \Leftrightarrow$

$(t-3)\left[(\lambda+2)t^6+3(\lambda+2)t^5+9(\lambda+2)t^4+27(\lambda+2)t^3+81(\lambda+2)t^2+243(\lambda+2)t+729\lambda\right] \geq 0$

care rezultă din $t \geq 3$, (vezi: $t=x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}=3$).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

6) If $x,y,z>0$, $xyz=1$ and $n\in\mathbf{N}, n\geq 2$, $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{x^n}{x+y+\lambda} \geq \frac{3}{\lambda+2}.$$

Marin Chirciu

$LHS=\sum \dfrac{x^n}{x+y+\lambda} \overset{Holder}{\geq} \dfrac{\left(\sum x\right)^n}{3^{n-2}\sum(x+y+\lambda)} = \dfrac{\left(\sum x\right)^n}{3^{n-2}\left(2\sum x+3\lambda\right)} \overset{(1)}{\geq} \dfrac{3}{\lambda+2}=RHS$, unde (1)

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(\sum x\right)^n}{3^{n-2}\left(2\sum x+3\lambda\right)} \geq \dfrac{3}{\lambda+2} \Leftrightarrow \dfrac{t^n}{3^{n-2}(2t+3\lambda)} \geq \dfrac{3}{\lambda+2} \Leftrightarrow (\lambda+2)t^n \geq 3^{n-1}(2t+3\lambda) \Leftrightarrow$

$(\lambda+2)t^n-2\cdot 3^{n-1}t-3^n\lambda \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (t-3)\left[(\lambda+2)t^{n-1}+3(\lambda+2)t^{n-2}+9(\lambda+2)t^{n-3}+\ldots+3^{n-3}(\lambda+2)t^2+3^{n-2}(\lambda+2)t+3^{n-1}\lambda\right] \geq 0$

,care rezultă din $t \geq 3$, (vezi: $t=x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}=3$).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Aplicația47

1) If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then

$$\sum \frac{1}{a^3+b^3}+3\sum \frac{1}{ab(a+b)} \geq 6.$$

Daniel Sitaru,RMM 2/2023

Soluție

Lema

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then

$$\frac{1}{a^3+b^3}+\frac{3}{ab(a+b)} \geq \frac{16}{(a+b)^3}.$$

Demonstrație

$$\frac{1}{a^3+b^3}+\frac{3}{ab(a+b)}=\frac{1}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}+\frac{3}{ab(a+b)}=\frac{1}{a+b}\left(\frac{1}{a^2-ab+b^2}+\frac{3}{ab}\right)=$$

$$=\frac{1}{a+b}\left(\frac{1}{a^2-ab+b^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{ab}\right)\overset{Bergstrom}{\geq}\frac{1}{a+b}\cdot\frac{(1+1+1+1)^2}{a^2-ab+b^2+3ab}=\frac{1}{a+b}\cdot\frac{16}{a^2+2ab+b^2}=$$

$$=\frac{1}{a+b}\cdot\frac{16}{(a+b)^2}=\frac{16}{(a+b)^3}$$, cu egalitate pentru $\frac{1}{a^2-ab+b^2}=\frac{1}{ab}\Leftrightarrow a=b$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$\sum\frac{1}{a^3+b^3}+3\sum\frac{1}{ab(a+b)}\overset{Lema}{\geq}\sum\frac{16}{(a+b)^3}\overset{Holder}{\geq}16\cdot\frac{\left(\sum\frac{1}{a+b}\right)^3}{9}\overset{CS}{\geq}16\cdot\frac{\left(\frac{9}{\sum(a+b)}\right)^3}{9}=$$

$$=16\cdot\frac{\left(\frac{9}{2\sum a}\right)^3}{9}=16\cdot\frac{\left(\frac{9}{2\cdot 3}\right)^3}{9}=16\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{9}=6.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

2) If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then

$$\sum\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2}\sum\frac{1}{ab}\geq 3.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție</u>

<u>Lema</u>

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}\geq\frac{4}{(a+b)^2}.$$

<u>Demonstrație</u>

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}\overset{Bergstrom}{\geq}\frac{(1+1)^2}{a^2+b^2+2ab}=\frac{4}{(a+b)^2}$$, cu egalitate pentru $\frac{1}{a^2+b^2}=\frac{1}{2ab}\Leftrightarrow a=b$.

