

Motto:

“Nu spera când vezi mișei
La izbândă făcând punte,
Te-or întrece nătărăii,
De ai fi cu stea în frunte”

versuri din poezia GLOSSA,

de

Mihai Eminescu

(1883, decembrie)

DOI MATEMATICIENI ÎN “TOP 100” -GENII

NECULAI STANCIU¹

Compania internațională Creators Synetics a alcătuit în octombrie 2007, topul celor 100 de genii în viață din domeniul științei, politicii, artei și din mediul de afaceri. Primul loc a fost împărțit de inventatorul Internetului, *Sir Tim Berners-Lee* și chimistul elvețian, *Albert Hofmann* - descoperitorul proprietăților halucinogene ale LSD. Pe ultimul loc figurează numele regizorului american *Quentin Tarantino*. În total, pe listă sunt 24 de britanici și 43 de americani. Doar 15 dintre cele 100 de genii sunt femei. Cele 100 de genii au fost alese în funcție de 5 factori - rolul jucat în schimbarea sistemului de viziune asupra lumii, recunoașterea publică, forța intelectului, succesele și importanța culturală. În acest top sunt și doi matematicieni *Grigory Perelman* (Rusia) și *Andrew Wiles* (Marea Britanie). Meritele celor doi sunt demonstrarea a două conjecturi celebre. Termenul de conjectură a fost introdus de *David Hilbert*², în formularea celor 23 de probleme supuse

¹ Prof., Școala "George Emil Palade", Buzău

² (n.23 ianuarie 1862, Königsberg, în Prusia, (acum Kaliningrad, Rusia) – d.14 februarie 1943) a fost un matematician german. Prin profunzimea ideilor și a modului de exprimare, „Bazele geometriei” lui Hilbert a devenit cartea de temelie a matematicilor moderne și metoda axiomatizării în sensul Hilbert a fost generalizată pentru toate ramurile noi ale matematicii. Totuși, pentru ușurarea înțelegerii geometriei afine și euclidiene, astăzi se adoptă o construcție a geometriei cu ajutorul unei axiomatizări bazate pe algebra liniară. Acest fapt este în concordanță cu schimbările determinate de noul curriculum, de noul sistem de evaluare și de noile manuale.

spre rezolvare comunității internaționale a matematicienilor la al II-lea „Congres internațional al matematicienilor” din 1900 de la Paris. În mod obișnuit, prin conjectură se înțelege orice explicație presupusă a unui fenomen (eveniment) constituită fără certitudine și în afara oricărei dovezi (probe) plecând de la aparențe sau presupuneri. În acord cu Hilbert (autorul termenului de conjectură) se înțelege prin conjectură acea problemă deschisă care poate furniza arhitectura unei teorii în matematică (sau o direcție nouă) sau avansarea unui nou domeniu.

Pierre de Fermat³

vs.

Sir Andrew John Wiles⁴

(n.17 august 1601,
Montauban, Franța -
d.12 ianuarie 1665,
Castres, Franța)

(n. 11 aprilie 1953, Cambridge, England
Residence United Kingdom)



³ A fost un matematician francez, precursor al calculului diferențial, geometriei analitice și calculului probabilităților. Lui îi este atribuit într-o măsură mai mică calculul modern, în special, pentru munca sa referitoare la tangente și punct staționar. El este considerat câteodată "părinte" al calculului diferențial și al teoriei numerelor. A avut contribuții și în geometria analitică și probabilitate. S-a născut în orașul Beaumont-de-Lomagne. Tatăl lui era un bogat negustor de piei. Sub presiunea familiei, Fermat s-a îndreptat spre o carieră în administrația civilă. În 1631 a fost numit consilier la Departamentul de Solicitări din Toulouse. În 1652 a fost afectat de o formă a ciumei, care bântuia Europa acelor ani. A întreținut o vastă corespondență cu Digby, Wallis, Mersenne.

⁴ Professor de matematică la Princeton University (USA), a obținut premii notabile: Fermat Prize (1995), Wolf Prize (1995/6), Royal Medal (1996), IMU Silver Plaque (1998), Shaw Prize (2005)

Pierre Fermat (părintele teoriei numerelor) a produs 48 conjecturi (trei s-au dovedit false) care au reprezentat probleme de cercetare pentru mulți matematicieni (*Gauss*⁵, *Cauchy*⁶, *Riemann*⁷, etc). Ultima conjectură a lui *Fermat* (cunoscută ca Marea teoremă a lui Fermat) a fost că ecuația $x^n + y^n = z^n$ pentru $n \geq 3$ nu are soluții în $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Marea teoremă a lui Fermat a fost enunțată de *Pierre de Fermat* în anul 1637, iar demonstrația completă a fost găsită de-abia 357 de ani mai târziu, în 1994 de către matematicianul englez *Andrew Wiles*.

Pentru $n=2$, enunțul nu este adevărat. Există triplete de numere naturale (x,y,z) cu care se pot forma laturile unui triunghi dreptunghic; de aici, conform teoremei lui *Pitagora*, avem $x^2 + y^2 = z^2$. De exemplu $(3,4,5)$ sau $(5,12,13)$. Există chiar o infinitate de astfel de triplete, forma lor generală fiind $x=2uv, y=u^2-v^2, z=u^2+v^2$, unde u și v sunt numere naturale oarecare.

Pentru $n > 2$, doar cazul $n=4$ admite o demonstrație elementară, schițată de Fermat însuși. Chiar și pentru cazul $n=3$ demonstrația depășește nivelul manualelor de liceu; primul care s-a ocupat de cazul $n=3$ a fost matematicianul *Leonhard Euler*⁸ în 1753.

În 1825, francezii *Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet*⁹ și *Adrien-Marie Legendre*¹⁰ tranșează cazul $n=5$, demonstrația având ca punct de plecare o idee mai veche a lui *Marie-Sophie Germain*¹¹.

⁵ Carl Friedrich Gauß, latinizat *Carolo Friderico Gauss*, (n.30 aprilie 1777, Braunschweig - d. 23 februarie 1855, Göttingen) a fost un matematician, fizician și astronom german celebru

⁶ Augustin Louis Cauchy (n. 21 august 1789 - d. 23 mai 1857) a fost unul dintre cei mai importanți matematicieni francezi. A demarat un proiect important de reformulare și demonstrare riguroasă a teoremelor de algebră, a fost unul dintre pionierii analizei matematice și a adus o serie de contribuții și în domeniul fizicii. Datorită perspicacității și rigurozității metodelor sale, Cauchy a avut o influență extraordinară asupra contemporanilor și predecesorilor săi. Catolic și roialist fervent, manifestă o prezență socială activă

⁷ Georg Friedrich Bernhard Riemann (n. 17 septembrie 1826 – d.20 iulie 1866) a fost un matematician german cu importante contribuții în analiza matematică și geometria diferențială, unele dintre ele deschizând drumul ulterior spre teoria relativității generalizate.

⁸ (n. 15 aprilie 1707, Basel, Elveția - d. 18 septembrie 1783, Sankt Petersburg, Rusia) a fost un matematician și fizician elvețian. Leonhard Euler este considerat a fi fost forța dominantă a matematicii secolului al 18-lea și unul dintre cei mai remarcabili matematicieni și savanți multilaterali ai omenirii. Alături de influența considerabilă pe care a exercitat-o asupra matematicii și matematizării științelor stau atât calitatea și profunzimea, cât și prolificitatea extraordinară a scrierilor sale, opera sa exhaustivă (dacă ar fi publicată vreodată) putând cu ușurință umple 70 - 80 de volume de dimensiuni standard.

⁹ (n. 13 februarie 1805 - d. 5 mai 1859) a fost matematician german, celebru prin contribuțiile valoroase în analiza matematică și teoria numerelor.

¹⁰ (n. 18 septembrie 1752 - d. 10 ianuarie 1833) a fost matematician francez, cunoscut pentru contribuțiile sale în domeniile: statistică, teoria numerelor, algebră abstractă și analiză matematică.

După câțiva ani, este finalizată demonstrația pentru $n=7$, de către francezul *Père de Gabriel Léon Jean Baptiste Lamé*¹². La mijlocul secolului XIX, Academia Franceză instituie un premiu de 3000 franci (o sumă enormă atunci) pentru o demonstrație completă a teoremei.

Demonstrații pentru numere prime mai mici ca 100 au fost date aproximativ în aceeași perioadă, de către matematicianul german *Ernst Eduard Kummer*¹³.

În 1908, magnatul german *Paul Wolfskehl* alocă uriașa sumă de 100.000 de mărci celui ce va demonstra teorema ('oferta' fiind valabilă până în 2007). După apariția calculatoarelor electronice, au fost abordate cazuri particulare pentru valori tot mai mari ale lui n ; prin anii 1980, erau elucidate toate cazurile în care $n < 4.000.000$.

În ultimii ani de dinaintea găsirii demonstrației complete pentru orice $n > 2$, matematicienii erau convinși că prin metode elementare nu se mai poate aduce nimic nou.

În anul 1983, matematicianul german *Gerd Faltings*¹⁴ a demonstrat că există cel mult o mulțime finită de contra-exemple la marea teoremă a lui *Fermat*.

În septembrie 1994, matematicianul englez *Andrew Wiles* a dat demonstrația completă a teoremei, după ce, în 1993, propusese o altă demonstrație, care se dovedise a fi greșită.

¹¹ (n. 1 aprilie 1776 – d. 27 iunie 1831) a fost o matematiciană franceză cu contribuții importante în geometria diferențială și teoria numerelor.

¹² (n. 22 iulie 1795 – d. 1 mai 1870) a fost un matematician francez

¹³ (n. 29 ianuarie 1810 – d. 14 mai 1893) a fost un matematician german.

¹⁴ Gerd Faltings (n. 28 iulie 1954 în Gelsenkirchen-Buer, Germania) – este un matematician german

Jules Henri Poincaré¹⁵

vs.

Grigori Perelman¹⁶(n.29 April 1854 – d.17
July 1912)(n.13 iunie 1966, Sankt
Petersburg, Rusia)

În anul 2000, Institutul matematic Clay (USA) a lansat în cadrul unei Conferințe aniversare a centenarului congresului internațional al matematicienilor lor din 1900, un număr de 7 probleme (numite *problemele mileniului trei*¹⁷) spre rezolvare: fiecare problemă este cotate cu un premiu de 1000000 de dolari. Printre aceste șapte probleme se află și *Conjectura Poincaré*. În 1904, *Poincaré* enunța faimoasa sa conjectură. Enunțul ei, în cazul cel mai general, este următorul:

O varietate simplu conexă din spațiul cu $n+1$ dimensiuni este homeomorfa cu o sferă n -dimensională.

