REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

ISBN 2065-6432

AUGUST 2014

38 pagini

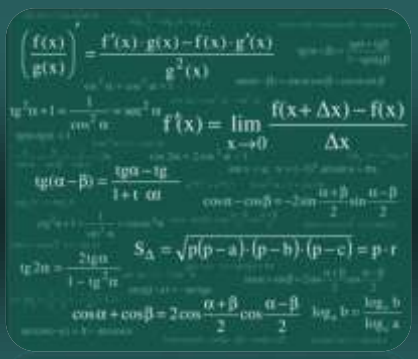
REVISTĂ LUNARĂ

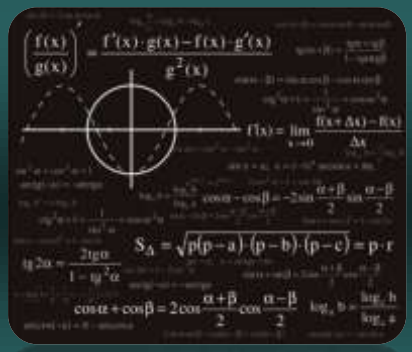
DIN FEBRUARIE 2009

DE PESTE 4 ANI ÎN FIECARE LUNĂ

WWW.MATEINFO.RO

revistaelectronica@mateinfo.ro





COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ŞI SUSŢINĂTOR PERMANENŢI AI REVISTEI

NECULAI STANCIU, ROXANA MIHAELA STANCIU ŞI NELA CICEU

Articole :

1. Other solutions for two problems from La Gaceta (see No. 2, 2014) - pag.2
   Nela Ciceu, Roxana Mihaela Stanciu
2. The solutions of some problems of Kappa Mu Epsilon, Spring 2013 - pag 5
   Ioan Viorel Codreanu
3. Aplicaţii ale formulelor de tip BINÉT pentru numere Fibonacci şi Lucas – pag.8
   Angelica Ungureanu
4. Procedee de stabilire a concurenţei a trei drepte în plan – pag.12
   Ioana Anton
5. Exerciţii cu progresii aritmetice şi aplicaţii ale determinanţilor în geometrie – pag.17
   Ciobîcă Constantin, Ciobîcă Elena
6. Derivate de ordin superior – pag.21
   Laura Radu
7. Poziţia relativă a două cercuri – pag. 35
   Gurău Cornelia

1. Other solutions for two problems from La Gaceta

By Nela Ciceu, Roşiori, Bacău and Roxana Mihaela Stanciu, Buzău

La Gaceta de la RSME, Vol. 16 (2013), Núm. 3, Págs. 501–512 501

Problema 230. *Propuesto por Panagiote Ligouras, "Leonardo da Vinci" High School, Noci, Italia.*

En un triángulo ABC, sean m_a, m_b y m_c las longitudes de las medianas, h_a, h_b y h_c las longitudes de las alturas, ℓ_a, ℓ_b y ℓ_c las longitudes de las bisectrices y R el circunradio. Probar que

$$\frac{m_a^2}{h_a}\sqrt{\frac{m_a^2-h_a^2}{\ell_a^2-h_a^2}}+\frac{m_b^2}{h_b}\sqrt{\frac{m_b^2-h_b^2}{\ell_b^2-h_b^2}}+\frac{m_c^2}{h_c}\sqrt{\frac{m_c^2-h_c^2}{\ell_c^2-h_c^2}}\geq 6R.$$

Solution:

With usual notations and using the well-knwn formulas:

$$m_a^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4},\ h_a=\frac{2F}{a},\ l_a=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c},\ \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},\ abc=4RF,$$

$$16F^2=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4,\ F=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

we have:

$$m_a^2-h_a^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}-\frac{4F^2}{a^2}$$

$$=\frac{2a^2b^2+2a^2c^2-a^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2+a^4+b^4+c^4}{4a^2}$$

$$=\frac{(b^2-c^2)^2}{4a^2}=\frac{(b+c)^2(b-c)^2}{4a^2},\ \text{respectively}$$

$$l_a^2-h_a^2=\frac{4bcs(s-a)}{(b+c)^2}-\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}=s(s-a)\cdot\frac{4a^2bc-(b+c)^2[a^2-(b-c)^2]}{a^2(b+c)^2}$$

$$= s(s-a)\cdot\frac{(b+c)^2(b-c)^2 - a^2[(b+c)^2 - 4abc]}{a^2(b+c)^2}$$

$$= s(s-a)\cdot\frac{(b-c)^2[(b+c)^2 - a^2]}{a^2(b+c)^2} = \frac{4s^2(s-a)^2(b-c)^2}{a^2(b+c)^2}.$$

So,

$$\frac{m_a^2 - h_a^2}{l_a^2 - h_a^2} = \frac{(b+c)^4}{16s^2(s-a)^2}.$$

Using the well-known inequality:

$$m_a^2 \geq s(s-a)\ (\Leftrightarrow 2b^2 + 2c^2 - a^2 \geq (b+c)^2 - a^2 \Leftrightarrow (b-c)^2 \geq 0),$$

we obtain:

$$\frac{m_a^2}{h_a}\sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{l_a^2 - h_a^2}} \geq \frac{as(s-a)}{2F}\cdot\frac{(b+c)^2}{4s(s-a)} = \frac{a(b+c)^2}{8F},$$

and other two analogous.

So it suffices to prove that:

$$a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 \geq 12\cdot 4RF$$

$$\Leftrightarrow a^2b + ab^2 + b^2c + a^2c + ac^2 \geq 6abc,$$

which yields by AM-GM inequality. We have equality if and only if $a = b = c$.

The proof is complete.

502 PROBLEMAS Y SOLUCIONES

PROBLEMA 231. *Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez.*

Sea ABC un triángulo con ángulos agudos en los vértices B y C, y sea AH, con el punto H en el lado BC, la altura correspondiente al vértice A. Se inscribe, en cada uno de los triángulos rectángulos AHB y AHC, un cuadrado con dos de sus lados contenidos en AH y BC. Sean así HE y HD (donde E y D son puntos del segmento BC) los respectivos lados de estos "cuadrados armónicos", y sea $d = AH - (EH + HD)$. Probar que $d \geq 0 \iff A \leq \pi/2$.

Solution:

We have that: $a = BH + HC = c\cos B + b\cos C$.

We denotes $AH = h$, $EH = x$, $HD = y$.

By similarity we obtain:

$$\frac{x}{c\cos B} = \frac{h-x}{h} \Rightarrow x = \frac{hc\cos B}{h + c\cos B} \text{ and analogous } y = \frac{hb\cos C}{h + b\cos C}.$$

We have:

$$d \geq 0 \Leftrightarrow h - \frac{hc\cos B}{h + c\cos B} - \frac{hb\cos C}{h + b\cos C} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow h^2 + h(b\cos C + c\cos B) + bc\cos B\cos C - hc\cos B - bc\cos B\cos C - hb\cos C - bc\cos B\cos C \geq 0$$

$$\Leftrightarrow h^2 \geq bc\cos B\cos C \Leftrightarrow h \cdot h \geq bc\cos B\cos C \Leftrightarrow c\sin B \cdot b\sin C \geq bc\cos B\cos C$$

$$\Leftrightarrow \cos B\cos C - \sin B\sin C \leq 0 \Leftrightarrow \cos(B+C) \leq 0 \Leftrightarrow -\cos A \leq 0 \Leftrightarrow \cos A \geq 0 \Leftrightarrow A \leq \frac{\pi}{2},$$

and we are done.

2. The solutions of some problems of Kappa Mu Epsilon, Spring 2013

Ioan Viorel Codreanu, Secondary School Satulung, Maramureș

Problem 724. ***Proposed by Tom Moore, Bridgewater, MA***

Let $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ **be the** n **th triangular number. Prove that the fraction**

$$\frac{T_2T_4T_6...T_{2n}}{T_1T_3T_5...T_{2n-1}} \text{ is always an integer.}$$

Solution by Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramures, Romania

Let $F_n = \frac{\prod_{k=1}^{n} T_{2k}}{\prod_{k=0}^{n} T_{2k+1}}$. We have

$$F_n = \frac{\prod_{k=1}^{n} \frac{2k(2k+1)}{2}}{\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2k+1)(2k+2)}{2}} = \frac{\prod_{k=1}^{n} k(2k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)(k+1)} = \frac{n(2n+1)\prod_{k=1}^{n-1} k(2k+1)}{\prod_{k=1}^{n-1}(2k+1)(k+1)} = n(2n+1)\prod_{k=1}^{n-1}\frac{k}{k+1} =$$

$$= n(2n+1)\cdot\frac{1}{n} = 2n+1.$$

So, F_n is always integer.

Problem 726. ***Proposed by Jose Luis Diaz-Barrero, BARCELONA TECH, Barcelona, Spain***

Let x, y **and** z **be positive real numbers. Prove that**

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{xy}{y+z}+\frac{yz}{z+x}+\frac{zx}{x+y}\right) \geq \frac{9}{2}$$

Solution by Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramures, Romania

After computations, the inequality becomes:

$$\frac{y}{y+z}+\frac{yz}{x(z+x)}+\frac{z}{x+y}+\frac{x}{y+z}+\frac{z}{z+x}+\frac{zx}{y(x+y)}+\frac{xy}{z(y+z)}+\frac{y}{z+x}+\frac{x}{x+y}\geq\frac{9}{2}$$

which is equivalent to

$$\sum_{cyclic}\frac{x+y}{y+z}+\sum_{cyclic}\frac{xy}{z(y+z)}\geq\frac{9}{2}.$$

Using the **AM-GM Inequality** we get

$$\sum_{cyclic}\frac{x+y}{y+z}\geq 3\sqrt[3]{\prod_{cyclic}\frac{x+y}{y+z}}=3$$

and using the **Bergström Inequality** we get

$$\sum_{cyclic}\frac{xy}{z(y+z)}=\left(\prod_{cyclic}x\right)\sum_{cyclic}\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^2}{y+z}\geq\left(\prod_{cyclic}x\right)\cdot\frac{\left(\sum_{cyclic}\frac{1}{z}\right)^2}{\sum_{cyclic}(y+z)}=\frac{\left(\sum_{cyclic}xy\right)^2}{2\left(\prod_{cyclic}x\right)\left(\sum_{cyclic}x\right)}.$$

Using well-known inequality, we have $\left(\sum_{cyclic}xy\right)^2\geq 3\sum_{cyclic}xyyz=3\left(\prod_{cyclic}x\right)\left(\sum_{cyclic}x\right)$.