Folosind **Lema** obținem:

$$\sum\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2}\sum\frac{1}{ab}\overset{Lema}{\geq}\sum\frac{4}{(a+b)^2}\overset{Bergstrom}{\geq}4\cdot\frac{\left(\sum\frac{1}{a+b}\right)^2}{3}\overset{CS}{\geq}4\cdot\frac{\left(\frac{9}{\sum(a+b)}\right)^2}{3}=$$

$$=4\cdot\frac{\left(\frac{9}{2\sum a}\right)^2}{3}=4\cdot\frac{\left(\frac{9}{2\cdot 3}\right)^2}{3}=4\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{3}=3.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Aplicația48

1) If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{a^2}{a^2+3ab+2b^2}\ge\frac{1}{2}.$$

Phung Quyet Thang, Vietnam,THCS 2/2023

Soluție

Avem $\sum\frac{a^2}{a^2+3ab+2b^2}=\sum\frac{a^2}{(a+b)(a+2b)}$.

Folosind inegalitatea lui Holder obținem:

$$\sum\frac{a^2}{(a+b)(a+2b)}\sum a(a+2b)\sum(a+b)\ge\left(\sum a\right)^3.$$

$$\sum\frac{a^2}{(a+b)(a+2b)}\sum a(a+2b)\sum(a+b)\ge\frac{\left(\sum a\right)^3}{\sum a(a+2b)\sum(a+b)}=\frac{\left(\sum a\right)^3}{\left(\sum a\right)^2\cdot 2\sum a}=\frac{1}{2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Soluție2

$$\sum\frac{a^2}{a^2+3ab+2b^2}=\sum\frac{a^4}{a^2\left(a^2+3ab+2b^2\right)}\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum a^2\left(a^2+3ab+2b^2\right)}\overset{(1)}{\ge}\frac{1}{2},$$

unde(1) $\Leftrightarrow\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum a^2\left(a^2+3ab+2b^2\right)}\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\sum a^4+2\sum a^2b^2}{\sum a^4+3\sum a^3b+2\sum a^2b^2}\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\sum a^4+4\sum a^2b^2\ge\sum a^4+3\sum a^3b+2\sum a^2b^2\Leftrightarrow\sum a^4-3\sum a^3b+2\sum a^2b^2\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum\left(a^4-3a^3b+2a^2b^2\right)\ge 0\Leftrightarrow\sum a^2\left(a^2-3ab+2b^2\right)\ge 0\Leftrightarrow\sum a^2(a-b)(a-2b)\ge 0,$$

care rezultă din inegalitatea lui Schur $x^r(x-y)(x-z)\ge 0$, unde $x,y,z\ge 0$ și $r>0$, $r=2$.

2) If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{a^2}{a^2+4ab+3b^2}\ge\frac{3}{8}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Avem $\sum\frac{a^2}{a^2+4ab+3b^2}=\sum\frac{a^2}{(a+b)(a+3b)}$.

Folosind inegalitatea lui Holder obținem:

$$\sum\frac{a^2}{(a+b)(a+3b)}\sum a(a+3b)\sum(a+b)\geq\left(\sum a\right)^3.$$

$$\sum\frac{a^2}{(a+b)(a+3b)}\sum a(a+3b)\sum(a+b)\geq\frac{\left(\sum a\right)^3}{\sum a(a+3b)\sum(a+b)}=\frac{\left(\sum a\right)^3}{\left(\sum a^2+3\sum ab\right)\cdot 2\sum a}=$$

$\frac{\left(\sum a\right)^2}{2\left(\sum a^2+3\sum ab\right)}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{8}$, unde (1) $\Leftrightarrow\frac{\left(\sum a\right)^2}{2\left(\sum a^2+3\sum ab\right)}\geq\frac{3}{8}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\left(\sum a^2+2\sum ab\right)\geq 3\left(\sum a^2+3\sum ab\right)\Leftrightarrow\sum a^2\geq\sum ab$, inegalitate cunoscută.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

3) If $a,b,c>0$ and $\lambda\geq 2$ then

$$\sum\frac{a^2}{a^2+(\lambda+1)ab+\lambda b^2}\geq\frac{3}{2(\lambda+1)}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Avem $\sum\frac{a^2}{a^2+(\lambda+1)ab+\lambda b^2}=\sum\frac{a^2}{(a+b)(a+\lambda b)}$.

Folosind inegalitatea lui Holder obținem:

$$\sum\frac{a^2}{(a+b)(a+\lambda b)}\sum a(a+\lambda b)\sum(a+b)\geq\left(\sum a\right)^3.$$

$$\sum\frac{a^2}{(a+b)(a+\lambda b)}\sum a(a+\lambda b)\sum(a+b)\geq\frac{\left(\sum a\right)^3}{\sum a(a+\lambda b)\sum(a+b)}=\frac{\left(\sum a\right)^3}{\left(\sum a^2+\lambda\sum ab\right)\cdot 2\sum a}=$$

$$=\frac{\left(\sum a\right)^2}{2\left(\sum a^2+\lambda\sum ab\right)}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{2(\lambda+1)},$$

unde (1) $\Leftrightarrow\frac{\left(\sum a\right)^2}{2\left(\sum a^2+\lambda\sum ab\right)}\geq\frac{3}{2(\lambda+1)}\Leftrightarrow(\lambda+1)\left(\sum a^2+2\sum ab\right)\geq 3\left(\sum a^2+\lambda\sum ab\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(\lambda-2)\sum a^2\geq(\lambda-2)\sum ab$, care rezultă din ipoteza $\lambda\geq 2$ și $\sum a^2\geq\sum ab$, evident.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Aplicația49