Pentru cazul mai general, pentru $n > 4$, demonstrația a fost realizată de către *Zeman*¹⁸(1962), *Stallings*¹⁹(1960) și *Smale*²⁰(1960), iar pentru cazul $n=4$ demonstrația a

¹⁵ A fost considerat un matematician universal cu contribuții în toate domeniile matematice.

¹⁶ Talentat la matematica, urmează cursurile unui prestigios liceu leningradean renumit pentru specializarea sa în fizică și matematică. Rezultatele sale nu se lasă așteptate și, în 1982, devine membru al lotului sovietic pentru Olimpiada Internațională de Matematică și obține medalia de aur cu scorul maxim posibil: 42 de puncte.

A refuzat Medalia Fields(2006) și premiul de 1.000.000 de dolari oferit de Clay Mathematics Institute.

¹⁷ Cele șapte probleme ale Mileniului stabilite de *Clay Institute* din Cambridge, Massachusetts sunt următoarele: P versus NP, Conjectura lui Hodge, Ipoteza Riemann, Existența "golului de masă" Yang-Mills, Problema de existență Navier-Stokes, Conjectura lui Birch-Sinnerton-Dyer, Conjectura lui Poincaré - singura rezolvată.

¹⁸ Zeman

¹⁹ John Stallings (n. 22 iulie 1935 - d. 24 noiembrie 2008 în Berkeley) a fost un matematician american. A primit Medalia Fields în 1966.

²⁰ Stephen Smale (n. 15 iulie 1930) – este un matematician american. A primit Medalia Fields în 1966.

fost reușită de către *Freedman*²¹ în 1982. Rămăsese de demonstrat cazul în care $n=3$, adică varianta, aparent, cea mai simplă.

*William Thurston*²², un matematician de la Princeton, a propus, pe la începutul anilor 1970, o clasificare a varietatilor 3-dimensionale. El considera ca atât timp cât varietatile 3-dimensionale pot avea diferite forme, ele nu vor „prefera” o anumită geometrie, întocmai ca o țesătura din mătase care va lua forma manec hinelor pe care este așezată. El a afirmat că fiecare dintre varietățile 3-dimensionale poate fi descompusă în unul până la opt componente, inclusiv una de tip sferic, în sensul topologic al cuvântului. Avem acum de-a face cu o nouă conjectură, „*Conjectura geometrizării*”, care este o generalizare a *Conjecturii lui Poincaré*.

În 1982, anul în care *Thurston* primea *Medalia Fields*²³, un alt matematician, *Richard Hamilton*²⁴, de la Universitatea Cornell, propunea un program de demonstrare a Conjecturii geometrizării. El pleaca de la așa-numita Curgere Ricci. *Hamilton* își propune să arate că o suprafață simplu conexă poate fi deformată continuu astfel încât oricare punct al ei să ajungă pe suprafața unei sfere (sfera în sensul larg, topologic). Problema era că pe măsură ce se aplica deformarea, în timp, se întâmpla să apară zone cu singularități. Aceste singularități îl împiedicau pe *Hamilton* să realizeze deformarea continuă pe care o dorea. Aici intervine articolul genial al lui *Perelman* din 2002, care are 39 de pagini. În „The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications” *Perelman* indica o cale prin care singularitățile pot fi făcute să dispară. El aplică un procedeu prin care marimile care intervin în deformare sunt “netezite”.

Lucrarea lui *Perelman* nu a reprezentat demonstrarea completă a conjecturii *Poincaré*, ci numai realizarea unui schelet de demonstrație. După mai multe dezvoltări, demonstrația completă a fost realizată de către *Huai-Dong Cao*²⁵ și *Xi-Ping Zhu*²⁶.

²¹ Michael Hartley Freedman (n. 21 aprilie 1951 în Los Angeles, California, U.S.) este matematician la Microsoft Station Q. În 1986, a primit medalia Fields pentru cercetările sale referitoare la Conjectura Poincaré

²² William Paul Thurston (n. 30 octombrie 1946)- este un matematician american. A primit Medalia Fields în 1982.

²³ Medalia Fields - Medalia Fields este cea mai importantă distincție din lumea matematicii, fiind cunoscută ca un fel de Premiu Nobel pentru matematică. Medalia este datorată matematicianului John Charles Fields (1863 -1932), care a propus în 1932, în cadrul unui congres internațional al matematicienilor care a avut loc la Toronto, înființarea unei distincții care să recompenseze realizările majore din matematică. La moartea sa, în 1932, a lăsat drept moștenire toate bunurile pentru a finanța medalia care avea să îi poarte numele. Spre deosebire de Premiul Nobel, care se acordă anual, Medalia Fields este atribuită la fiecare 4 ani, în cadrul unui congres internațional de matematică. De menționat că medaliații Fields trebuie să aibă o vârstă mai mică de 40 de ani.

²⁴ Richard Streit Hamilton (n.1943) – este un matematician american. A fost ales membru în National Academy of Sciences în 1999 și în American Academy of Arts and Sciences în 2003. A primit premiul AMS Leroy P. Steele Prize în 2009.

²⁵ Matematician de origine chineză – activează la Departamentul de Matematica al Universității, Lehigh, SUA

Demonstrația, se întinde pe 328 de pagini. *Terence Tao*²⁷, profesor de matematică la Universitatea din California, spune că realizarea lui *Perelman* este "cea mai frumoasă demonstrație pe care a văzut-o în ultimii zece ani".

Înainte de a muri, *Hilbert* a fost întrebat, dacă ar învia după 500 de ani, ce întrebare ar pune, și el a răspuns: dacă a fost rezolvată *ipoteza lui Riemann*²⁸.

În ceea ce privește topul universităților (2007), există un clasament realizat de Times Higher Education Supplement (THES) și firma Quacquarelli Symonds (QS) (Universitatea din București este singura universitate din România care a intrat în topul primelor 500 din lume, pe locul 472) și un clasament realizat de Universitatea Jiao Tong din Shanghai (și aici topul este împânzit de universitățile americane, în primele 10 poziții ale topului, 8 sunt din Statele Unite, iar 2 din Marea Britanie). Cele mai multe universități din topul Shanghai sunt americane (159), urmate ca număr de cele britanice (42), germane (40), japoneze (31) și de cele canadiene (21). Cu ocazia congresului matematicienilor români, Institutul de Matematica "Simion Stoilow" al Academiei Române a redactat un raport în care precizează: "Toate universitățile de top din America au cel puțin un profesor de matematică român și peste 300 de profesori români de matematică predau la universitățile din Statele Unite, Franța, Noua Zeelandă, Marea Britanie, Germania, Italia".

Statistica elaborată de Institutul de Matematică, arată în continuare: "În domeniul matematicii sunt mai puțin de 500 de absolvenți de studii superioare anual, din care 10-20 intră în cercetarea matematică. De ani buni se manifestă o migrație aproape totală a "supercreeșterilor" din domeniu spre universitățile din SUA și Europa de Vest încă din primii ani de după facultate sau chiar după liceu".

Un astfel de matematician român (după unii specialiști cel mai bine cotate tânăr matematician român) este *Daniel Tătaru*²⁹. Matematicianul, a fost un pretendent român la "Nobelul matematicii". Chiar dacă l-a ratat, Tătaru rămâne un candidat serios la recunoașterea mondială. În 2002 a primit prestigiosul Premiu Bocher, distincție acordată la fel de greu, o dată la trei ani, în același timp cu *Terence Tao*, cel cu care a făcut echipă în cercetare la Princeton între 1995 și 1997.

²⁶ Matematician de origine chineză – activează la Departamentul de Matematică al Universității Zhongshan, Guangzhou, China

²⁷ Terence Chi-Shen Tao (n. 17 iulie 1975, Adelaide, South Australia) este un matematician australian (supranumit "Mozart" în matematică). În august 2006, a primit Medalia Fields, iar o lună mai târziu a primit premiul MacArthur Fellowship. A fost ales a Fellow of the Royal Society pe 18 mai 2007 și în acest an (2009) devine member of American Academy of Arts and Sciences. Cel mai tânăr profesor de matematică (24 de ani).

²⁸ ipoteza lui Riemann - Funcția: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, unde $s \in \mathbb{C}$ are zerourile în $\mathbb{C}$ situate pe

drepte $s = \frac{1}{2} + bi$ cu $b \in \mathbb{R}$. Această conjectură reprezintă cea mai importantă și dificilă problemă a matematicii contemporane.

²⁹ (n. 6 mai 1967, Piatra Neamț). La Princeton, unde Daniel Tătaru a efectuat studiile postdoctorale, lucrează englezul *Andrew Wiles* și a lucrat începând din 1993 și rusul *Grigori Perelman*.

Câteva tipuri de ecuații trigonometrice

Prof. Cojocaru Camelia
Școala Nr. 1 Chiraftei
Jud. Galați

Ecuatiile ce contin necunoscute sub semnul functiilor trigonometrice se numesc ecuatii trigonometrice. Cele mai simple ecuatii trigonometrice sunt ecuatii le de tipul

$$\sin x = a, \quad \cos x = a, \quad \operatorname{tg} x = a, \quad \operatorname{ctg} x = a, \quad a \in \mathbf{R}. \quad (1)$$

Cum rezolvarea ecuatiilor trigonometrice se reduce la rezolvarea ecuatiilor de tipul (1) (utilizand diferite transformari), vom aminti afirmatiile de baza referitor solutiile ecuatiilor (1).