Then $\sum_{cyclic}\frac{xy}{z(y+z)}\geq\frac{3}{2}$ and $\sum_{cyclic}\frac{x+y}{y+z}+\sum_{cyclic}\frac{xy}{z(y+z)}\geq 3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$.

Problem 727. ***Proposed by Jose Luis Diaz-Barrero, BARCELONA TECH, Barcelona, Spain***

Let α,β,γ be the measure of the angles of a triangle ABC. Prove that

$$\sum_{cyclic}\frac{\sin\alpha}{4\sin\beta+5\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}}\geq\frac{1}{3}$$

Solution by Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramures, Romania

Using the **AM-GM Inequality** we get

$$\sum_{cyclic}\frac{\sin\alpha}{4\sin\beta+5\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}}\geq\sum_{cyclic}\frac{\sin\alpha}{4\sin\beta+5\cdot\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}}=2\sum_{cyclic}\frac{\sin\alpha}{5\sin\alpha+13\sin\beta}.$$

Using the **Bergström Inequality** we get

$$\sum_{cyclic}\frac{\sin\alpha}{5\sin\alpha+13\sin\beta}=\sum_{cyclic}\frac{\sin^2\alpha}{5\sin^2\alpha+13\sin\alpha\cdot\sin\beta}\geq\frac{\left(\sum_{cyclic}\sin\alpha\right)^2}{5\sum_{cyclic}\sin^2\alpha+13\sum_{cyclic}\sin\alpha\sin\beta}.$$

It remains to prove that

$$\frac{2\left(\sum_{cyclic}\sin\alpha\right)^2}{5\sum_{cyclic}\sin^2\alpha+13\sum_{cyclic}\sin\alpha\sin\beta}\geq\frac{1}{3}$$

which is equivalent to

$$6\sum_{cyclic}\sin^2\alpha+12\sum_{cyclic}\sin\alpha\sin\beta\geq5\sum_{cyclic}\sin^2\alpha+13\sum_{cyclic}\sin\alpha\sin\beta$$

or

$$\sum_{cyclic}\sin^2\alpha\geq\sum_{cyclic}\sin\alpha\sin\beta$$

and this last inequality is equivalent to $\sum_{cyclic}(\sin\alpha-\sin\beta)^2\geq0$, clearly true. Equality holds for

$\alpha=\beta=\gamma.$

3. APLICAȚII ALE FORMULELOR DE TIP BINÉT PENTRU NUMERE FIBONACCI ȘI LUCAS

Profesor : ANGELICA UNGUREANU

LICEUL "ALEXANDRU CEL BUN"- BOTOȘANI

Se considerărelația de recurență :

$$x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}, x_0 = c, x_1 = d, a, b, c, d \in \mathbb{R}, a^2 + 4b > 0$$

Să se exprime x_n în funcție de c , dșirădăcinilek_1 , k_2 ale ecuației caracteristice asociate recurenței : $k^2 - ak - b = 0$.

Fie $k \in \mathbb{R}^*$

$$x_{n+1} - kx_n = ax_n + bx_{n-1} - kx_n = (a-k)(x_n - kx_{n-1}) + (b + a_k - k^2)x_{n-1}$$

Fie k_1 , k_2 rădăcinile ecuației caracteristice: $k^2 - ak - b = 0$, cu $\Delta = a^2 + 4b$

$\Rightarrow k_1 = \frac{a-\sqrt{\Delta}}{2}$, $k_2 = \frac{a+\sqrt{\Delta}}{2}$și $k_1 + k_2 = a$.

$x_{n+1} - k_1 x_n = (a - k_1)(x_n - k_1 x_{n-1}) = k_2 (x_n - k_1 x_{n-1}) = k_2^n (x_1 - k_1 x_0)$=$k_2^n (d -$ *k1 c*

$x_{n+1} - k_2 x_n$=$k_1^n (d - k_2 c)$

Scăzând relațiile se obține :

$$x_n (k_2 - k_1) = k_2^n (d - k_1 c) - k_1^n (d - k_2 c)$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{k_2^n (d - k_1 c) - k_1^n (d - k_2 c)}{(k_2 - k_1)}$$

Particularizăm relația pentru

a) șirul Fibonacci : $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$

$\Rightarrow d = 1$, $c = 0, a = b = 1$

Ecuația caracteristică este: $k^2 - k - 1 = 0$, cu $\Delta = 5 \Rightarrow k_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $k_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow F_n = \frac{k_2^n - k_1^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$**(Formule de tip Binét pentru șirul Fibonacci)**

b) șirul Lucas : $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$, $L_0 = 2$, $L_1 = 1$

$\Rightarrow d = 1$, $c = 2, a = b = 1$

Ecuațiacaracteristicăeste: $k^2 - k - 1 = 0$, cu $\Delta = 5 \Rightarrow k_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $k_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$L_n = \frac{k_2^n(1 - 1 + \sqrt{5}) - k_1^n(1 - 1 - \sqrt{5})}{\sqrt{5}} = k_2^n + k_1^n =$$

$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ **(Formule de tip Binét pentru șirul Lucas)**

Demonstrarea unor proprietăți

Proprietatea 1. $F_{2n} = F_n \cdot L_n$

Soluție :$F_n \cdot L_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\right]$
$= F_{2n}$

Proprietatea 2 . $F_n^2 + (-1)^n = F_n \cdot F_{n-1} + F_{n-1}^2$

Soluție :$F_n \cdot F_{n-1} + F_{n-1}^2 = F_{n-1}(F_n + F_{n-1}) = F_{n-1} \cdot F_{n+1} =$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] =$$

$$\frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} - \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]^{n-1}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]\right] =$$

$$\frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} + (-1)^n\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\right] =$$

$$\frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}+(-1)^n+2(-1)^n\right]=$$

$$\frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}-2(-1)^n+5(-1)^n\right]=$$

$$\frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}-2(-1)^n+5(-1)^n\right]=$$

$$\frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]^2+(-1)^n=F_n^2+(-1)^n$$

Proprietatea 3 .$L_n^2=5F_n^2+4(-1)^n$

Soluție :$5F_n^2+4(-1)^n=\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]^2+4(-1)^n=$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}-2(-1)^n+4(-1)^n=\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]^2=L_n^2$$

Proprietatea 4 .$L_n^2=L_{n+1}\cdot L_{n-1}+5(-1)^n$

Soluție

:$L_{n+1}\cdot L_{n-1}+5(-1)^n=\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]\cdot\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]+5(-1)^n=$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2+5(-1)^n$$

$$=$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}-3(-1)^n+5(-1)^n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}+2(-1)^n=$$

$$\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]^2=L_n^2$$

Proprietatea 5 .$F_{2n}\cdot F_{2n+1}=\frac{1}{5}(L_{4n+1}-1)$

Soluție :$F_{2n}\cdot F_{2n+1}=\frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\right]\cdot\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}\right]=$

$$\frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{4n+1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{4n+1}-\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]^{2n}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]=$$

$$\frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{4n+1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{4n+1}-1\right]=\frac{1}{5}(L_{4n+1}-1)$$

Proprietatea 6 .$L_{2n}=L_n^2+2(-1)^{n+1}$

Soluție :$L_n^2+2(-1)^{n+1}=\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]^2+2(-1)^{n+1}=$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}+2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+2(-1)^{n+1}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}=L_{2n}$$

Proprietatea 7 .$L_{2n}\cdot L_{2n+2}-5F_{n+1}^2=1$

Soluție :$L_{2n}\cdot L_{2n+2}-5F_{n+1}^2=$

$$\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\right]\cdot\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+2}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+2}\right]$$
$$-\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}\right]^2=$$

$$\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]^{2n}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]^{2n}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$
$$+2\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]^{2n+1}=$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2-2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2-2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)-2$$
$$=1+2-2=1$$

Bibliografie: Radovici-Mărculescu, P. *Probleme de teoria elementară a numerelor* , București,Editura Tehnică, 1986.Popovici,C.,*Teoria numerelor*, București, Editura Didactică și Pedagogică, 1973.

4.Procedee de stabilire a concurenţei a trei drepte în plan

Exemplificare prin probleme

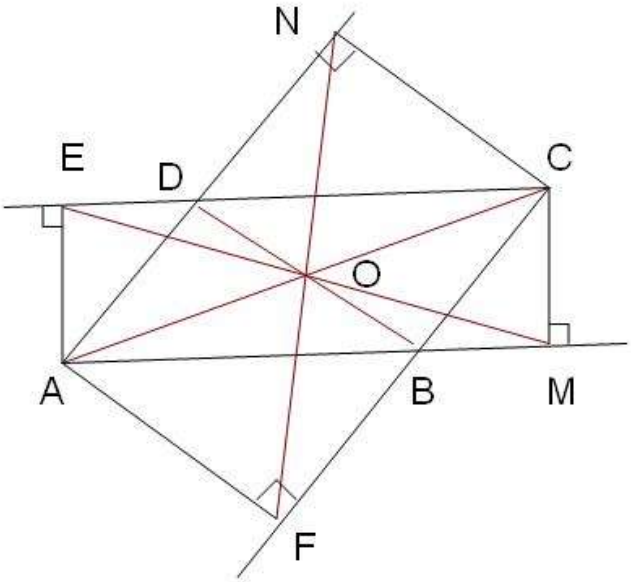
Prof. Ioana Anton, Şcoala Gimnazială Nr. 1 Bălteni, jud. Vaslui

1. Demonstrarea concurenţei folosind unicitatea mijlocului unui segment

Fie O mijlocul segmentului[AB]. Pe o dreaptă d se identifică punctele C şi D, iar pe o dreaptă g se identifică punctele E şi F, astfel încât segmentele [CD] şi [EF] să aibă acelaşi mijloc O.