1) If $a,b,c>0$ then

$$\sum \frac{a^5}{b^2\sqrt{\left(a^2+3ab+b^2\right)^3}} \ge \frac{3}{5\sqrt{5}}.$$

Phung Quyet Thang, Vietnam,THCS 2/2023

Soluție

Lema

If $a,b,c>0$ then

$$a^2+3ab+b^2 \le \frac{5}{4}(a+b)^2.$$

Demonstrație

Avem $a^2+3ab+b^2 \le \frac{5}{4}(a+b)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0$, cu egalitate pentru $a=b$.

Folosind **Lema** obținem:

$$\sum \frac{a^5}{b^2\sqrt{\left(a^2+3ab+b^2\right)^3}} \ge \sum \frac{a^5}{b^2\sqrt{\left[\frac{5}{4}(a+b)^2\right]^3}} = \sum \frac{a^5}{b^2\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \cdot 5\sqrt{5}} \overset{(1)}{\ge} \frac{3}{5\sqrt{5}},$$

unde (1) $\Leftrightarrow \sum \frac{a^5}{b^2\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \cdot 5\sqrt{5}} \ge \frac{3}{5\sqrt{5}} \Leftrightarrow \sum \frac{a^5}{b^2(a+b)^3} \ge \frac{3}{8}$, vezi Holder:

$$\sum \frac{a^5}{b^2(a+b)^3} \sum ab \sum a \overset{Holder}{\ge} \left(\sum \frac{a^2}{a+b}\right)^3.$$

$$\sum \frac{a^5}{b^2(a+b)^3} \overset{Holder}{\ge} \frac{\left(\sum \frac{a^2}{a+b}\right)^3}{\sum ab \sum a} \overset{CS}{\ge} \frac{\left(\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum(a+b)}\right)^3}{\sum ab \sum a} = \frac{\left(\frac{\left(\sum a\right)^2}{2\sum a}\right)^3}{\sum ab \sum a} = \frac{\left(\frac{\sum a}{2}\right)^3}{\sum ab \sum a} = \frac{1}{8}\frac{\left(\sum a\right)^3}{\sum ab \sum a} \ge \frac{3}{8}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

2) If $a,b,c>0$ and $\lambda \ge 2$ then

$$\sum \frac{a^5}{b^2\sqrt{\left(a^2+\lambda ab+b^2\right)^3}} \ge \frac{3}{(\lambda+2)\sqrt{\lambda+2}}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $a,b,c>0$ then

$$a^2+\lambda ab+b^2\le\frac{\lambda+2}{4}(a+b)^2.$$

Demonstrație

Avem $a^2+\lambda ab+b^2\le\frac{\lambda+2}{4}(a+b)^2\Leftrightarrow(\lambda-2)(a-b)^2\ge0$, cu egalitate pentru $a=b$ sau $\lambda=2$.

Folosind **Lema** obținem:

$$\sum\frac{a^5}{b^2\sqrt{\left(a^2+\lambda ab+b^2\right)^3}}\ge\sum\frac{a^5}{b^2\sqrt{\left[\frac{\lambda+2}{4}(a+b)^2\right]^3}}=\sum\frac{a^5}{b^2\left(\frac{a+b}{2}\right)^3\cdot(\lambda+2)\sqrt{\lambda+2}}\overset{(1)}{\ge}$$

$$\overset{(1)}{\ge}\frac{3}{(\lambda+2)\sqrt{\lambda+2}}\text{, unde (1)}\Leftrightarrow\sum\frac{a^5}{b^2\left(\frac{a+b}{2}\right)^3\cdot(\lambda+2)\sqrt{\lambda+2}}\ge\frac{3}{(\lambda+2)\sqrt{\lambda+2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum\frac{a^5}{b^2(a+b)^3}\ge\frac{3}{8}\text{, veziHolder: }\sum\frac{a^5}{b^2(a+b)^3}\sum ab\sum a\overset{Holder}{\ge}\left(\sum\frac{a^2}{a+b}\right)^3.$$

care rezultă din inegalitatea lui Holder:

$$\sum\frac{a^5}{b^2(a+b)^3}\overset{Holder}{\ge}\frac{\left(\sum\frac{a^2}{a+b}\right)^3}{\sum ab\sum a}\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum(a+b)}\right)^3}{\sum ab\sum a}=\frac{\left(\frac{\left(\sum a\right)^2}{2\sum a}\right)^3}{\sum ab\sum a}=\frac{\left(\frac{\sum a}{2}\right)^3}{\sum ab\sum a}=\frac{1}{8}\frac{\left(\sum a\right)^3}{\sum ab\sum a}\ge\frac{3}{8}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