1. Ecuatia

$$\sin x = a, \quad a \in \mathbf{R}, \quad (2)$$

pentru $|a| > 1$ solutii nu are, iar pentru $|a| \leq 1$ multimea solutiilor ei se contine in formula

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad (3)$$

unde $\arcsin a \in [-(\pi)/2; (\pi)/2]$ este unghiul, sinusul caruia este egal cu a , iar $\mathbf{Z}$ desemneaza multimea numerelor intregi, sau, echivalent (tinand seama de paritatea lui n), in totalitatea

$$\begin{cases} x = \arcsin a + 2\pi k, \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (4)$$

Obs 1. Daca in ecuatia (2) $a \in \{0; -1; 1\}$ solutiile ei (3) se scriu mai simplu, si anume

$$\begin{aligned} \sin x = 0 &\Leftrightarrow x = \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \\ \sin x = 1 &\Leftrightarrow x = \pi/2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \\ \sin x = -1 &\Leftrightarrow x = -\pi/2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Exp 1. Sa se rezolve ecuatiile

$$\text{a) } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{b) } \sin x = -\frac{1}{3}; \quad \text{c) } \sin x = \sqrt{11} - 2.$$

Rezolvare. a) Cum $\left| \frac{\sqrt{3}}{2} \right| \leq 1$, conform (3) soluțiile ecuației date sunt

$$x - (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

sau ținând seama că $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, se obține

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

b) Similar exemplului a) se obține $x - (-1)^n \arcsin \left(-\frac{1}{3} \right) + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$ sau, ținând seama arcsinus ca funcția este o funcție impară,

$$x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

c) Cum $\sqrt[3]{11-2} > 1$ rezultă că ecuația dată nu are soluții.

2. Ecuația

$$\cos x = a \tag{5}$$

pentru $|a| > 1$ nu are soluții, iar pentru $|a| \leq 1$ mulțimea soluțiilor ei se conține în formula

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \tag{6}$$

unde $\arccos a \in [0; \pi]$ este unghiul, cosinusul cărui este egal cu a .

Obs 2. Dacă în ecuația (5) $a \in \{0; 1; -1\}$ soluțiile ei (6) se scriu mai simplu, și anume

$$\begin{aligned} \cos x = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \\ \cos x = 1 &\Leftrightarrow x = 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \\ \cos x = -1 &\Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Exp 2. Să se rezolve ecuațiile:

$$\text{a) } \cos x = -\frac{1}{2}; \quad \text{b) } \cos x = \frac{2}{3}; \quad \text{c) } \cos x = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Rezolvare. a) Cum $\left| -\frac{1}{2} \right| \leq 1$, conform (6) soluțiile ecuației date sunt
 $x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbf{N}$, sau ținând seama că $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$, se obține
 $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

b) Similar exemplului a) se obține $x = \pm \arccos \frac{2}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

c) Cum $\frac{\sqrt{3}+1}{2} > 1$, ecuația dată nu are soluții.

3. Ecuația

$$\operatorname{tg} x = a, \quad a \in \mathbf{R} \quad (7)$$

are soluțiile

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad (8)$$

unde $\operatorname{arctg} a \in (-\pi/2, \pi/2)$ este unghiul, tangenta căruiă este egală cu a .

4. Ecuația

$$\operatorname{ctg} x = a, \quad a \in \mathbf{R} \quad (9)$$

are soluțiile

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad (10)$$

unde $\operatorname{arcctg} a \in (0; \pi)$ este unghiul, cotangenta căruiă este egală cu a .

Exp 3. Să se rezolve ecuațiile

$$\text{a) } \operatorname{tg} x = 1; \quad \text{b) } \operatorname{tg} x = -2; \quad \text{c) } \operatorname{ctg} x = -1; \quad \text{d) } \operatorname{ctg} x = 3.$$

Rezolvare. a) Conform (8) soluțiile ecuației date sunt $x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n, n \in \mathbf{Z}$, sau ținând seama că $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, se obține $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

b) Similar exemplului precedent se obtine $x = \operatorname{arctg}(-2) + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, sau tinand seama ca arctangenta este o functie impara, $x = -\operatorname{arctg}2 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

c) Se tine seama de (10) si se obtine

$$x = \operatorname{arccotg}(-1) + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

sau, cum $\operatorname{arccotg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

d) Similar exemplului c) se obtine $x = \operatorname{arccotg}3 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Obs. Ecuatiile

$$\sin f(x) = a, \quad \cos f(x) = a, \quad \operatorname{tg} f(x) = a, \quad \operatorname{ctg} f(x) = a \quad (11)$$

prin intermediul substitutiei $f(x) = t$ se reduc la rezolvarea ecuatiilor (1).

Exp 4. Sa se rezolve ecuatiile

$$\text{a) } \sin(2x - 1) = 1; \quad \text{b) } \cos(x^2 + 4) = -1; \quad \text{c) } \operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}; \quad \text{d) } \operatorname{ctg} x^3 = -2.$$

Rezolvare. a)

$$\begin{aligned} \sin(2x - 1) = 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = 1, \\ t = 2x - 1, \end{cases} \Leftrightarrow 2x - 1 = \pi/2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = \pi/2 + 2\pi n + 1, \quad n \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x = \pi/4 + \pi n + 1/2, \quad n \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \cos(x^2 + 4) = -1 &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = -1, \\ t = x^2 + 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4 = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \\ \pi + 2\pi n \geq 4, \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x^2 = \pi + 2\pi n - 4, \quad n = 1, 2, 3, \dots \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\pi + 2\pi n - 4}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

(se tine seama ca radicalul de ordin par exista doar din valori nenegative).

$$\begin{aligned} \text{c) } \operatorname{tg} 2x = \sqrt{3} &\Leftrightarrow 2x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow 2x = \pi/3 + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \\ x &= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} n, \quad n \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

$$\text{d) } \operatorname{ctg} x^3 = -2 \Leftrightarrow x^3 = \operatorname{arccotg}(-2) + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\operatorname{arccotg}(-2) + \pi n}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Ecuatii trigonometrice reductibile la ecuatii de gradul al doilea

Ecuatia

$$a\sin^2x + b\sin x + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbf{R}, \quad a \neq 0 \quad (12)$$

prin intermediul substitutiei $t = \sin x$, ($|t| \leq 1$) se reduce la ecuatia patrata $at^2 + bt + c = 0$.

Exp 5. Sa se rezolve ecuatiile

$$\text{a) } 2\sin^2x - 5\sin x + 2 = 0; \quad \text{b) } \sin^2 2x - \sin 2x = 0; \quad \text{c) } \sin^2 x - \sin x + 6 = 0.$$

Rezolvare. a) Se noteaza $\sin x = t$ si ecuatia devine

$$2t^2 - 5t + 2 = 0,$$

de unde $t_1 = 1/2$ si $t_2 = 2$. Cum $|t| \leq 1$, ramane $t = 1/2$ si prin urmare ecuatia initiala este echivalenta cu ecuatia

$$\sin x = 1/2, \\ x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

solutiile careia sunt (a se vedea (3))

b) Se noteaza $\sin x = t$ si se obtine ecuatia patrata $t^2 - t = 0$ cu solutiile $t_1 = 0$ si $t_2 = 1$. Astfel ecuatia initiala este echivalenta cu totalitatea de ecuatii

$$\begin{cases} \sin 2x = 0, \\ \sin 2x = 1, \end{cases}$$

de unde

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

c) Similar exemplelor precedente se obtine ecuatia patrata $t^2 - t + 6 = 0$, care nu are solutii. Rezulta ca si ecuatia trigonometrica nu are solutii.

Ecuatiile

$$a\cos^2x + b\cos x + c = 0, \quad (13)$$

$$a\operatorname{tg}^2x + b\operatorname{tg}x + c = 0, \quad (14)$$

$$a\operatorname{ctg}^2x + b\operatorname{ctg}x + c = 0, \quad (15)$$

unde $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ se rezolva similar ecuatiei (12).

În cazul ecuației (13) se ține seama ca $t = \cos x$ în modul urmează să nu întreacă unu, iar pentru $t = \operatorname{tg} x$ ($t = \operatorname{ctg} x$) în ecuația (14) (respectiv (15)) restricții nu sunt.

Exp 6. Să se rezolve ecuațiile

$$\text{a) } 6\cos^2 x - 5\cos x + 1 = 0; \quad \text{b) } \operatorname{tg}^2 2x - 4\operatorname{tg} 2x + 3 = 0; \quad \text{c) } \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - 2 = 0.$$

Rezolvare. a) Se notează $\cos x = t$ și se obține ecuația pătrată

$$6t^2 - 5t + 1 = 0$$

cu soluțiile $t = \frac{1}{3}$ și $t = \frac{1}{2}$. Cum ambele soluții verifică condiția $|t| \leq 1$ se obține totalitatea

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{3}, \\ \cos x = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\text{de unde } x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

b) Se notează $\operatorname{tg} 2x = t$ și se obține ecuația pătrată

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

cu soluțiile $t_1 = 1$ și $t_2 = 3$. Prin urmare

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 2x = 1, \\ \operatorname{tg} 2x = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \\ 2x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}, \end{cases}$$

$$\text{de unde } x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n, \quad x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 3 + \frac{\pi}{2}k, \quad n, k \in \mathbf{Z}.$$

c) Se rezolvă similar exemplului precedent și se obține $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \quad x = 2\operatorname{arctg} 2 + 2\pi k, \quad n, k \in \mathbf{Z}.$

Ecuația

$$a\cos^2 x + b\sin x + c = 0, \tag{16}$$

utilizând identitatea trigonometrică de bază $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, se reduce la rezolvarea unei ecuații de tipul (12):

$$a(1 - \sin^2 x) + b\sin x + c = 0.$$

Similar, ecuația

$$a\sin^2 x + b\cos x + c = 0 \tag{17}$$

se reduce la rezolvarea unei ecuații de tipul (13):

$$a(1 - \cos^2 x) + b \cos x + c = 0.$$

Utilizand formulele

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x, \quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

ecuațiile

$$a \cos 2x + b \sin x + c = 0, \tag{18}$$

$$a \cos 2x + b \cos x + c = 0, \tag{19}$$

se reduc la rezolvarea ecuațiilor de tipul ([12](#)) și respectiv ([13](#)).

Bibliografie:

Manual pentru clasa a IX-a, Matematica- Geometrie și trigonometrie, A. Cota, Marta Rado, M. Raduțiu, F. Vornicescu.

ASUPRA UNOR PROBLEME PROPUSE LA
OLIMPIADELE INTERNAȚIONALE DE MATEMATICĂ

Corneliu Mănescu-Avram

Nota de față conține soluții alternative sau generalizări ale unor probleme propuse la O.I.M. Am indicat în paranteză după fiecare problemă olimpiada și țara a cărei delegație a propus problema respectivă. Pentru soluțiile originale se poate consulta bibliografia.

1. Să se determine valoarea minimă a lui $a^2 + b^2$ când (a, b) parcurge toate perechile de numere reale pentru care ecuația $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ are cel puțin o rădăcină reală.