Problema 1

Fie paralelogramul ABCD şi fie punctele E şi F proiecţiile punctului A pe dreptele DC, respectiv BC, iar M şi N proiecţiile punctului C pe dreptele AB, respectiv AD. Să se demonstreze că dreptele AC, EM, NF şi DB sunt concurente.



Demonstraţie:

Din ABCD paralelogram deducem că $AN \| FC$.

$$\Delta ANC \equiv \Delta CFA (I.U.)$$

Din congruenţa triunghiurilor ANC şi CFA obţinem că segmentele [AN]şi [FC] sunt congruente, adică patrulaterul ANCF este paralelogram.

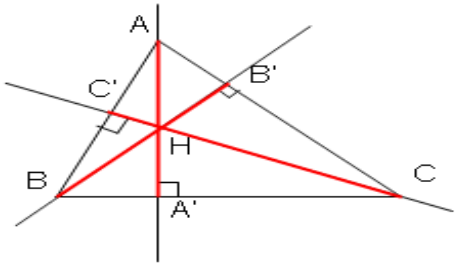
Acest paralelogram care are şi un unghi drept este dreptunghi. În aceste condiţii, diagonala [NF] trece prin mijlocul O al lui [AC].

Analog se demonstrează că patrulaterul AMCE este dreptunghi, iar diagonala [EM] trece prin mijlocul O al lui [AC].

Astfel, dreptele AC, EM, NF şi DB sunt concurente.

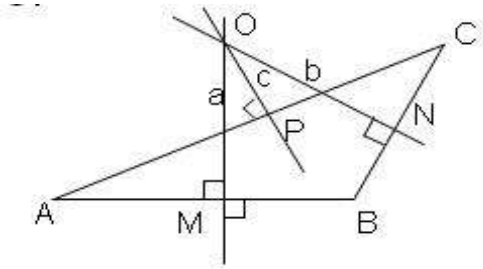
2. Demonstrarea concurenţei folosind proprietatea de concurenţă a liniilor importante în triunghi

a) Pentru a demonstra că trei drepte coplanare sunt concurente este suficient să demonstrăm că cele trei drepte conţin înălţimile uni triunghi.



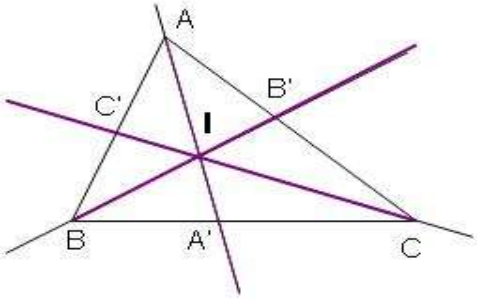
Dacă [AA'], [BB'] şi [CC'] sunt înălţimile triunghiului ABC, atunci AA'∩BB'∩CC'={H}

b) Dacă cele trei drepte sunt mediatoarele laturilor unui triunghi, atunci ele sunt concurente.



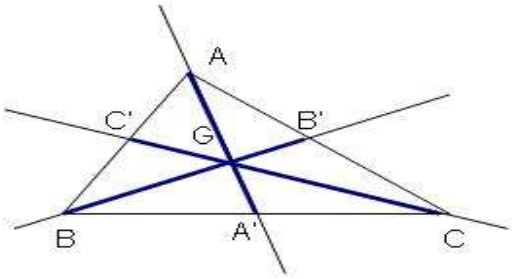
Dacă dreptele a, b şi c sunt mediatoarele laturilor [AB], [BC] şi respectiv [AC], atunci a∩b∩c={O}.

c)Dacă cele trei drepte includ bisectoarele laturilor unui triunghi, atunci ele sunt concurente.



Dacă semidreptele [AA', [BB' şi [CC' sunt bisectoarele triunghiului ABC, atunci AA'∩BB'∩CC'={I}

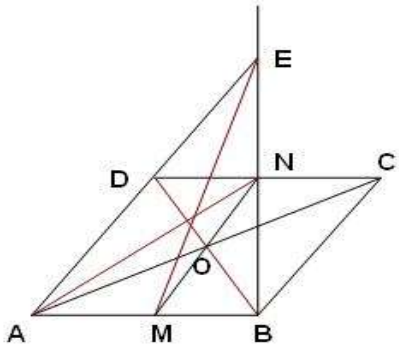
d) Demonstrarea concurenţei a trei drepte coplanare se reduce la a găsi un triunghi a căror mediane au ca drepte suport aceste drepte.



Dacă [AA'], [BB'] şi [CC'] sunt medianele triunghiului ABC, atunci AA'∩BB'∩CC'={G}

Problema 2

Fie rombul ABCD, unde M este mijlocul laturii AB, iar N simetricul punctului M faţă de punctul O, {O}= AC∩BD. Dacă dreapta BN intersectează dreapta AD în punctul E, atunci dreptele EM, AN şi BD sunt concurente, iar $AM = \frac{AE}{4}$.



Demonstraţie:

Din faptul că N este simetricul punctului M faţă de punctul O obţinem că MO=ON.

Observăm că

$$\Delta AOM \equiv \Delta CON(L.U.L.)$$

de unde deducem că dreptele AB şi NC sunt paralele. Ţinând cont de axioma paralelelor deducem că punctul N aparţine dreptei DC şi N este mijlocul segmentului [DC].

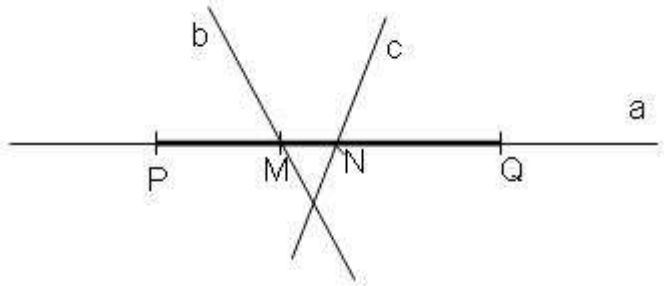
$$Dar \Delta BNC \equiv \Delta EDC(U.L.U) \Rightarrow [DE] \equiv [BC] si [EN] \equiv [NB].$$

Deducem că BD, EM şi AN sunt mediane în triunghiul AEB, deci sunt concurente.

Din ABCD romb şi M mijlocul laturii AB, deducem că AM este jumătate din AD.

Dar cum AD=DE, obţinem $AM = \frac{AE}{4}$.

3. Demonstrarea concurenţei utilizând proprietatea: dacă o dreaptă taie şi împarte un segment din prima dreaptă în acelaşi raport în care îl taie şi îl împarte cea de-a treia dreaptă, atunci cele trei drepte considerate sunt concurente.



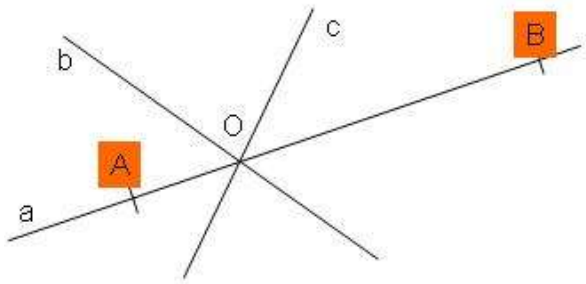
Fie $M, N \in (PQ)$.

Dacă

$\frac{PM}{MQ} = \frac{PN}{NQ}$ rezultă că punctele

M şi N coincid şi deci a∩b∩c={M}.

4. Demonstrarea concurenţei utilizând proprietatea: dacă două puncte de pe una dintre drepte sunt coliniare cu punctul de intersecţie al celorlalte două drepte.



Dacă b∩c ={O} şi $A, B \in a$, iar

punctele A, O şi B sunt coliniare,

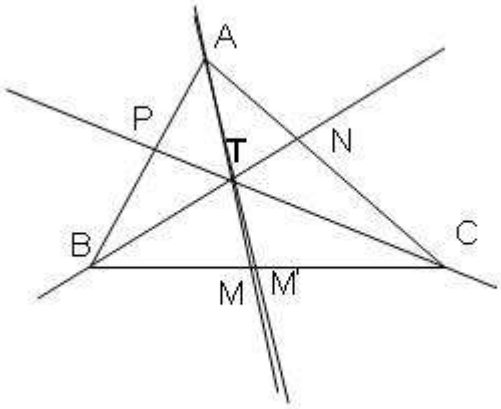
atunci a∩b∩c ={O}.

5. Demonstrarea concurenţei utilizând reciproca teoremei lui Ceva

Reciproca teoremei lui Ceva. Fie triunghiul *ABC* şi punctele *M*, *N* şi *P* situate pe dreptele *BC*, *CA*, respectiv *AB*, diferite de vârfurile *A*, *B* şi *C*.

Dacă $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$, atunci dreptele *AM*, *BN* şi *CP* sunt concurente.

<u>Demonstraţie.</u>



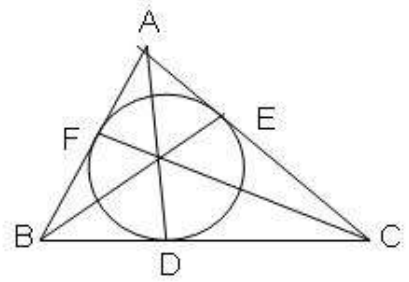
Deoarece punctele P şi N se află pe dreptele AB şi respectiv AC care conţin laturile triunghiului ABC, rezultă că dreptele CP şi BN se intersectează într-un punct T .

Presupunem că T nu se află pe dreapta AM. Construim AM' care să treacă prin T, cu M' aparţinând lui BC.

Aplicând teorema lui Ceva în ΔABC obţinem: $\frac{M'B}{M'C}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB}=1$, dar din ipoteză avem: $\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB}=1$, deci $\frac{M'B}{M'C}=\frac{MB}{MC}\Rightarrow\frac{M'B}{M'B+M'C}=\frac{MB}{MB+MC}\Rightarrow\frac{M'B}{BC}=\frac{MB}{BC}\Rightarrow$ că punctele M şi M' coincid, adică dreptele *AM, BN* şi *CP* sunt concurente.