3)If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{a^5}{b^2\sqrt{\left(a^2+7ab+b^2\right)^3}}\ge\frac{1}{9}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $a,b,c>0$ then

$$a^2+7ab+b^2\le\frac{9}{4}(a+b)^2.$$

Demonstrație

Avem $a^2+7ab+b^2\le\frac{9}{4}(a+b)^2 \Leftrightarrow 5(a-b)^2\ge 0$, cu egalitate pentru $a=b$.

Folosind **Lema** obținem:

$$\sum\frac{a^5}{b^2\sqrt{(a^2+7ab+b^2)^3}}\ge\sum\frac{a^5}{b^2\sqrt{\left[\frac{9}{4}(a+b)^2\right]^3}}=\sum\frac{a^5}{b^2\left(\frac{a+b}{2}\right)^3\cdot 27}\overset{(1)}{\ge}\frac{1}{9},$$

unde (1) $\Leftrightarrow \sum\frac{a^5}{b^2\left(\frac{a+b}{2}\right)^3\cdot 27}\ge\frac{1}{9}\Leftrightarrow\sum\frac{a^5}{b^2(a+b)^3}\ge\frac{3}{8}$, veziHolder:

$$\sum\frac{a^5}{b^2(a+b)^3}\sum ab\sum a\overset{Holder}{\ge}\left(\sum\frac{a^2}{a+b}\right)^3.$$

$$\sum\frac{a^5}{b^2(a+b)^3}\overset{Holder}{\ge}\frac{\left(\sum\frac{a^2}{a+b}\right)^3}{\sum ab\sum a}\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum(a+b)}\right)^3}{\sum ab\sum a}=\frac{\left(\frac{\left(\sum a\right)^2}{2\sum a}\right)^3}{\sum ab\sum a}=\frac{\left(\frac{\sum a}{2}\right)^3}{\sum ab\sum a}=\frac{1}{8}\frac{\left(\sum a\right)^3}{\sum ab\sum a}\ge\frac{3}{8}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Bibliografie:

11. C.Năstăsescu, C.Niță, M.Brandiburu, D. Joița , Exerciții de algebră, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1992.
12. Nguyen Viet Hung, Hanoi, Vietnam , 16 RMM-Spring2020.
13. Marius Stănean, Primul Baraj pentru OBMJ, Deva, 25 Aprilie 2019.
14. Inequalities Marathon , Problem 16/2020
15. Dan Sitaru, RMM 8/2019.
16. Hoang Le Nhat Tung, Hanoi, Vietnam, 20RMM-Spring2021.
17. Mathematical Olympiads 7/2020.
18. George Apostolopoulos, Greece, RMM8/2020.
19. Kostas Geronikolas, Greece,Mathematical Inequalities10/2020.
20. Mircea Lascu, Zalău, GM 12/2002
21. Boris Colakovic, Mathematical Inequalities 7/2021.
22. Daniel Sitaru,28-RMM-Spring 2023.
23. Nguyen Van Canh, Vietnam, RMM 7/2021.
24. Dorin Mărghidanu, Mathematical Inequalities9/2021.
25. Imad Zak, Lebanon, Mathematical Inequalities, 9/2021.
26. Konstantinos Geronikolas, Greece, RMM11/2021.

27. Phan Ngoc Chau, Vietnam, RMM 12/2021.
28. Nguyen Viet Hung, Vietnam, Pure Inequalities3/2022.
29. D.M.Bătinețu-Giurgiu, Romania,3 RMM2022.
30. Dan Nănuți, Romania,3 RMM2022.
31. Hoanghai Nguyen, Vietnam,THCS 5/2022.
32. Zaza Mzhavanadze, Georgia,RMM 5/2022.
33. Neculai Stanciu, Buzău, RMT1/2022.
34. Kaltrin Surdulli, Pure Inequalities6/2022.
35. An Zhenping, China, Mathematical Reflections 3/2022.
36. Sidi Abdallah Lemrabott, RMM 9/2022.
37. Konstantinos Geronikolas , MathTime 10/2022.
38. Jose Luis Diaz Barrero, Spain, Arhimede Journal 1/2023.
30.Neculai Stanciu, Romania,41RMM-Summer2024.

39. Phung Quyet Thang, Vietnam,THCS 2/2023.
40. Marin Chirciu, Inegalități algebrice 2, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2021.
41. Marin Chirciu, Inegalități geometrice 2, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2021.

Art 4500

4Martie 2023