(A 15-a O.I.M., Suedia)

Luăm, mai general, o ecuație reciprocă de grad par cu coeficienți reali

$$x^{2n} + a_1x^{2n-1} + a_2x^{2n-2} + \dots + a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + 1 = 0$$

și dorim să determinăm valoarea minimă a expresiei $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ astfel încât ecuația dată să aibă cel puțin o rădăcină reală. Dacă $x \neq 0$, atunci ecuația dată reprezintă în coordonatele $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ un hiperplan în spațiul euclidian n – dimensional. Expresia al cărei minim se cere este pătratul distanței de la origine la acest hiperplan, care este egală, conform unui rezultat din geometria analitică, cu $f(x) =$

$\frac{(x^{2n+1} + 1)^2}{(x^{2n-1} + x)^2 + (x^{2n-2} + x^2)^2 + \dots + (x^n)^2}$. Funcția f este pară, deci ne putem restrânge la intervalul $(0, \infty)$, așadar vom determina valoarea minimă a funcției f pe acest interval. Vom arăta că $x = 1$ este punct de minim al funcției f , deci $f(x) \geq f(1) = \frac{4}{4n-3}$. Această inegalitate este echivalentă cu

$$\left(\frac{x^{2n-1} + x}{x^{2n+1}}\right)^2 + \left(\frac{x^{2n-2} + x^2}{x^{2n+1}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x^{n+1} + x^{n-1}}{x^{2n+1}}\right)^2 + \left(\frac{x^n}{x^{2n+1}}\right)^2 \leq n - 1 + \frac{1}{4}.$$

Pentru a o demonstra, este suficient să arătăm că

$$\frac{x^{2n-k} + x^k}{x^{2n+1}} \leq 1, \text{ dacă } 1 \leq k \leq n-1 \text{ și } \frac{x^n}{x^{2n+1}} \leq \frac{1}{2},$$

inegalități care sunt adevărate, deoarece sunt echivalente respectiv cu

$$(x^{2n-k} - 1)(x^k - 1) \geq 0, \quad (x^n - 1)^2 \geq 0.$$

2. Fie a, b două numere naturale. Împărțind $a^2 + b^2$ la $a + b$ se obține câtul q și restul r . Să se determine toate perechile (a, b) pentru care $q^2 + r = 1977$.

(A 19-a O.I.M., R.F.G.)

La problemele de acest gen, anul desfășurării concursului este utilizat nu pentru semnificația lui “astrală”, ci pentru conținutul matematic. Să -l decriptăm! Dacă numărul 1977 se înlocuiește cu un număr natural n arbitrar care nu este pătrat perfect, vom demonstra egalitatea $q = [\sqrt{n}]$. Folosim relațiile $a^2 + b^2 = q(a + b) + r$, $0 \leq r < a + b$ (1) și substituția $s = a + b$. Media pătratică este mai mare decât media aritmetică, așadar

$$\frac{s^2}{2} \leq a^2 + b^2 = q(a + b) + r = qs + r < (q + 1)s.$$

Rezultă $r < s < 2(q + 1)$, deci $r \leq 2q + 1$, de unde $n = q^2 + r \leq q^2 + 2q + 1 = (q + 1)^2$, așadar

$q \geq [\sqrt{n}]$, deoarece n nu este pătrat perfect. Din $n = q^2 + r \geq q^2$, rezultă $q \leq [\sqrt{n}]$, așadar $q = [\sqrt{n}]$. Am determinat și $r = n - q^2$. Dacă q este un număr par, atunci ecuația din (1) se scrie

$$\left(a - \frac{q}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{q}{2}\right)^2 = \frac{q^2}{2} + r.$$

(2)

Orice soluție (x_0, y_0) în numere întregi a ecuației $x^2 + y^2 = \frac{q^2}{2} + r$ ne dă o soluție a ecuației (2), deci și a ecuației (1) : $a = \left|\frac{q}{2} \pm x_0\right|$, $b = \left|\frac{q}{2} \pm y_0\right|$, dacă $a + b > r$.

Pentru $n = 1977$ se obține $q = [\sqrt{1977}] = 44$, $r = 1977 - 44^2 = 41$ și $\frac{q^2}{2} + r = 1009$, care este un număr prim congruent cu 1 modulo 4, deci se scrie în mod unic sub forma unei sume de pătrate de numere naturale, abstracție făcând de ordinea termenilor : $1009 = 15^2 + 28^2$, ceea ce duce la soluțiile $(a, b) \in \{(7, 50), (50, 7), (37, 50), (50, 37)\}$.

3a. Doi întregi x, y nenuli, dar nu neapărat pozitivi, sunt astfel încât $x + y$ divide pe $x^2 + y^2$ și câtul $\frac{x^2 + y^2}{x + y}$ este un divizor al lui 1978. Să se demonstreze că $x = y$.

(A 20-a O.I.M., Marea Britanie, lista lungă)

Considerăm în locul numărului 1978 un număr $N = 2p_1p_2 \dots p_m$, unde $p_1, \dots, p_m$ sunt numere prime distincte, congruente cu 3 modulo 4. Dacă d este un divizor al lui N și $p \neq 2$ este un divizor prim al lui d , atunci $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{p}$. O consecință a legii reciprocității pătratice (dar acest fapt poate fi demonstrat și elementar) impune $x \equiv y \equiv 0 \pmod{p}$. Egalitatea $x^2 + y^2 = d(x + y)$ devine în final, după simplificări succesive, $u^2 + v^2 = 2(u + v)$ (1) sau $u^2 + v^2 = u + v$ (2), unde $x = du, y = dv$. Ecuația (1) se scrie $(u - 1)^2 + (v - 1)^2 = 2$, cu soluția unică $u = v = 2$ (u, v sunt nenule!), iar ecuația (2) se scrie $(2u - 1)^2 + (2v - 1)^2 = 2$, cu soluția unică $u = v = 1$. Din $u = v$ rezultă $x = y$.

Notă. Dacă $p \equiv 3 \pmod{4}$ este un număr prim și există $x, y \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{p}$, atunci $x \equiv y \equiv 0 \pmod{p}$. Acest fapt poate fi demonstrat fără a utiliza legea reciprocității pătratice. Într-adevăr, în acest caz $\mathbb{Z}_p$ este un corp, deoarece p este un număr prim. Presupunem $\hat{x} \neq \hat{0}$ și $\hat{y} \neq \hat{0}$ în $\mathbb{Z}_p$; există atunci $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\hat{a} = \hat{x} \cdot (\hat{y})^{-1}$ în $\mathbb{Z}_p$. Din $\hat{x}^2 + \hat{y}^2 = \hat{0}$ rezultă, prin înmulțire cu $\hat{y}^{-2}$, $\hat{a}^2 = \hat{a}^2 = -\hat{1}$. Ordinul grupului multiplicativ $\mathbb{Z}_p^*$ este egal cu $p - 1$ și $\hat{a} \neq \hat{0}$, deci $\hat{a}^{p-1} = \hat{1}$ (teorema lui Fermat). Pe de altă parte, $\frac{p-1}{2}$ este un număr impar, deci $\hat{a}^{p-1} = (\hat{a}^2)^{\frac{p-1}{2}} = (-\hat{1})^{\frac{p-1}{2}} = -\hat{1}$, contradicție.

3b. Să se demonstreze că pe cercul ce trece prin punctele $(0, 0)$, $(0, 1978)$, $(1978, 0)$, $(1978, 1978)$ (vârfuri ale unui pătrat), nu există alt punct care să aibă ambele coordonate întregi.

(A 20-a O.I.M., Olanda, lista lungă)

Se înlocuiește numărul 1978 cu $2n$, unde n este produs de numere prime distincte, congruente cu 3 modulo 4. Ecuația cercului ce trece prin punctele date este $(x - n)^2 + (y - n)^2 = 2n^2$. Asemănător cu soluția problemei precedente, fie $(u, v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ astfel încât $u^2 + v^2 = 2n^2$ și p un divizor prim al lui n . Din $u^2 + v^2 \equiv 0 \pmod{p}$ și $p \equiv 3 \pmod{4}$ rezultă $u \equiv v \equiv 0 \pmod{p}$ și în final $u = nu_1, v = nv_1$, cu $u_1, v_1 \in \mathbb{N}$. Ecuația $u_1^2 + v_1^2 = 2$ are soluția unică $u_1 = v_1 = 1$, deci pe cercul dat există numai patru puncte de coordonate întregi, anume $(0, 0)$, $(0, 2n)$, $(2n, 0)$, $(2n, 2n)$.

4. Dacă p și q sunt numere naturale astfel încât

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319},$$

să se dovedească faptul că p este divizibil cu 1979.

(A 21-a O.I.M., R.F.G.)

Dacă $N = 6k + 5$ este un număr prim ($k \in \mathbb{N}$) și p, q sunt numere naturale astfel încât

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{4k+2} + \frac{1}{4k+3},$$

atunci p este divizibil cu N .

Avem

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{4k+3} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4k+2}\right) = \frac{1}{2k+2} + \frac{1}{2k+3} + \dots + \frac{1}{4k+3}.$$

Numitorii termenilor sunt numere naturale consecutive, iar numărul termenilor este $4k + 3 - (2k + 2) + 1 = 2(k + 1)$, deci este un număr par. Suma a doi numitori egal depărtați de extreme este $2k + 2 + i + 4k + 3 - i = 6k + 5 = N$, $0 \leq i \leq k$. Dacă se adună fracțiile, se obține la numărător un număr divizibil cu N , iar factorul prim N nu se simplifică, deoarece toți numitorii sunt numere strict mai mici decât N . Rezultă că p este divizibil cu N . În particular, $N = 1979 = 6 \cdot 329 + 5$ este prim și ultima fracție are numitorul $4 \cdot 329 + 3 = 1319$.

5. Trei cercuri congruente au un punct comun O și sunt situate în interiorul unui triunghi dat. Fiecare cerc este tangent la două din laturile triunghiului. Să se demonstreze că punctul O și centrele cercurilor înscris și circumscris triunghiului sunt coliniare.

(A 22-a O.I.M., U.R.S.S.)

Fie ABC triunghiul dat, D, E, F centrele cercurilor tangente la câte două dintre laturile triunghiului și I centrul cercului înscris în triunghi. Luăm cercul circumscris triunghiului ABC drept cerc unitate, folosim coordonatele complexe și notăm afixele punctelor cu literele mici corespunzătoare. Punctele D, E, F sunt egal depărtate de laturile triunghiului ABC , deci dreptele AD, BE, CF sunt concurente în punctul I , fiind bisectoarele interioare ale unghiurilor triunghiului ABC .