Problema 3

Într-un triunghi ABC dreptele care unesc vârfurile triunghiului cu punctele de contact ale cercului înscris cu laturile opuse sunt concurente. **(Punctul de concurenţă a celor trei drepte se numeşte punctul lui Gergonne).**



Demonstraţie:

Notăm punctele de contact ale cercului cu laturile triunghiului ABC cu D, E şi F, unde D∈BC, E∈AC şi F∈AB. Vom folosi reciproca teoremei lui Ceva şi vom arăta că are loc relaţia:

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1.$$

Dar tangentele duse dintr-un punct exterior la un cerc sunt congruente, adică [BD] ≡ [BF], [CE] ≡ [CD] şi [AE] ≡ [AF].

Deci, relaţia de mai sus este evidentă, ceea ce înseamnă că dreptele AD, BE şi CF sunt concurente.

Bibliografie:

Nicolescu L., Boskoff V., *Probleme practice de geometrie*, Editura Tehnică, Bucureşti , 1990;

Popovici D., Neagu M., Streinu Cercel G., *Matematică*, Editura Sigma, 2002;

Beju A. E., Beju I., *Compendiu de matematică*, Editura ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti, 1983.

5.Exerciţii cu progresii aritmetice şi aplicaţii ale determinanţilor în geometrie

Prof.Ciobîcă Constantin. prof Ciobîcă Elena

Colegiul Vasile Lovinescu Fălticeni

1. Fie familiile de puncte $A_n(4n+3;2n^2+5n),\forall n\in N^*$, $B_n(8n+7;4n^2+11n),\forall n\in N^*$, $C_n(12n+11;6n^2+17n),\forall n\in N^*$. Să se demonstreze că punctele $A_n,B_n,C_n,\forall n\in N^*$ sunt coliniare.

   Rezolvare:

   Punctele $A_n,B_n,C_n,\forall n\in N^*$ sunt coliniare dacă:

$$\begin{vmatrix} x_{A_n} & y_{A_n} & 1 \\ x_{B_n} & y_{B_n} & 1 \\ x_{C_n} & y_{C_n} & 1 \end{vmatrix}=0,\forall n\in N^*$$

$$\begin{vmatrix} 4n+3 & 2n^2+5n & 1 \\ 8n+7 & 4n^2+11n & 1 \\ 12n+11 & 6n^2+17n & 1 \end{vmatrix}=0,\forall n\in N^* \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4n+3 & 2n^2+5n & 1 \\ 4n+4 & 2n^2+6n & 0 \\ 8n+8 & 4n^2+12n & 0 \end{vmatrix}=0,\forall n\in N^*$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4n+4 & 2n^2+6n \\ 2(4n+4) & 2(2n^2+6n) \end{vmatrix}=0, n\in N^*.$$

2. Fie familiile de puncte $A_n\left(2n+1;\sum_{k=1}^{n}(2k+1)\right),\forall n\in N^*$, $B_n\left(8n+7;\sum_{k=1}^{n}(8k+7)\right),\forall n\in N^*, C_n\left(14n+13;\sum_{k=1}^{n}(14k+13)\right),\forall n\in N^*$. Să se arate că punctele $A_n,B_n,C_n,\forall n\in N^*$ sunt coliniare.

   Rezolvare.

   Punctele $A_n,B_n,C_n,\forall n\in N^*$ sunt coliniare dacă:

$$\begin{vmatrix} x_{A_n} & y_{A_n} & 1 \\ x_{B_n} & y_{B_n} & 1 \\ x_{C_n} & y_{C_n} & 1 \end{vmatrix}=0,\forall n\in N^*$$

$$\begin{vmatrix} 2n+1 & \sum_{k=1}^{n}(2k+1) & 1 \\ 8n+7 & \sum_{k=1}^{n}(8k+7) & 1 \\ 14n+3 & \sum_{k=1}^{n}(14k+13) & 1 \end{vmatrix} = 0, \forall n \in N^*$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2n+1 & \sum_{k=1}^{n}(2k+1) & 1 \\ 6n+6 & \sum_{k=1}^{n}(8k+7)-\sum_{k=1}^{n}(2k+1) & 0 \\ 12n+12 & \sum_{k=1}^{n}(14k+13)-\sum_{k=1}^{n}(2k+1) & 0 \end{vmatrix} = 0, \forall n \in N^*$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 6n+6 & \sum_{k=1}^{n}(6k+6) \\ 12n+12 & \sum_{k=1}^{n}(12k+12) \end{vmatrix} = 0, \forall n \in N^* \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 6(n+1) & 6\sum_{k=1}^{n}(k+1) \\ 12(n+1) & 12\sum_{k=1}^{n}(k+1) \end{vmatrix} = 0, \forall n \in N^*$$

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1} \in R$ un şir de numere reale in progresie aritmetică şi familiile de puncte: $A_n\left(a_n; \sum_{k=1}^{n} a_k\right), \forall n \in N^*$, $B_n\left(a_{n+3}; \sum_{k=1}^{n} a_{k+3}\right), \forall n \in N^*$, $C_n\left(a_{n+5}; \sum_{k=n}^{n} a_{k+5}\right), \forall n \in N^*$. Să se arate că punctele $A_n, B_n, C_n, \forall n \in N^*$ sunt coliniare.

Rezolvare:

Punctele $A_n, B_n, C_n, \forall n \in N^*$ sunt coliniare dacă:

$$\begin{vmatrix} x_{A_n} & y_{A_n} & 1 \\ x_{B_n} & y_{B_n} & 1 \\ x_{C_n} & y_{C_n} & 1 \end{vmatrix} = 0, \forall n \in N^*$$

$$\begin{vmatrix} a_n & \sum_{k=1}^{n} a_k & 1 \\ a_{n+3} & \sum_{k=1}^{n} a_{k+3} & 1 \\ a_{n+5} & \sum_{k=1}^{n} a_{k+5} & 1 \end{vmatrix} = 0, \forall n \in N^* \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_n & \sum_{k=1}^{n} a_k & 1 \\ a_{n+3}-a_n & \sum_{k=1}^{n} a_{k+3}-\sum_{k=1}^{n} a_k & 0 \\ a_{n+5}-a_n & \sum_{k=1}^{n} a_{k+5}-\sum_{k=1}^{n} a_k & 0 \end{vmatrix} = 0 \forall n \in n^*$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3r & \sum_{k=1}^{n} 3r \\ 5r & \sum_{k=1}^{n} 5r \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3r & 3rn \\ 5r & 5rn \end{vmatrix} = 0, \forall n \in N^*$$

4. Fie $(a_n)_{n\geq 1} \in R$ un şir de numere reale in progresie aritmetică şi familiile de puncte:

$$A_n\left(\sum_{k=1}^{n} a_k;\sum_{k=1}^{n} a_{2k+1}\right),\forall n\in N^*$$

$$B_n\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k+3};\sum_{k=1}^{n} a_{2k+4}\right),\forall n\in N^*$$

$$C_n\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k+5};\sum_{k=1}^{n} a_{2k+6}\right),\forall n\in N^*$$

Să se arate că punctele $A_n, B_n, C_n, \forall n\in N^*$ sunt coliniare.

Rezolvare.

Punctele $A_n, B_n, C_n, \forall n\in N^*$ sunt coliniare dacă:

$$\begin{vmatrix} x_{A_n} & y_{A_n} & 1 \\ x_{B_n} & y_{B_n} & 1 \\ x_{C_n} & y_{C_n} & 1 \end{vmatrix} = 0, \forall n\in N^*$$

$$\begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_k & \sum_{k=1}^{n} a_{2k+1} & 1 \\ \sum_{k=1}^{n} a_{k+3} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k+4} & 1 \\ \sum_{k=1}^{n} a_{k+5} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k+6} & 1 \end{vmatrix} = 0, \forall n\in N^*$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_k & \sum_{k=1}^{n} a_{2k+1} & 1 \\ \sum_{k=1}^{n} a_{k+3} - \sum_{k=1}^{n} a_k & \sum_{k=1}^{n} a_{2k+4} - \sum_{k=1}^{n} a_{2k+1} & 0 \\ \sum_{k=1}^{n} a_{k+5} - \sum_{k=1}^{n} a_k & \sum_{k=1}^{n} a_{2k+6} - \sum_{k=1}^{n} a_{2k+1} & 0 \end{vmatrix} = 0, \forall n\in N^*$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n} (a_{k+3} - a_k) & \sum_{k=1}^{n} (a_{2k+4} - a_{2k+1}) \\ \sum_{k=1}^{n} (a_{k+5} - a_k) & \sum_{k=1}^{n} (a_{2k+6} - a_{2k+1}) \end{vmatrix} = 0, \forall n\in N^*$$

$$a_{k+3} - a_k = 3r;\ a_{k+5} - a_k = 5r;\quad a_{2k+4} - a_{2k+1} = 3r;\quad a_{2k+6} - a_{2k+1} = 5r$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n} 3r & \sum_{k=1}^{n} 3r \\ \sum_{k=1}^{n} 5r & \sum_{k=1}^{n} 5r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3rn & 3rn \\ 5rn & 5rn \end{vmatrix} = 0, \forall n\in N^*$$

5. Fie $(a_n)_{n\geq 1}\in R$ un şir de numere reale in progresie aritmetică şi familiile de puncte:

$$A_n\left(a_{2n};\sum_{k=1}^{n}a_{2k}\right),\forall n\in N^*$$

$$B_n\left(a_{2n+1};\sum_{k=1}^{n}a_{2k+1}\right),\forall n\in N^*$$

$$C_n\left(a_{2n+3};\sum_{k=1}^{n}a_{2k+3}\right),\forall n\in N^*$$

Să se arate că punctele $A_n,B_n,C_n,\forall n\in N^*$ sunt coliniare.

Rezolvare.