Considerăm omotetia de centru I și raport $k \in (0, \infty)$, $h_I^k(z) = kz + (1 - k)i$. Triunghiurile ABC și DEF au laturile paralele, deci există o omotetie de centru I care-l transformă pe unul în celălalt. Determinăm k corespunzător acestei omotetii. Fie r lungimea comună a razelor celor trei cercuri. Punctul O este centrul cercului circumscris triunghiului DEF , deoarece el

se află la aceeași distanță de vârfuri, deci prin această omotetie el corespunde punctului $O'(0)$, centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Rezultă că afixul lui O este $h_I^k(0) = (1 - k)i$, iar $d = h_I^k(a) = ka + (1 - k)i$. Ecuația cercului cu centrul în D și de rază r este $|z - d| = r$. Acest cerc trece prin punctul O , deci $|ka| = k|a| = k = r$. Punctele $I(i)$, $O((1 - r)i)$ și $O'(0)$ sunt coliniare.

Notă. Configurația are și alte proprietăți, dintre care unele au fost puse în evidență și demonstrate de Țițeica :

- i) dacă A', B', C' sunt celelalte puncte de intersecție ale cercurilor, atunci cercul circumscris triunghiului $A'B'C'$ are raza r și centrul în ortocentrul triunghiului DEF ;
- ii) ortocentrul triunghiului $A'B'C'$ este punctul O , centrul cercului circumscris triunghiului DEF .

6. Se consideră, pe diagonalele AC, CE ale unui hexagon regulat $ABCDEF$, punctele interioare M , respectiv N , astfel ca $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r$. Să se determine r astfel încât B, M, N să fie coliniare.

(A 23-a O.I.M., Olanda)

Lucrarea ^[2] prezintă o soluție care utilizează numerele complexe (la O.I.M. se cer soluții sintetice), dar rezultatul $r = \frac{5}{9}$ este eronat. Dăm mai jos soluția corectă :

Alegem originea în centrul cercului circumscris hexagonului și axa reală trecând prin A . Luăm ca unitate raza cercului și notăm vârfurile hexagonului în sens trigonometric, așadar $A(1), B(\varepsilon), C(\varepsilon^2), E(\varepsilon^4)$, unde $\varepsilon = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$. Avem $\varepsilon^2 = \varepsilon - 1, \varepsilon^3 = -1, \varepsilon^4 = -\varepsilon$.

Dacă $M(m), N(n), m, n \in \mathbb{C}$, din ipoteză se obține $m - 1 = (\varepsilon^2 - 1)r, n - \varepsilon^2 = (\varepsilon^4 - \varepsilon^2)r$, cu $r \in (0, \infty)$. Punctele B, M, N sunt coliniare dacă și numai dacă $\frac{n-m}{m-\varepsilon} \in \mathbb{R}$. Transformăm puterile mai mari ale lui ε în expresii care să conțină pe ε la puterea întâi :

$$m = (\varepsilon - 2)r + 1, \quad n = (1 - 2\varepsilon)r + \varepsilon - 1.$$

Din $\bar{\varepsilon} = 1 - \varepsilon$ rezultă

$$\bar{m} = -(\varepsilon + 1)r + 1, \quad \bar{n} = (2\varepsilon - 1)r - \varepsilon.$$

Egalitatea $\frac{n-m}{m-\varepsilon} = \frac{\bar{n}-\bar{m}}{\bar{m}-\bar{\varepsilon}}$ conduce, după efectuarea calculelor, la $3r^2 = 1$, cu soluția convenabilă $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

7. Să se determine toate numerele reale a pentru care ecuația

$$16x^4 - ax^3 + (2a + 17)x^2 - ax + 16 = 0$$

are patru rădăcini reale distincte, ce formează o progresie geometrică.

(A 23-a O.I.M., Bulgaria, lista scurtă)

Împărțim prin 16 și determinăm, mai general, perechile (m, n) de numere reale pentru care ecuația $x^4 - mx^3 + nx^2 - mx + 1 = 0$ are patru rădăcini reale distincte în progresie geometrică. Fie x, qx, q^2x, q^3x rădăcinile ecuației. Atunci $x \neq 0$ și putem presupune $|q| > 1$, deci $|x| < |qx| < |q^2x| < |q^3x|$. Ecuația este reciprocă, deci $\frac{1}{x}$ este rădăcină a ei, așadar $\frac{1}{x} = q^3x$, de unde $q = x^{-\frac{2}{3}}$. Rezultă că rădăcinile sunt $x, x^{\frac{1}{3}}, x^{-\frac{1}{3}}, x^{-1}$. Cu substituția $z = x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}$ relațiile lui Viète se scriu

$$z^3 - 2z = m, \quad (z^2 - 2)^2 + z^2 - 2 = n.$$

Soluțiile comune convenabile z ale acestor ecuații sunt cele pentru care $|z| \geq 2$. Eliminăm z între cele două ecuații și obținem egalitatea

$$m^4 - (n+1)m^2 + 2n^2 - n^3 = 0.$$

Dacă se mai cunoaște o ecuație care conține m și n și este independentă de z , atunci aceste numere pot fi determinate.

8. Fie $ABCD$ un patrulater inscribibil. Fie P, Q, R picioarele perpendicularelor din D pe dreptele BC, CA, AB respectiv. Să se arate că $PQ = QR$ dacă și numai dacă bisectoarele unghiurilor $\angle ABC$ și $\angle ADC$ se intersectează pe AC .

(A 44-a O.I.M., Finlanda)

Folosim coordonatele complexe, luăm originea în centrul cercului circumscris patrulaterului, raza cercului egală cu unitatea și notăm cu litere mici afixele punctelor corespunzătoare. Sunt adevărate ^[4] egalitățile

$$2p = d - bc\bar{d} + b + c, \quad 2q = d - ca\bar{d} + c + a, \quad 2r = d - ab\bar{d} + a + b.$$

Din $|a| = |b| = |c| = |d| = 1$ și $PQ = QR$ rezultă, după efectuarea calculelor,

$$|a - b| \cdot |c - d| = |a - d| \cdot |b - c|, \text{ adică } AB \cdot CD = AD \cdot BC,$$

deci patrulaterul $ABCD$ este armonic. Există ^[5] numeroase proprietăți caracteristice ale patrulaterelor armonice, printre care și cea referitoare la bisectoarele unghiurilor opuse ale patrulaterului. S-o demonstrăm : pe diagonala $[AC]$ există un punct unic determinat E care împarte acest segment într-un raport dat, iar punctul E se află pe bisectoarele din B și D dacă și numai dacă $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$, deci dacă și numai dacă patrulaterul $ABCD$ este armonic.

Bibliografie

- [1] Cuculescu, I., Olimpiadele internaționale de matematică ale elevilor, Editura Tehnică, București, 1984
- [2] Dincă, M., Chiriță, M., Numere complexe în matematica de liceu, ALL Educational, București, 1996
- [3] Djukić, D., Janković, V., Matić, I., Petrović, N., The IMO Compendium, Springer, 2006
- [4] Mihăileanu, N. N., Utilizarea numerelor complexe în geometrie, Editura Tehnică, București, 1968
- [5] Mihăilescu, C., Geometria elementelor remarcabile, Societatea de Științe Matematice din România, București, 2007

CATEDRA DE MATEMATICĂ, GRUPUL ȘCOLAR DE TRANSPORTURI – PLOIEȘTI

E-mail : avram050652@yahoo.com

Triunghiul ortic . Teorema lui Feuerbach

Prof. Radu Laura
Liceul cu Program Sportiv, Galati

Definiție:

Se numește triunghi ortic triunghiul determinat de picioarele înălțimilor unui triunghi dat.

Teoremă:

Fie ABC un triunghi și punctele $A' = pr_{BC} A$, $B' = pr_{AC} B$, $C' = pr_{AB} C$.

Atunci :

- 1) Triunghiurile $AB'C'$, $BA'C'$, $CB'A'$ sunt triunghiuri asemenea cu triunghiul ABC .
- 2) Semidreptele $[A'A]$, $[B'B]$ și $[C'C]$ sunt bisectoarele unghiurilor triunghiului ortic.
- 3) Ortocentrul triunghiului ABC este centrul cercului înscris în triunghiul ortic $A'B'C'$, iar vârfurile triunghiului ABC sunt centrele cercurilor exînscrise triunghiului ortic $A'B'C'$.
- 4) Tangenta în punctul A la cercul circumscris triunghiului ABC este paralelă cu dreapta $B'C'$.
- 5) Dintre toate triunghiurile înscrise în triunghiul ABC , triunghiul ortic are perimetrul minim (Teorema lui Feuerbach).

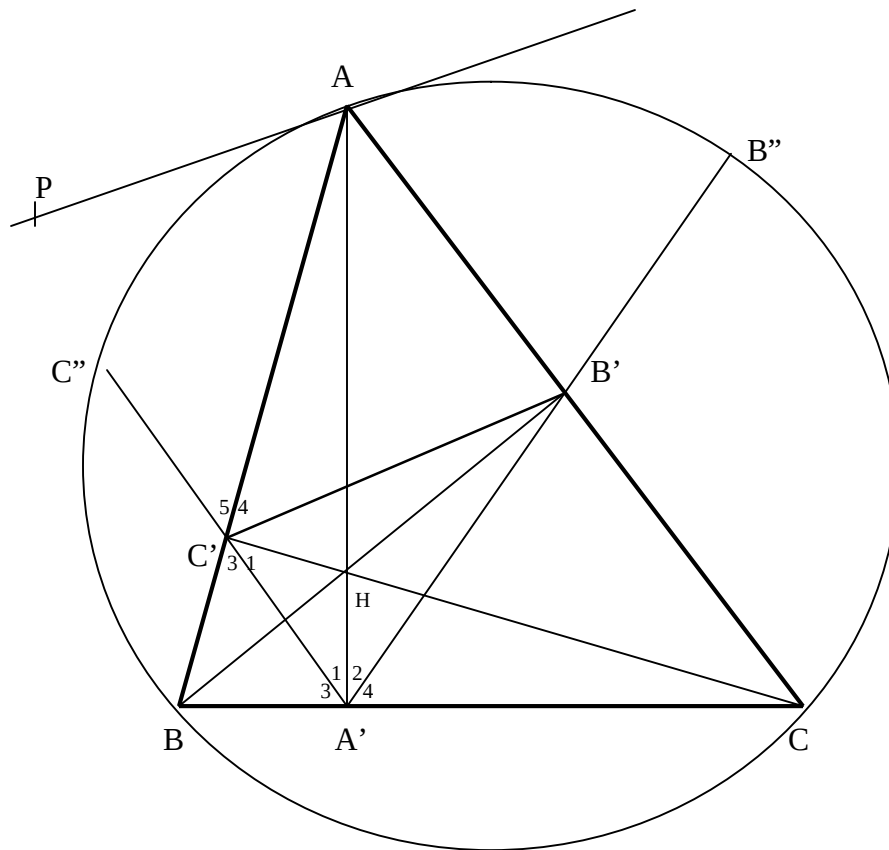


Fig.1

Demonstrație:

- 1) Știm că $\sphericalangle BC'C \equiv \sphericalangle CB'B$, având măsurile de 90° , de unde deducem că patrulaterul BCB'C' este inscriptibil . Rezultă că : $m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle CB'C') = 180^\circ$ } $\Rightarrow \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle AB'C'$ (1)

$$m(\sphericalangle AB'C') + m(\sphericalangle CB'C') = 180^\circ$$

$$m(\sphericalangle ACB) + m(\sphericalangle BC'B') = 180^\circ$$

$$m(\sphericalangle AC'B') + m(\sphericalangle BC'B') = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle AC'B' \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă că $\Delta AB'C' \sim \Delta ABC$.