Punctele $A_n,B_n,C_n,\forall n\in N^*$ sunt coliniare dacă:

$$\begin{vmatrix} x_{A_n} & y_{A_n} & 1 \\ x_{B_n} & y_{B_n} & 1 \\ x_{C_n} & y_{C_n} & 1 \end{vmatrix}=0,\forall n\in N^*$$

$$\begin{vmatrix} a_{2n} & \sum_{k=1}^{n}a_{2k} & 1 \\ a_{2n+1} & \sum_{k=1}^{n}a_{2k+1} & 1 \\ a_{2n+3} & \sum_{k=1}^{n}a_{2k+3} & 1 \end{vmatrix}=0,\forall n\in N^*\Leftrightarrow\begin{vmatrix} a_{2n} & \sum_{k=1}^{n}a_{2k} & 1 \\ a_{2n+1}-a_{2n} & \sum_{k=1}^{n}a_{2k+1}-\sum_{k=1}^{n}a_{2k} & 0 \\ a_{2n+3}-a_{2n} & \sum_{k=1}^{n}a_{2k+3}-\sum_{k=1}^{n}a_{2k} & 0 \end{vmatrix}=0,\forall n\in N^*$$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix} a_{2n+1}-a_{2n} & \sum_{k=1}^{n}(a_{2k+1}-a_{2k}) \\ a_{2n+3}-a_{2n} & \sum_{k=1}^{n}(a_{2k+3}-a_{2k}) \end{vmatrix}=0,\forall n\in N^*\Rightarrow\begin{vmatrix} r & \sum_{k=1}^{n}r \\ 3r & \sum_{k=1}^{n}3r \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} r & rn \\ 3r & 3rn \end{vmatrix}=0,\forall n\in N^*$$

6. DERIVATE DE ORDIN SUPERIOR

Prof. Laura Radu

Liceul Teoretic „Emil Racoviţă”, Galaţi

Fie $E \subseteq R$, E interval sau reuniune de intervale din R, o funcţie $f: E \to R$ şi x_0 un punct de acumulare al mulţimii E.

Definiţie : Funcţia f are derivată în punctul $x_0 \in E$, dacă $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ există în $\overline{R}$.

În acest caz limita se notează cu $f'(x_0)$ şi se numeşte derivata funcţiei f în punctul x_0.

Deci $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Definiţie : Funcţia f este derivabilă în punctul $x_0 \in E$, dacă $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ există şi este finită.

Şi în acest caz limita se noteaza cu $f'(x_0)$ şi $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Dacă funcţia f este derivabilă în orice punct al mulţimii E, spunem că funcţia f este derivabilă pe mulţimea E.

O funcţie derivabilă se mai numeşte derivabilă de ordinul 1 iar f' se numeşte derivata de ordinul întâi.

Definiţie : Funcţia f este de două ori derivabilă în $x_0 \in E$ dacă :

- f este derivabilă într-o vecinatate a lui x_0 ;
- f' este derivabilă în x_0.

În acest caz derivata lui f' se numeşte derivata a doua (sau de ordinul doi) a funcţiei f în punctul x_0 şi se notează $f''(x_0)$.

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

Notaţii : $(f')' = f'' = f^{(2)}$, $f^{(0)} = f$.

Prin recurenţă se poate defini derivata de ordin superior $n \in N$.

Definiţie : Funcţia f este derivabila de n ori în $x_0 \in E$,dacă :

- f este derivabilă de $n-1$ ori într-o vecinatate a lui x_0 ;
- $f^{(n-1)}$ este derivabilă în x_0 .

Dacă funcţia este derivabilă de orice ordin $n \in N$ pe multimea E , spunem că este derivabilă de ordinul ∞ sau infinit derivabilă sau indefinit derivabilă pe E .

Propoziţie : Funcţiile elementare sunt indefinit derivabile pe orice interval deschis inclus în mulţimea lor de definiţie .

Operaţii cu funcţii derivabile

Dacă funcţiile $f, g : E \to R$ sunt derivabile în x_0 (sau pe E) , atunci şi funcţiile $f+g$, $f-g$, αf , $\alpha \in R$, fg şi $\frac{f}{g}$, cu $g(x_0) \neq 0$ (sau $g(x) \neq 0$, $x \in E$) sunt derivabile în x_0 (respectiv pe E) şi :

$$(f+g)' = f' + g' \ , \qquad (f-g)' = f' - g' \ ,$$

$$(fg)' = f'g + fg' \ , \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \ .$$

Teoremă (Formula lui Leibniz) :

Dacă funcţiile $f, g : E \to R$ sunt derivabile de n ori pe E , atunci funcţia fg este derivabilă de n ori pe E şi

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + C_n^1 f^{(n-1)}g' + C_n^2 f^{(n-2)}g'' + \ldots\ldots\ldots\ldots + fg^{(n)},$$

sau $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$.

Demonstraţie : Formula este adevarată pentru *n=1*, deoarece avem

$$(fg)' = f'g + fg' .$$

Presupunem că formula este adevarată până la *n-1*, adică

$$(fg)^{(n-1)} = f^{(n-1)}g + C_{n-1}^1 f^{(n-2)}g' + C_{n-1}^2 f^{(n-3)}g'' + \ldots\ldots\ldots\ldots + fg^{(n-1)} \qquad (1)$$

Observăm că fiecare din termenii ce intervin conţin pe f şi g derivaţi de ordinul *n-1* cel mult . Funcţiile f şi g fiind derivabile de n ori pe E, urmează ca fiecare funcţie care intervine în dezvoltarea (1) să mai fie derivabilă cel puţin o dată .

Avem deci:

$$(fg)^{(n)} = \left(f^{(n-1)}g\right)' + \left(C_{n-1}^1 f^{(n-2)}g'\right)' + \left(C_{n-1}^2 f^{(n-3)}g''\right)' + \ldots\ldots\ldots\ldots + \left(C_{n-1}^{n-1} fg^{(n-1)}\right)' =$$

$$= f^{(n)}g + f^{(n-1)}g' + C_{n-1}^1 f^{(n-1)}g' + C_{n-1}^1 f^{(n-2)}g'' + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_{n-1}^{n-1} f'g^{(n-1)} + C_{n-1}^{n-1} fg^{(n)}$$

dar $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$, rezultă

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + C_n^1 f^{(n-1)}g' + C_n^2 f^{(n-2)}g'' + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_n^{n-1} f'g^{(n-1)} + fg^{(n)}$$

ceea ce trebuia demonstrat .

<u>Exemple de funcţii indefinit derivabile</u>

1) Funcţii polinomiale

$$f:R\to R,\quad f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.....+a_1x+a_0,\quad a_k\in R,\quad k=\overline{0,n},\quad a_n\neq 0$$

Avem succesiv:

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+.....+2a_2x+a_1$$

$$f''(x)=n(n-1)a_nx^{n-2}+(n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3}+.....+2a_2$$

……

$$f^{(n)}(x)=n!\cdot a_n$$

$$f^{(n+1)}(x)=f^{(n+2)}(x)=.....=0$$

Se observă că după n derivări succesive, o funcţie polinomială de gradul n se reduce la o constantă, iar după încă o derivare se anulează .

2) Funcţii raţionale

Nu toate funcţiile raţionale se derivează simplu de n ori .

De exemplu $f:R\to R$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$. Avem succesiv : $f'(x)=\dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$,

$f''(x)=\dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$, $f^{(3)}(x)=\dfrac{-6(x^4-6x^2+1)}{(x^2+1)^4}$ şi observăm că derivatele au forme tot mai complexe .

Alta este situaţia funcţiilor raţionale de forma $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ unde $Q(x)$ admite numai rădăcini reale. În acest caz, putem scrie:

$$Q(x)=(x-x_1)^{m_1}\cdot(x-x_2)^{m_2}\cdot...\cdot(x-x_r)^{m_r}$$

unde $x_1,x_2,...,x_r\in R$ sunt rădăcinile lui Q , iar funcţia f admite o descompunere în fracţii simple sub forma:

$$f(x)=C(x)+\frac{a_{11}}{x-x_1}+\frac{a_{12}}{(x-x_1)^2}+.....+\frac{a_{1m_1}}{(x-x_1)^{m_1}}+.....+\frac{a_{r1}}{x-x_r}+\frac{a_{r2}}{(x-x_r)^2}+.....+\frac{a_{rm_r}}{(x-x_r)^{m_r}}$$

unde C(x) este câtul împărţirii lui P la Q .

C(x) este o funcţie polinomială care este indefinit derivabilă , iar fiecare din ceilalţi termeni ai descompunerii se scrie sub forma $g(x)=a_k(x-x_k)^{-k}$ şi se derivează simplu astfel :

$$g'(x)=-ka_k(x-x_k)^{-k-1}$$

$$g''(x)=+k(k+1)a_k(x-x_k)^{-k-2}$$

$$g^{(3)}(x)=-k(k+1)(k+2)a_k(x-x_k)^{-k-3}$$

.....

$$g^{(n)}(x)=(-1)^n\cdot k(k+1)(k+2).....(n-1)n\cdot a_k(x-x_k)^{-k-n}$$

sau $g^{(n)}(x)=(-1)^n\cdot\dfrac{n!}{(k-1)!}\cdot\dfrac{a_k}{(x-x_k)^{k+n}}$.

3) Funcţii exponenţiale

a) $f:R\to R$, $f(x)=e^{ax}$, $n\geq 1$, a≠0

$f'(x)=a\cdot e^{ax}$, $f''(x)=a^2\cdot e^{ax}$, $f^{(3)}(x)=a^3\cdot e^{ax}$, ……., $f^{(n)}(x)=a^n\cdot e^{ax}$

b) $f:R\to R$, $f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$

$f'(x)=a^x\cdot\ln a$, $f''(x)=a^x\cdot\ln^2 a$, $f^{(3)}(x)=a^x\cdot\ln^3 a$, ..., $f^{(n)}(x)=a^x\cdot\ln^n a$

4) Funcţii logaritmice

$$f:\left(-\frac{b}{a},\infty\right)\to R,\quad f(x)=\ln(ax+b)$$

$f'(x)=\dfrac{a}{ax+b}$, $f''(x)=-\dfrac{a^2}{(ax+b)^2}$, $f^{(3)}(x)=\dfrac{1\cdot 2\cdot a^3}{(ax+b)^3}$, ...,

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!\cdot a^n}{(ax+b)^n}$$

5) Funcţii trigonometrice

a) Funcţia *sinx* este indefinit derivabilă pe R .

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\sin x)'' = -\sin x = \sin(x+\pi) = \sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\sin x)^{(3)} = -\cos x = -\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\pi\right) = \sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

.....

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

În mod analog găsim că $(\sin(ax+b))^{(n)} = a^n \sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$.

b) Funcţia *cosx* este indefinit derivabilă pe R .

$$(\cos x)' = -\sin x = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\cos x)'' = -\cos x = \cos(x+\pi) = \cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\cos x)^{(3)} = \sin x = -\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}+\pi\right) = \cos\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

.....