Analog se demonstrează și celelalte două asemănări .

- 2) Conform punctului 1) rezultă că $\sphericalangle C'A'B \equiv \sphericalangle B'A'C (\equiv \sphericalangle BAC)$. Atunci $\sphericalangle A_1' \equiv \sphericalangle A_2'$ ca fiind complementele a două unghiuri congruente, de unde rezultă că [A'A este bisectoarea unghiului $\sphericalangle B'A'C'$.
- 3) Din punctul 2) se deduce că ortocentrul H al triunghiului i ABC se află la intersecția bisectoarelor triunghiul ortic și deci este centrul cercului înscris în triunghiul ortic A'B'C'.
Fie C'' punctul în care semidreapta [A'C' intersectează cercul circumscris triunghiului.
Știm că $\sphericalangle C_3' \equiv \sphericalangle C_4'$, din punctul 1) , $\sphericalangle C_3' \equiv \sphericalangle C_5'$ ca fiind opuse la vârf , rezultă că $\sphericalangle C_4' \equiv \sphericalangle C_5'$.
Deci semidreapta [C'A este bisectoarea unghiului $\sphericalangle B'C'C''$. În mod analog se demonstrează că semidreapta [B'A este bisectoarea unghiului $\sphericalangle C'B'B''$. Rezultă că punctul A este centrul cercului exînscriș triunghiului A'B'C' tangent laturii [B'C'].
- 4) Avem că $m(\sphericalangle BAP)$ este jumătate din măsura arcului mic AB. De asemenea $m(\sphericalangle ACB)$ este tot jumătate din măsura arcului mic AB. Rezultă că $\sphericalangle BAP \equiv \sphericalangle ACB$, dar $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle AC'B'$ din relația (2), de unde obținem că $\sphericalangle BAP \equiv \sphericalangle AC'B'$ (alterne interne) ceea ce demonstrează că tangenta în punctul A la cercul circumscris triunghiului ABC este paralelă cu dreapta B'C'.
- 5) Se observă că dacă M parcurge dreapta BC, a tunci B'M+MC' este minimă dacă $\sphericalangle B'MC \equiv \sphericalangle C'MB$ (Fig. 2).
Într-adevăr, fie B₁ simetricul lui B' față de BC. Se unește C' cu B₁. Fie {M₁} = BC ∩ C'B₁. Oricare ar fi punctul M ∈ BC, M ≠ M₁ avem:
 $M_1C' + M_1B' = M_1C' + M_1B_1 = C'B_1 < C'M + MB_1 = C'M + MB'$.
Am obținut astfel că punctul M₁ construit anterior este punctul de pe dreapta BC cu proprietatea că MC'+MB' este minimă. Dar unghiurile $\sphericalangle C'M_1B$ și $\sphericalangle B'M_1C$ sunt congruente deoarece fiecare este congruent cu $\sphericalangle B_1M_1C$.

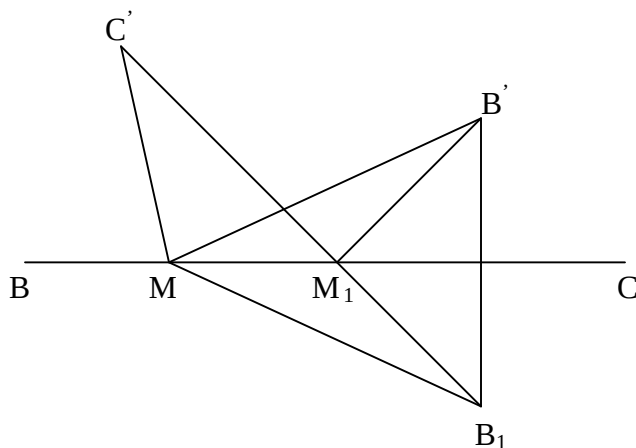


Fig. 2

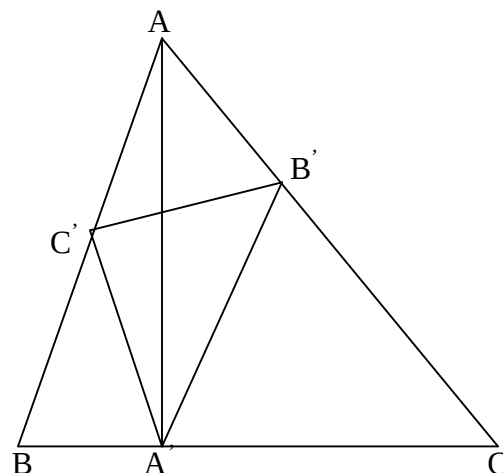


Fig. 3

Fie acum un triunghi $A'B'C'$ înscris în triunghiul ABC , $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$, $C' \in (AB)$. Fixând două câte două vârfurile acestui triunghi, se obține că minimumul perimetrului se atinge când laturile triunghiului $A'B'C'$ sunt egal înclinate pe laturile triunghiului ABC , deci când unghiurile marcate pe figură sunt congruente (Fig. 3).

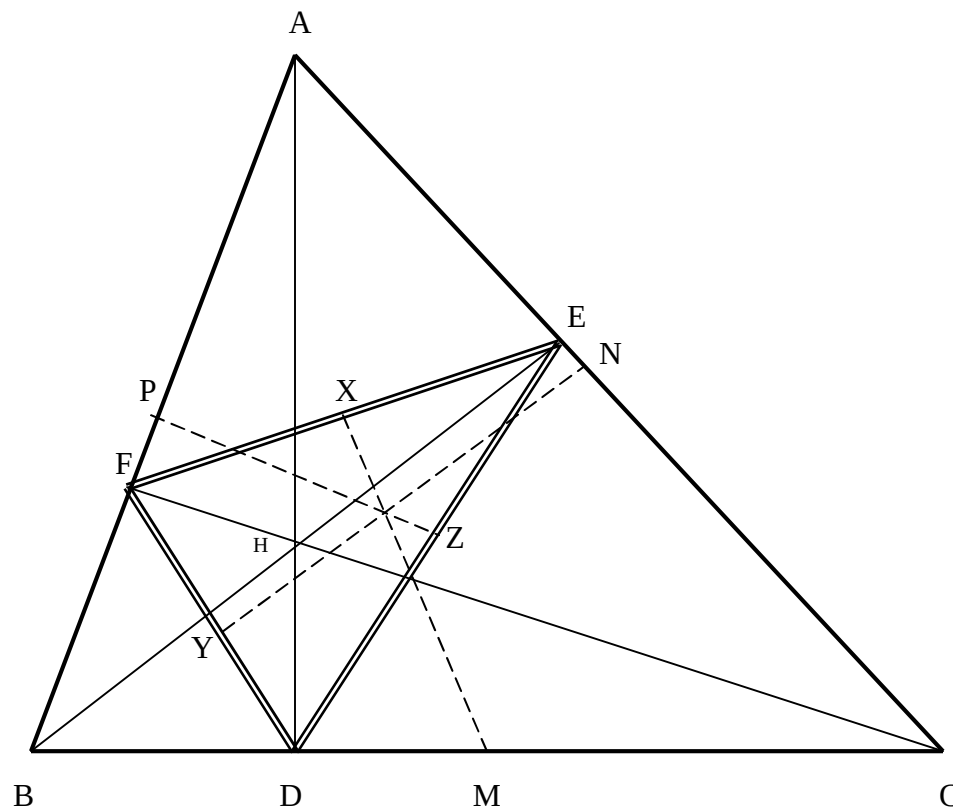
Folosind același raționament ca în demonstrația punctului 2), se obține că A , B și C sunt centrele cercurilor exînscrise triunghiului $A'B'C'$. Rezultă că $[A'A]$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle B'A'C'$, deci $\sphericalangle C'A'C \equiv \sphericalangle B'A'A$. Rezultă $AA' \perp BC$. Analog se obține $BB' \perp AC$ și $CC' \perp AB$. Prin urmare $A'B'C'$ este triunghiul ortic.

Aplicații:

Problema 1

Se consideră triunghiul ABC și fie DEF triunghiul său ortic. Dacă M, N, P sunt mijloacele laturilor BC, AC, AB , iar X, Y, Z sunt mijloacele laturilor FE, FD, DE , să se demonstreze că dreptele MX, NY și PZ sunt concurente.

Demonstrație :



Patrulaterul $BCEF$ este inscriptibil în cercul de diametru BC , deci centrul acestui cerc este chiar punctul M , iar latura FE a triunghiului ortic este o coardă în acest cerc. Punctul X fiind mijlocul acestei coarde, rezultă că MX este mediatoarea segmentului FE .

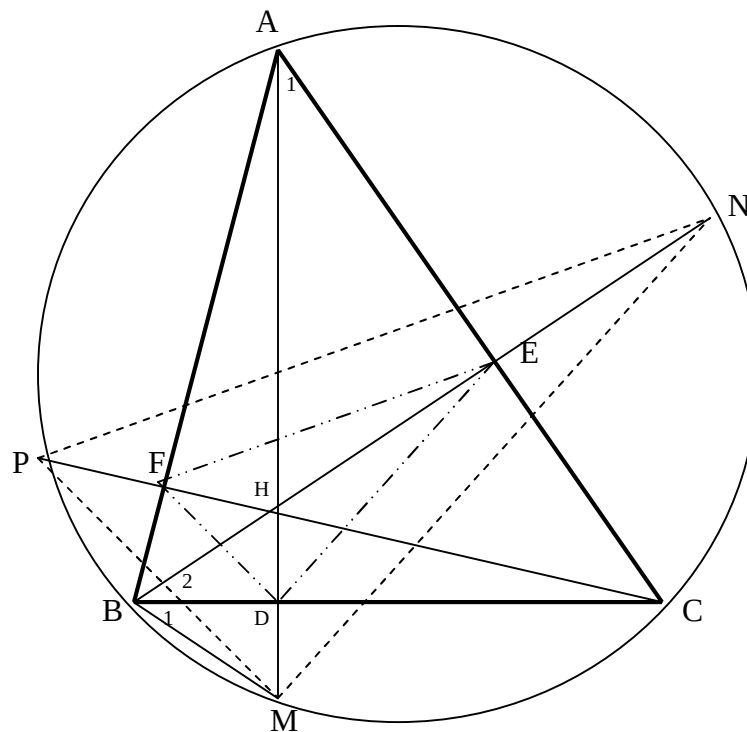
În mod analog se arată că NY este mediatoarea segmentului FD și PZ este mediatoarea segmentului DE . Cele trei drepte MX, NY și PZ sunt mediatoarele triunghiului ortic, de unde rezultă că aceste drepte sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului ortic, care este de fapt centrul cercului lui Euler.

Problema 2

Se consideră triunghiul ABC în care se duc înălțimile AD, BE și CF. Acestea intersectează cercul circumscris triunghiului în M, N și P. Să se arate că este adevărată inegalitatea :

$$\frac{\sigma[MNP]}{\sigma[DEF]} \left(\frac{AD}{AM} + \frac{BE}{BN} + \frac{CF}{CP} \right) \geq 9 .$$

Demonstrație:



Avem că $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle B_1$ deoarece subîntind același arc MC, dar $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle B_2$ având același complement C, rezultă că $\sphericalangle B_1 \equiv \sphericalangle B_2$, de unde deducem că $\triangle BDM \equiv \triangle BDH$ și de aici $MD=HD$. Analog $NE=EH$ și $PF=HF$. Deci segmentele DE, EF și FD sunt linii mijlocii în triunghiurile HMN, HNP și respectiv HPM, ele sunt paralele cu bazele și egale cu jumătatea bazelor. Rezultă imediat că triunghiurile DEF și MNP sunt asemenea și au raportul de asemanare egal cu $\frac{1}{2}$.

$$\frac{\sigma[MNP]}{\sigma[DEF]} = \left(\frac{2}{1} \right)^2 = 4$$

$$\frac{AD}{AM} + \frac{BE}{BN} + \frac{CF}{CP} = \frac{AD}{AD+DM} + \frac{BE}{BE+EN} + \frac{CF}{CF+FP} \geq 3 \cdot \frac{3}{1 + \frac{DM}{AD} + 1 + \frac{EN}{BE} + 1 + \frac{FP}{CF}} =$$

(s-a folosit inegalitatea mediilor , $m_a \geq m_h$)

$$= \frac{9}{3 + \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF}} = \frac{9}{3 + \frac{HD \cdot BC}{AD \cdot BC} + \frac{HE \cdot AC}{BE \cdot AC} + \frac{HF \cdot AB}{CF \cdot AB}} = \frac{9}{3 + \frac{\sigma[ABC]}{\sigma[ABC]}} = \frac{9}{4}$$

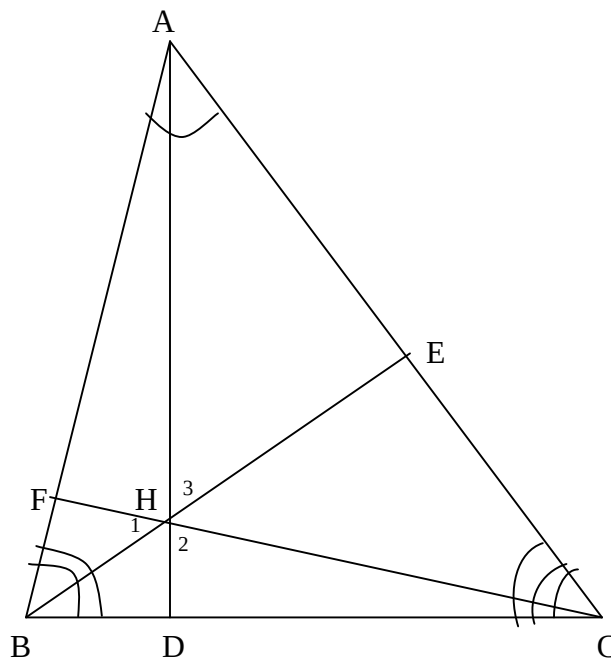
Deci $\frac{\sigma[MNP]}{\sigma[DEF]} \left(\frac{AD}{AM} + \frac{BE}{BN} + \frac{CF}{CP} \right) \geq 4 \cdot \frac{9}{4} = 9 \Leftrightarrow \frac{\sigma[MNP]}{\sigma[DEF]} \left(\frac{AD}{AM} + \frac{BE}{BN} + \frac{CF}{CP} \right) \geq 9$, ceea ce trebuia demonstrat .

Problema 3

Fie ABC un triunghi oarecare, având toate unghiurile ascuțite. Dacă D, E, F sunt picioarele înălțimilor din vârfurile A, B și C, H este ortocentrul, iar R raza cercului circumscris triunghiului ABC, să se arate că : a) $HD \cos A + HE \cos B + HF \cos C = 6R \cos A \cos B \cos C$;

b) $\frac{HA}{HD} + \frac{HB}{HE} + \frac{HC}{HF} = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A - 3$.

Demonstrație:



a) În triunghiul ABC aplicăm teorema sinusurilor : $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = 2R$. (1)

$$\triangle BCF \Rightarrow \cos B = \frac{BF}{BC} \Rightarrow BC = \frac{BF}{\cos B} \quad (2)$$

Unghiul H_1 din $\triangle BHF$ este congruent cu unghiul A al triunghiului ABC, având același complement $\sphericalangle ABE$.

$$\triangle BHF \Rightarrow \operatorname{tg} H_1 = \frac{BF}{HF} \Rightarrow BF = HF \operatorname{tg} A \quad (3)$$

Din (2) și (3) rezultă că $BC = \frac{HF \operatorname{tg} A}{\cos B} = \frac{HF \sin A}{\cos A \cos B}$. Înlocuind pe BC în teorema sinusurilor obținem :

$$\frac{HF \sin A}{\cos A \cos B} = 2R \sin A \Rightarrow HF = 2R \cos A \cos B \Rightarrow HF \cos C = 2R \cos A \cos B \cos C .$$

În mod analog obținem $HE \cos B = 2R \cos A \cos B \cos C$ și $HD \cos A = 2R \cos A \cos B \cos C$.

Însumând ultimile trei relații avem : $HD \cos A + HE \cos B + HF \cos C = 6R \cos A \cos B$.

b) Calculăm $\frac{HA}{HD} + \frac{HB}{HE} + \frac{HC}{HF} = \frac{AD - HD}{HD} + \frac{BE - HE}{HE} + \frac{CF - HF}{HF} = \frac{AD}{HD} + \frac{BE}{HE} + \frac{CF}{HF} - 3$. (4)

Din punctul a) avem : $HD = 2R \cos B \cos C$

$$HE = 2R \cos A \cos C$$

$$HF = 2R \cos A \cos B .$$

$$\text{În } \triangle ABD \Rightarrow AD = AB \sin B \stackrel{T.\sin}{=} 2R \sin B \sin C$$

$$\text{În } \triangle BCE \Rightarrow BE = BC \sin C \stackrel{T.\sin}{=} 2R \sin A \sin C$$

$$\text{În } \triangle CAF \Rightarrow CF = AC \sin A \stackrel{T.\sin}{=} 2R \sin A \sin B$$

Înlocuind în relația (4) , obținem :

$$\begin{aligned} \frac{HA}{HD} + \frac{HB}{HE} + \frac{HC}{HF} &= \frac{2R \sin B \sin C}{2R \cos B \cos C} + \frac{2R \sin A \sin C}{2R \cos A \cos C} + \frac{2R \sin A \sin B}{2R \cos A \cos B} - 3 = \\ &= \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B - 3 \end{aligned}$$

$$\text{Deci } \frac{HA}{HD} + \frac{HB}{HE} + \frac{HC}{HF} = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A - 3 .$$

Bibliografie :

1. Cuculescu I. , Stănășilă O., ș.a. , *Matematică-Fizică-Chimie-Culegere de probleme pentru admiterea în învățământul superior* , Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1984.
2. Drăghicescu I.C. , Masgras V. , *Probleme de geometrie* , Ed. Tehnică , București, 1987 ;
3. Nicolescu L. , Boskoff V. , *Probleme practice de geometrie* , Ed. Tehnică, București, 1990 .

Probleme rezolvate
cu inegalitati geometrice in triunghi
pentru gimnaziu si liceu

Prof. Andrei Dobre

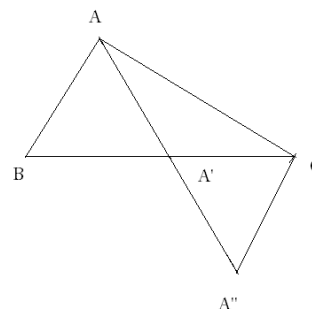
- 1. Sa se demonstreze ca o mediana a unui triunghi este mai mica decat semisuma laturilor alaturate cu ea.**

Solutie:

Fie triunghiul ABC si mediana AA' ; prelungim aceasta mediana cu o lungime [A'A''] $\equiv$ [AA'] .

Se demonstreaza usor, congruenta triunghiurilor ABA' si CA'A'' (cazul de congruenta , latura , unghi latura), de unde rezulta [AB] $\equiv$ [CA''].

In triunghiul ACA'' avem [AA''] < [AC] + [CA''] si, cum [A'A''] $\equiv$ [AA''], rezulta ca AA' < $\frac{AB+AC}{2}$.