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

În mod analog găsim că $(\cos(ax+b))^{(n)} = a^n \cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$.

<u>Exerciţii rezolvate:</u>

1) Fie $f: R\setminus\{1,3\}\to R$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$. Să se determine derivata de ordinul n a funcţiei f.

Soluţie : Se observă că $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-1}\right)$. Folosind regulile de derivare obţinem :

$$\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x-3)^{n+1}} \quad \text{şi} \quad \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x-1)^{n+1}}$$ de unde rezultă că

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x-3)^{n+1}}-\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x-1)^{n+1}}\right]$$ sau

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n\cdot n!}{2}\left[\frac{1}{(x-3)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right].$$

Se demonstrează apoi prin inducţie că formula gasită este adevarată pentru orice $n\geq 1$.

2) Fie funcţia $f: R\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}\to R$, $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. Să se calculeze $f^{(n)}(x)$, $n\in N^*$.

Soluţie: $f'(x)=\dfrac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}=(ad-bc)(cx+d)^{-2}$

$$f''(x)=(ad-bc)\cdot(-2)\cdot c\cdot(cx+d)^{-3}$$

$$f'''(x)=(ad-bc)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot c^2\cdot(cx+d)^{-4}$$

$$f^{(4)}(x)=(ad-bc)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot c^3\cdot(cx+d)^{-5}$$

.....

$$f^{(n)}(x)=(ad-bc)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot\ldots\cdot(-n)\cdot c^{n-1}\cdot(cx+d)^{-(n+1)}\Rightarrow$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{(ad-bc)\cdot(-1)^{n-1}\cdot c^{n-1}\cdot n!}{(cx+d)^{n+1}}.$$

Relaţia obţinută se demonstrează prin inducţie matematică.

3) Fie $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases}\sin^3 x, & x\le 0\\ ax^4+bx^3, & x>0\end{cases}$, $a,b\in R^*$. Să se arate că f este de două ori derivabilă în $x_0=0$ şi să se calculeze $f''(0)$.

Soluţie : Din $l_s(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\sin^3 x=0$, $l_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(ax^4+bx^3)=0$, $f(0)=\sin^3 0=0$

rezultă că

funcţia f este continuă în $x_0=0$. Studiem dacă f este derivabilă în $x_0=0$.

Avem: $f_s'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{\sin^3 x-0}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\sin^2 x=1\cdot 0=0$,

$$f_d'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{ax^4+bx^3-0}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(ax^3+bx^2)=0 .$$

Cum $f_s'(0)=f_d'(0)=0\in R$ rezultă că f este derivabilă în $x_0=0$ şi $f'(0)=0$.

Studiem dacă f este de două ori derivabilă în $x_0=0$. Pentru aceasta calculăm

$$f'(x)=\begin{cases}3\sin^2 x\cos x, & x<0\\ 0, & x=0\\ 4ax^3+3bx^2, & x>0\end{cases}.$$

Avem: $f_s''(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{3\sin^2 x\cos x-0}{x}=0$,

$$f_d''(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\downarrow 0}\frac{4ax^3+3bx^2-0}{x}=0 .$$

Din $f_s''(0)=f_d''(0)=0\in R$ rezultă că f este de două ori derivabilă în $x_0=0$ şi $f''(0)=0$.

4) Să se determine polinomul *P(x)* de grad minim pentru care funcţia $f:R\to R$,

$f(x)=\begin{cases}P(x), & x<0\\ 3e^{-x}, & x\ge 0\end{cases}$ este de două ori derivabilă pe R.

Soluţie : Se observă că funcţia f este de două ori derivabilă pe (-∞, 0), ca funcţie polinomială

şi pe (0, +∞) ca fiind compunere de funcţii elementare . Pentru ca f să fie de două ori

derivabilă pe R trebuie să arătăm că este de două ori derivabilă şi în $x_0 = 0$.

Studiem câteva cazuri în funcţie de gradul polinomului P .

a) grad(P)=0, rezultă *P(x)=c* (polinomul constant) .

Din f continuă în $x_0 = 0$ rezultă că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0) \Rightarrow c = 3$.

Funcţia f trebuie să fie derivabilă în $x_0 = 0$, deci $f_s'(0) = f_d'(0) \in R$.

Avem $f_s'(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{3-3}{x} = 0$ şi

$$f_d'(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{3e^{-x}-3}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{-3(e^{-x}-1)}{-x} = -3.$$

Deoarece derivatele laterale ale funcţiei sunt diferite în 0, rezultă că f nu este derivabilă în $x_0 = 0$. Deci polinomul constant P(x)=3 nu corespunde problemei .

b) grad(P)=1, rezultă P(x)= ax+b , a,b∈R, a≠0 .

Din f continuă în $x_0 = 0$ rezultă că $b = 3$, iar din condiţia de derivare în $x_0 = 0$ rezultă că $a = -3$. Deci P(x) = -3x + 3.

Mai trebuie să verificăm dacă pentru acest polinom f este de două ori derivabilă în $x_0 = 0$ şi anume $f_s''(0) = f_d''(0) \in R$. Avem :

$$f'(x) = \begin{cases} -3, & x < 0 \\ -3e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases},$$

$$f_s''(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{-3+3}{x} = 0 \text{ şi}$$

$$f_d''(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{-3e^{-x}+3}{x} = 3,$$

ceea ce arată că f nu este de două ori derivabilă în $x_0 = 0$. Deci nici un polinom de gradul întai nu verifică cerinţa problemei .

c) grad(P)=2, rezultă $P(x) = ax^2 + bx + c$, a,b,c∈R, a≠0 .

Din condiţia de continuitate în $x_0 = 0$ obţinem că $c = 3$.

Din condiţia de derivabilitate în $x_0 = 0$ se obţine $b = -3$, iar din condiţia ca f să fie de două ori derivabilă în $x_0 = 0$ rezultă că $a = \frac{3}{2}$.

În concluzie, polinomul căutat este $P(x) = \frac{3x^2}{2} - 3x + 3$.

5) Se consideră funcţia $f : R \to R$, $f(x) = x^2 \sin x$. Să se calculeze $f^{(20)}(x)$.

Soluţie : Conform formulei lui Leibniz avem :

$$f^{(20)}(x) = C_{20}^0 (\sin x)^{(20)} (x^2) + C_{20}^1 (\sin x)^{(19)} (x^2)' + C_{20}^2 (\sin x)^{(18)} (x^2)'' + \\ + C_{20}^3 (\sin x)^{(17)} (x^2)^{(3)} + ...$$

Dar $(x^2)' = 2x$, $(x^2)'' = 2$, $(x^2)^{(n)} = 0$, $\forall n \geq 3$.

Aşadar $f^{(20)}(x) = x^2 \sin x - 20 \cdot 2x \cdot \cos x - 2 \cdot 190 \sin x$ sau

$$f^{(20)}(x) = x^2 \sin x - 40x \cos x - 380 \sin x .$$

6) Să se determine domeniul de definiţie şi apoi derivata de ordinul n pentru funcţia $f : D \to R$, $f(x) = \frac{1}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$.

Soluţie: Pentru aflarea domeniului D, descompunem în factori numitorul fracţiei:

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = x^3 - x + 6x^2 + 12x + 6 = x(x^2 - 1) + 6(x+1)^2 = \\ = (x+1)(x^2 - x + 6x + 6) = \\ (x+1)(x^2 + 5x + 6) = \\ = (x+1)(x+2)(x+3).$$

Domeniul de definiţie al funcţiei este $D = R \setminus \{-1, -2, -3\}$.

Cu acest rezultat funcţia f se poate scrie astfel:

$$f(x)=\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}=$$

$$\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)\cdot\frac{1}{x+3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)-\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{2(x+3)}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}=\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2(x+3)}=$$

$$=\frac{1}{2}(x+1)^{-1}-(x+2)^{-1}+\frac{1}{2}(x+3)^{-1}.$$

Calculăm acum derivata de ordin n a funcţiei f:

$$f'(x)=\frac{-1}{2}(x+1)^{-2}-(-1)(x+2)^{-2}+\frac{-1}{2}(x+3)^{-2},$$

$$f''(x)=\frac{(-1)\cdot(-2)}{2}(x+1)^{-3}-(-1)(-2)(x+2)^{-3}+\frac{(-1)\cdot(-2)}{2}(x+3)^{-3},$$

$$f'''(x)=\frac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)}{2}(x+1)^{-4}-(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)(x+2)^{-4}+\frac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)}{2}(x+3)^{-4}$$

,

.....

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n\cdot n!}{2}(x+1)^{-(n+1)}-(-1)^n\cdot n!\cdot(x+2)^{-(n+1)}+\frac{(-1)^n\cdot n!}{2}(x+3)^{-(n+1)}\Leftrightarrow$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n\cdot n!}{2}\left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}}-\frac{2}{(x+2)^{n+1}}+\frac{1}{(x+3)^{n+1}}\right).$$

Relaţia găsită se demonstrează prin inducţie matematică.

7) Se consideră funcţia $f:R^*\to R$ care satisface relaţia $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=x^3$, pentru orice $x\in R^*$, $a,b\in R^*$, $a\neq b$. Să se calculeze derivata de ordinul n a funcţiei f.

Soluţie: Deoarece relaţia dată este adevărată pentru orice $x\in R^*$, ea este adevărată şi pentru

$\frac{1}{x} \in R^*$. Astfel, înlocuind x cu $\frac{1}{x}$, obţinem:

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=\frac{1}{x^3} \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{x^3}-bf(x)\right)=\frac{1}{ax^3}-\frac{b}{a}f(x).$$

Înlocuim acum pe $f\left(\frac{1}{x}\right)$ în relaţia din enunţ şi aflăm pe $f(x)$:

$$af(x)+b\left(\frac{1}{ax^3}-\frac{b}{a}f(x)\right)=x^3 \Rightarrow af(x)-\frac{b^2}{a}f(x)=x^3-\frac{b}{ax^3} \Rightarrow$$

$$f(x)=\frac{a}{a^2-b^2}\left(x^3-\frac{b}{ax^3}\right) \Rightarrow f(x)=\frac{a}{a^2-b^2}\left(x^3-\frac{b}{a}x^{-3}\right).$$

Calculăm derivata de ordinul n a funcţiei f:

$$f'(x)=\frac{a}{a^2-b^2}\left(3x^2-\frac{b}{a}(-3)x^{-4}\right)$$

$$f''(x)=\frac{a}{a^2-b^2}\left(3\cdot 2x-\frac{b}{a}(-3)(-4)x^{-5}\right)$$

$$f'''(x)=\frac{a}{a^2-b^2}\left(3\cdot 2\cdot 1-\frac{b}{a}(-3)(-4)(-5)x^{-6}\right)$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{a}{a^2-b^2}\left(-\frac{b}{a}\right)(-3)(-4)(-5)(-6)x^{-7}=\frac{b\cdot(-1)^5}{a^2-b^2}\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot x^{-7}$$

.....

$$f^{n}(x)=\frac{b}{a^2-b^2}\cdot\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n+2)!}{2}\cdot x^{-(n+3)} \Rightarrow f'(x)=\frac{b}{a^2-b^2}\cdot\frac{(-1)^{n+1}(n+2)!}{2x^{n+3}}$$

.

Relaţia găsită se demonstrează prin inducţie matematică.

8) Se consideră funcţia f care satisface relaţia $-3f\left(\frac{x+6}{x-1}\right)+2f\left(\frac{x-1}{x+6}\right)=x$. Să se determine funcţia f şi apoi să se calculeze derivata de ordinul n a acesteia .

Soluţie: Notând $\frac{x+6}{x-1}=y$, rezultă că $\frac{x-1}{x+6}=\frac{1}{y}$, $y\neq 0$. Din notaţie determinăm pe x în

funcţie de y, $x=\frac{y+6}{y-1}$, $y\neq 1$, şi înlocuind în relaţia dată obţinem:

$$-3f(y)+2f\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{y+6}{y-1}\ ,\ (\forall)y\in R\setminus\{0,1\}. \qquad (1)$$

Relaţia (1) este adevărată şi pentru $\frac{1}{y}\in R\setminus\{0,1\}$. Prin înlocuirea lui y cu $\frac{1}{y}$ rezultă:

$$-3f\left(\frac{1}{y}\right)+2f(y)=\frac{\frac{1}{y}+6}{\frac{1}{y}-1}\Leftrightarrow -3f\left(\frac{1}{y}\right)+2f(y)=\frac{6y+1}{1-y}\Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{1}{y}\right)=-\frac{1}{3}\left(\frac{6y+1}{1-y}-2f(y)\right).$$

Înlocuind acum pe $f\left(\frac{1}{y}\right)$ în relaţia (1) avem:

$$-3f(y)-\frac{2}{3}\left(\frac{6y+1}{1-y}-2f(y)\right)=\frac{y+6}{y-1}\Leftrightarrow$$

$$-3f(y)+\frac{4}{3}f(y)=\frac{y+6}{y-1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{6y+1}{1-y}\Leftrightarrow f(y)=-\frac{3}{5}\cdot\frac{-3y-18+12y+2}{3(1-y)}\Leftrightarrow$$

$$f(y)=\frac{16-9y}{5(1-y)}\Leftrightarrow f(y)=\frac{7+9-9y}{5(1-y)}=\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{1-y}+\frac{9}{5}.$$

Deci funcţia cerută este $f:R\setminus\{0,1\}\to R$, $f(x)=\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{1-x}+\frac{9}{5}$.

Calculăm derivatele succesive:

$$f(x)=\frac{7}{5}\cdot(1-x)^{-1}+\frac{9}{5}\ ,\quad f'(x)=\frac{7}{5}\cdot(-1)\cdot(1-x)^{-2}\cdot(-1),$$

$$f''(x)=\frac{7}{5}\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(1-x)^{-3}\cdot(-1)^2,$$

$$f'''(x)=\frac{7}{5}\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(1-x)^{-4}\cdot(-1)^3$$

.....

$$f^{(n)}(x)=\frac{7}{5}\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot\ldots\cdot(-n)\cdot(1-x)^{-(n+1)}\cdot(-1)^n \Rightarrow$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{7}{5}\cdot(-1)^{2n}\cdot n!\cdot(1-x)^{-(n+1)} \Rightarrow f^{(n)}(x)=\frac{7\cdot n!}{5(1-x)^{n+1}}.$$

Relaţia obţinută se demonstrează prin inducţie matematică.

9) Fie funcţia $f:R\to R$, $f(x)=e^x(x+1)^2$. Să se determine $S=f(x)+f'(x)+f''(x)+\ldots+f^n(x),\ n\in N^*$.

Soluţie: Funcţia se poate scrie $f(x)=e^x\left(x^2+2x+1\right)$ şi calculăm apoi derivatele succesive:

$$f'(x)=e^x\left(x^2+4x+3\right)=e^x\left(x^2+4x+1\cdot 2+1\right),$$

$$f''(x)=e^x\left(x^2+6x+7\right)=e^x\left(x^2+6x+2\cdot 3+1\right),$$

$$f'''(x)=e^x\left(x^2+8x+13\right)=e^x\left(x^2+8x+3\cdot 4+1\right),$$

$$f^{(4)}(x)=e^x\left(x^2+10x+21\right)=e^x\left(x^2+10x+4\cdot 5+1\right),$$

$$f^{(5)}(x)=e^x\left(x^2+12x+31\right)=e^x\left(x^2+12x+5\cdot 6+1\right),$$

.....

$f^{(n)}(x)=e^x\left[x^2+(2n+2)x+n(n+1)+1\right]$(se demonstrează prin inducţie).

Pentru determinarea lui S avem nevoie de urmatoarele sume:

$$2+4+6+\ldots+(2n+2)=2[1+2+3+\ldots+(n+1)]=2\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2}=$$
$$(n+1)(n+2),$$

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=1(1+1)+2(1+2)+3(1+3)+\ldots+n(1+n)=$$

$$=(1+2+3+\ldots+n)+\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)=$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Însumând funcţiile, obţinem:

$$S = e^x\left[(n+1)x^2 + (n+1)(n+2)x + \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)\right] \Leftrightarrow$$

$$S = (n+1)e^x\left[x^2 + (n+2)x + \frac{n^2+2n+3}{3}\right].$$

Bibliografie :

1. Ganga M., *Elemente de analiză matematică* (Manual pentru clasa a XI-a), volumul I, Ed. Mathpress, 2004;

2. Petrică I., Constantinescu E., Petre D., Ştefan C., *Exerciţii şi probleme de analiză matematică*, clasa a XI-a, Ed. Petrion, Bucureşti, 2002;

3. Rosculeţ M., *Analiză matematică*, Ed. Tehnică, Bucuresti, 1996 .

7. Poziţia relativă a două cercuri

Prof. Gurău Cornelia, Şcoala Gimnazială Tristan Tzara Moineşti, Bacău

Fie date cercurile ***C***(C,r) şi ***D***(D,R) unde lugimea segmentului CD este a. *Intersecţia celor două cercuri este nevidă dacă are loc* $|r - a| \le R \le r + a$*; dacă una din cele două inegalităţi este egalitate, atunci intersecţia este alcătuită dintr-un* ***punct unic****; în caz contrar intersecţia este alcătuită dintr-o* ***pereche de puncte simetrice faţă de*** *(CD).*

Demonstraţie. Considerăm cazul când ***C***, ***D*** nu sunt concentrice (adică $a \neq 0$), obţinerea concluziilor enunţate pentru cazul C = D fiind lipsită de dificultăţi. Punem în evidenţă şi axa radicală *d* a celor două cercuri şi fie E punctul în care *d* taie (CD). ***C***∩***D*** = **C**∩ *d* astfel că problema revine la explicitarea poziţiei dreptei *d* faţă de cercul ***D***. Apar următoarele cazuri:

1. *d* **este secantă lui *C***. În acest caz E trebuie să fie interioară lui ***C***, adică $-r < \overline{CD} < r$. Presupunem dreapta CD orientată de la C către D, adică $\overline{CD} = a > 0$. Aplificând dubla inegaliatate prin $2\overline{CD}$, obţinem $-2ar < a^2 + r^2 - R^2 < 2ar$, echivalentă cu $(a - r)^2 < R^2 < (a + r)^2$, adică:

$$d \cap \boldsymbol{C} = \{M, N\} \Leftrightarrow |a - r| < R < a + r.$$

2. d **este tangentă lui *C***. În acest caz punctul de tangenţă va fi E; cazul are loc dacă şi numai dacă $-r = \overline{CE}$ sau $r = \overline{CE}$. Procedând ca mai sus constatăm că:

$$d \cap \boldsymbol{C} = \{E\} \Leftrightarrow |a - r| = R \vee R = a + r.$$

3. d **este exterioară lui *C***. Situaţia este echivalentă cu $\overline{CE} < -r$ sau $\overline{CE} > r$, adică

$$d \cap \boldsymbol{C} = \Phi \Leftrightarrow R < |a - r| \vee R > a + r.$$

Concluzia enunţată mai conţine doar o propoziţie referitoare la poziţia punctelor M, N în cazul 1., care să nu fi fost dovedită prin consideraţiile de mai sus. Deci punctele M şi N sunt simetrice faţă de proiecţia E a lui C pe d, deci **sunt simetrice faţă de dreapta** CD.

În conformitate cu cazurile puse în evidenţă de demonstraţie şi explicitând sensul expresiei $|a - r|$ vom distinge următoarele poziţii relative ale cercurilor ***C***(C,r) şi ***D***(D,R) (enumerate acum în ordinea mărimii lui a);

Interioare dacă $a < |R - r|$ (cercul de rază mai mică fiind interior celuilalt).

Tangente interioare dacă $a = |R - r|$.

Secante dacă $|R - r| < a < R + r$.

Tangente exterioare dacă $a = R + r$.

Exterioare dacă $R + r < a$.

Prima teoremă a intersecţiei cercurilor. *Dacă **C**(C,r) şi **D**(D,R) sunt cercuri neconcentrice şi d axa lor radicală, atunci următoarele trei mulţimi coincid:* $\boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{C} \cap d$, $\boldsymbol{D} \cap d$.

Pentru demonstraţie vom constata următoarele echivalenţe :

$$M \in \boldsymbol{C} \Leftrightarrow MC^2 - r^2 = 0,\ M \in \boldsymbol{D} \Leftrightarrow MD^2 - R^2 = 0,\ M \in d \Leftrightarrow MC^2 - r^2 = MD^2 - R^2.$$

Se va constata imediat că două dintre egalităţile

$$MC^2 - r^2 = 0,\ MD^2 - R^2 = 0,\ MC^2 - r^2 = MD^2 - R^2$$

o implică şi pe a treia şi concluzia enunţată urmează imediat.

A doua teoremă a intersecţiei cercurilor. *Fiind două cercuri **C**(C, r) şi **D**(D, R) astfel încât să existe punctele A şi B pe **D** unul interior lui **C** celălalt exterior lui **C**. În aceste condiţii cercurile **C** şi **D** sunt secante.*

Demonstraţie. Ipoteza exclude posibilitatea conciclicităţii cercurilor date. Ipoteza $A \in \boldsymbol{D} \cap \text{Int}\ \boldsymbol{C}$ implică:

$$(AC^2 - r^2) - (AD^2 - R^2) = AC^2 - r^2 < 0.$$

Ipoteza $B \in \boldsymbol{D} \cap \text{Ext}\ \boldsymbol{C}$ implică:

$$(BC^2 - r^2) - (BD^2 - R^2) = BC^2 - r^2 > 0.$$

Conform teoremei semiplanelor axei radicale, punctele A şi B ale lui ***D*** sunt în semiplane distincte delimitate de axa radicală d. Se deduce ca d taie ***D*** în două puncte distincte M, N. Concluzia enunţată se obţine acum cu ajutorul primei teoremea intersecţiei cercurilor.

Aplicaţii.

1. **Cercuri ortogonale**. Spunem că cercurile ***C***(C, r) şi ***D***(D, R) **sunt ortogonale** dacă au în comun un punct M încât $\sphericalangle CMD = \sphericalangle 1dr$. Se cere să se demonstreze: *condiţia necesară şi suficientă ca **C** şi **D** să fie ortogonale este:*

$$CD^2 = r^2 + R^2.$$

Necesitatea. În ipoteza că ***C***, ***D*** sunt ortogonale aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul CMD.

Suficienţa. Egalitatea $CD^2 = r^2 + R^2$ implică inegalităţile

$CD^2 > (R - r)^2$ şi $CD^2 < (R + r)^2$. Prin urmare cele două cercuri sunt secante; fie M punct comun celor două cercuri. Cu reciproca teoremei lui Pitagora găsim $CM \perp MD$.

2. **Centru radical**. Fie cercurile $\boldsymbol{C}(C_i, r_i)$, indicele i luân valorile 1, 2, 3. În ipoteza că punctele C_1, C_2, C_3 nu sunt coliniare, următoarele *trei axe radicale sunt concurente*: d_1, a lui C_2 şi C_3 , d_2 a lui C_1 şi C_3 , d_3 a lui C_1 şi C_2 . (Punctul comun dreptelor: d_1, d_2, d_3 se numeşte **centrul radical al celor trei cercuri** considerate).

Demonstraţie. Dreptele d_1, d_2 sunt perpendiculare pe C_2C_3 şi respectiv C_1C_3 deci nu pot fi paralele; va exista deci un punct O pe d_1 şi d_2. Cele două apartenenţe conduc la egalităţile:

$$OC_2^2 - r_2^2 = OC_3^2 - r_3^2;\ OC_1^2 - r_1^2 = OC_3^2 - r_3^2.$$

Rezultă imediat $OC_2^2 - r_2^2 = OC_1^2 - r_1^2$, deci $O \in d_3$.

3. **Convexitatea cercului**. (O mulţime *M* din planul π se numeşte convexă dacă din ipotezele $A \in M$, $B \in M$ rezultă $|AB| \subset M$). *Interiorul unui cerc* ***C*** *este o mulţime convexă*.

Demonstraţie. Din ipotezele A, B ϵ Int ***C*** rezultă că dreapta AB taie ***C*** în punctele distincte M, N. Are loc

$$|AB| \subset |MN| \subset \text{Int } \boldsymbol{C}.$$

4. **Cercul circumscris**. Fie A, B, C puncte distincte; condiţia necesară şi suficientă pentru a exista un cerc ***O*** care să conţină punctele A, B , C este ca aceste puncte să fie necoliniare (***O*** se numeşte în acest caz *cerc circumscris* triunghiului).

Centrul O al cercului ***O*** trbuie să satisfacă OA ≡ OB ≡ OC. Câte una din congruenţele menţionate obligă O să se situeze pe câte o mediatoare a unui segment BC, CA, AB. Două astfel de mediatoare sunt secante dacă şi numai dacă dreptele BC, CA, AB nu se confundă. Aşa cum ştim, într-un triunghi mediatoarele sunt concurente. Aplicaşia de mai sus justifică denumirea de *centru al cercului circumscris* pentru punctul de concurenţă al mediatoarelor.

5. **Cercurile tritangente**. *Fiind dat un triunghi ABC există patru cercuri tangente tuturor dreptelor AB, BC, CA.*

Dreptele BC, CA, AB împart planul în şapte regiuni notate ca în figura 1 prin R_i (i = 1, 2, …, 7).

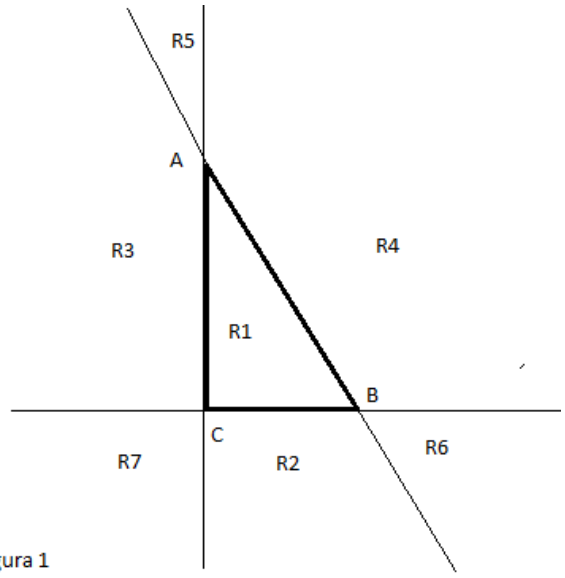


Figura 1

Un cerc ***O***(O,x) cu centru O în R_5, ce ar fi tangent dreptelor AB şi AC ar avea toate punctele în semiplanul (BC, A) deci nu ar putea fi tangent lui BC. Analog, nu pot exista centre de cercuri tritangente în R_6 sau R_7.

Fie un cerc ***I***(I,r) cu centrul I în R_1. Fie D, E, F picioarele perpendicularelor coborâte din I pe BC, CA, AB. Pentru ca ***I*** să fie tangentcelor trei drepte va fi necesar şi suficient să aibă loc

ID ≡ IE ≡ IF = r. Congruenţa ID ≡ IE situează I pe bisectoarea interioară a lui ∢BCA, apoi IE ≡ IF impune ca |AI să fie bisectoarea interioară pentru ∢BAC.(figura2).

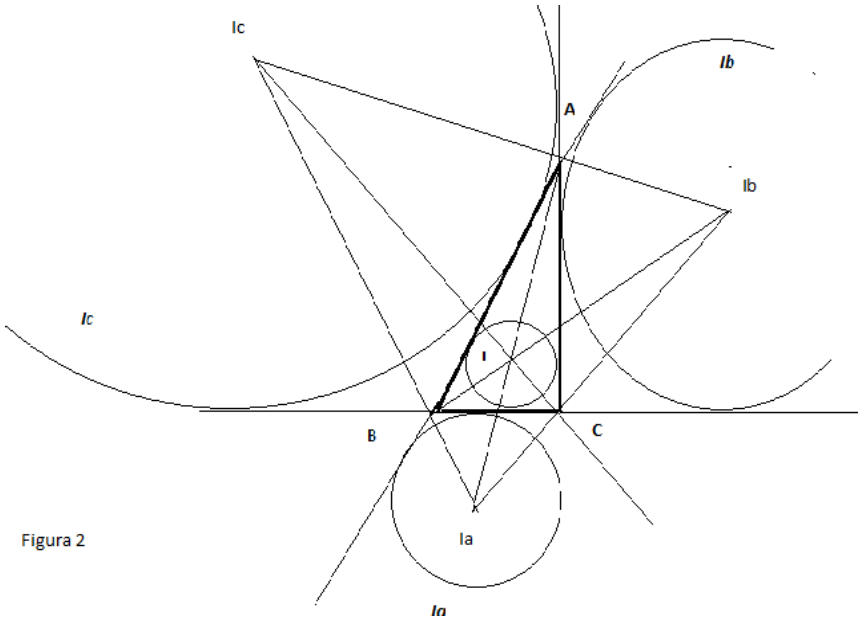


Figura 2

Prin urmare I va fi intersecţia bisectoarelor interioare ale triunghiului. Luând apoi şi r = ID, ne asigură că ***I*** este unicul cerc ce satisface condiţiile problemei având centrul în R_1.

Analog găsim I_a în R_2, I_b în R_3 şi I_c în R_4 încât |BI_a, |CI_a, |CI_b, |AI_b, |AI_c, , |BI_c să fie bisectoare exterioare ale unor unghiuri corespunzătoare ale triunghiului. Se iau apoi razele r_a, r_b, r_c egale cu distanţele de la punctele I_a, I_b, I_c respectiv la dreptele BC, CA, AB. Ultimele trei cercuri găsite ***I***$_a$(I_a, r_a), ***I***$_b$(I_b, r_b), **I**$_c$(I_c, r_c), se mai numesc **cercuri exînscrise** triunghiului ABC.

Bibliografie.

1. *Bazele raţionamentului geometric*, Dan Brânzei, Eugen Onofraş, Sebastian Aniţa, Gheorghe Isvoranu, Bucureşti, 1983.
2. *Teme alese de metodica predării matematicii*, Gheorghe Neagu, Narcisa Maria Neagu, Bacău, 2003.