- 2. Sa se arate ca ,in triunghiul ABC, in care [AB] < [AC], avem ca [AD] < [AC] , oricare ar fi D ∈ (BC).**

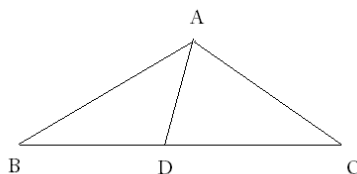
Solutie:

Cum din ipoteza [AB] < [AC], rezulta ca ∠B > ∠C.

Dar, ∠ADC > ∠B si ∠B > ∠C , conform unghiului exterior. Din ∠ADC > ∠B si ∠B > ∠C , urmeaza ca in triunghiul ADC avem [AC] > [AD].

3. Fie triunghiul ABC, in care $m(\angle BAC) > m(\angle ABC) + m(\angle ACB)$ si fie D mijlocul segmentului [BC]. Sa se arate ca $AD < \frac{BC}{2}$.

Solutie:



Avem $m(\angle BAC) = m(\angle BAD) + m(\angle DAC) > m(\angle ABC) + m(\angle ACB)$, din ipoteza.

De aici rezulta : sau $m(\angle BAD) > m(\angle ABC)$, de unde $BD > AD$; sau

$m(\angle DAC) > m(\angle ACB)$, de unde $DC > AD$. Din $BD > AD$ si $DC > AD$, adunandu-le, se obtine $AD < \frac{BC}{2}$.

4. Se ia un punct oarecare M in interiorul unui triunghi ABC .

Sa se demonstreze ca, suma $MA + MB + MC$ este cuprinsa intre semiperimetrul si perimetrul triunghiului ABC.

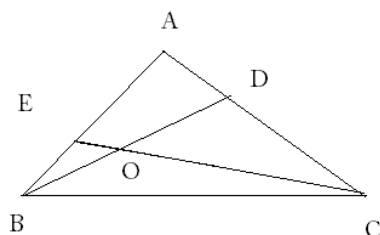
Solutie:

Din triunghiul MBC, MCA si MAB rezulta , respectiv , ca $BC < MB + MC$, $CA < MC + MA$ si $AB < MA + MB$; adunandu-le, se obtine ca $\frac{1}{2}(AB + BC + CA) < MA + MB + MC$. In continuare, deoarece linia poligonala (franta) BAC inconjoara linia franta BMC , urmeaza ca $MB + MC < AB + AC$. Analog avem, $MA + MC < AB + BC$ si $MA + MB < AC + BC$. Din aceste trei inegalitati , rezulta inegalitatea ceruta.

5. Fie ca O un punct in interiorul triunghiului ABC. Dreptele BO si CO intersecteaza AC si AB in D, respectiv E. Stiind ca unghiul $\angle BAC$ este obtuz, sa se arate ca $BD + CE > BE + ED + DC$.

Solutie:

Din triunghiurile AEC, ABD si AED rezulta , respectiv, ca $EC > AD + DC$, $BD > AE + BE$ si $ED < AE + AD$. Apoi, $EC + BD > AD + DC + AE + BE$ si, cum $AE + AD > ED$, urmeaza inegalitatea ceruta.



6. In triunghiul ABC are loc inegalitatea $BC > AC$. Daca AD si BE sunt inaltimi din A, respectiv din B, sa se arate ca $BC + AD \geq AC + BE$. Sa se precizeze, apoi, cand are loc egalitatea.

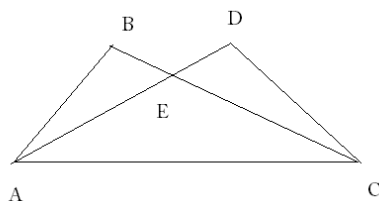
Solutie:

Notam $BC = a$, $AC = b$, $AD = h_a$, $BE = h_b$. Atunci, relatia ceruta se scrie: $a + h_a \geq b + h_b$, sau $a + b \sin C \geq b + a \sin C$, adica $(a - b) \cdot (1 - \sin C) \geq 0$.

Cum, prin ipoteza $a > b$, egalitatea are loc pentru $\sin C = 1$, adica pentru triunghiul dreptunghic in C.

7. Doua triunghiuri sunt asezate astfel incat au o latura comuna, iar alte doua laturi se intersecteaza. Sa se demonstreze ca, suma lungimilor laturilor care se intersecteaza este mai mare decat suma lungimilor laturilor care nu se intersecteaza.

Solutie:



Fie AC latura comuna triunghiurilor ABC si ADC si, fie E punctul de intersectie al laturilor AD si BC. Din triunghiurile AEB si CDE, rezulta, respectiv, ca $AE + BE > AB$ si $EC + ED > CD$, care, adunate membru cu membru, si tinand seama ca $AE + ED = AD$, iar $BE + EC = BC$, conduc la $AD + BC > AB + CD$.

8. Medianele corespunzatoare laturilor BC si AC ale triunghiului ABC sunt perpendiculare. Sa se demonstreze ca $\frac{1}{2} < \frac{BC}{AC} < 2$.

Solutie:

Fie AD, BE, CF, medianele triunghiului ABC si fie G punctul lor de intersectie. Notam $AB = c$, $BC = a$ si $AC = b$.

Din triunghiul dreptunghic AGB, rezulta $GF = \frac{c}{2}$.

Construim paralelogramul ACBC' ($AC \parallel BC'$ si $AC' \parallel BC$). Cum $CF = \frac{3c}{2}$, urmeaza ca $CC' = 3$.

Folosind rezultatul cunoscut, anume ca "intr-un paralelogram suma patratelor diagonalelor este egala cu suma patratelor tuturor laturilor", putem scrie:

$$(3c)^2 + c^2 = 2a^2 + 2b^2, \quad 5c^2 = a^2 + b^2.$$

Deoarece $|a-b| < c < a+b$, urmeaza ca $5(a+b)^2 > a^2 + b^2$ si, pe de alta parte, $5(a-b)^2 < a^2 + b^2$.

Inegalitatea $5(a-b)^2 < a^2 + b^2$ este echivalent cu $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{a}{b}\right) + 1 < 0$, de unde rezulta $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2$.

9. In triunghiul ABC, fie [BL bisectoarea unghiului $\angle ABC$, $L \in [AC]$. Sa se arate ca $BA > LA$ si $BC > LC$.

Solutie:

Unul dintre unghiurile $\angle BLA$, $\angle BLC$ este mai mare sau cel putin egal cu 90° . Fie $m\angle(BLA) \geq 90^\circ$; atunci, din triunghiul ABL avem $AB > AL$.

Acum, $m\angle(BLC) > m\angle(LBC)$, deoarece $\angle BLC$ este unghi exterior triunghiului ABL si $\angle ABL \equiv \angle LBC$. Atunci, din triunghiul BLC rezulta ca $BC > LC$.

10. Fie ABC un triunghi dreptunghic in A. Sa se arate ca $AD > AB + AC - BC$, unde D este piciorul inaltimii din A.

Solutie:

Inegalitatea din enunt mai poate fi scrisa:

$AD + BC > AB + AC$ sau $(AB + AC)^2 > (AD + BC)^2$ si cum $AB^2 + AC^2 = BC^2$, iar $AB \cdot AC = BC \cdot AD$, ea devine $AD^2 > 0$, ceea ce este evident.

11. Sa se arate ca, daca a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi oarecare, atunci are loc inegalitatea $b^2 + c^2 < a^2 + 2bc$.

Solutie:

Din $b^2 + c^2 < 2bc$, obtinem succesiv:

$(b^2 + c^2 - 2bc) - a^2 < 0$, $(b^2 - c)^2 - a^2 < 0$, $(b - c + a) \cdot (b - c - a) < 0$, ultima fiind, evident, adevarata deoarece prima paranteza este pozitiva, iar a doua este negativa.

12. Sa se demonstreze ca in orice triunghi ABC au loc inegalitatile:

$$1) h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a \leq p^2$$

$$2) h_a + h_b + h_c < 2p$$

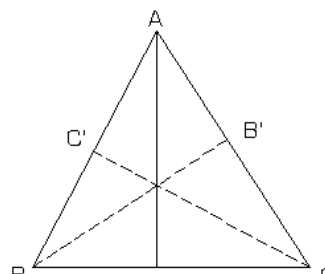
Solutie:

$$1) \text{ Se știe ca: } S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}, \text{ prin}$$

$$\begin{aligned} \text{urmatoarele: } h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a &= \frac{2S}{a} \frac{2S}{b} + \frac{2S}{b} \frac{2S}{c} + \frac{2S}{c} \frac{2S}{a} = 4S^2 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) = \frac{4S^2(c + a + b)}{abc} = \\ &= \frac{4S}{abc} 2Sp = \frac{2rp^2}{R} \leq \frac{Rp^2}{R} = p^2 \end{aligned}$$

ceea ce conduce la: $h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a \leq p^2$ cu egalitate in cazul triunghiului echilateral.

2) Fie triunghiul ABC si $A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$



astfel încât $AA' \perp BC$, $BB' \perp AC$, $CC' \perp AB$.

In triunghiul $AA'B$, $m(\angle A') > m(\angle B)$, ceea ce implica:

$$c > h_a.$$

In triunghiul ACC' , $m(\angle C') > m(\angle A)$ și deci $b > h_c$,

iar in triunghiul $BB'C$, $m(\angle B') > m(\angle C)$ de unde $a > h_b$

Prin urmare, $c > h_a$, $b > h_c$ și $a > h_b$ ceea ce conduce la $a+b+c > h_a+h_b+h_c$ și deci: $h_a+h_b+h_c > 2p$

13. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu $m(\angle A) = 90^\circ$

Atunci are loc inegalitatea :

$$h_a \leq \frac{p}{1 + \sqrt{2}}$$

Solutie:

Se știe ca : $h_a = \frac{bc}{a}$ și $p = \frac{a+b+c}{2}$. Prin urmare, inegalitatea din enunț devine:

$$\frac{b-c}{a} \leq \frac{a+b+c}{2(1+\sqrt{2})} \Leftrightarrow 2(1+\sqrt{2})(bc) \leq b^2 + c^2 + (b+c)\sqrt{b^2 + c^2} \quad (*)$$

Din relația $(b-c)^2 \geq 0$ obținem $\sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}} \geq \frac{b+c}{2}$, iar $b^2 + c^2 + (b+c)\sqrt{b^2 + c^2} =$ deci pentru a demonstra (*)

$$b^2 + c^2 + \sqrt{2}(b+c) \cdot \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}} \geq b^2 + c^2 + \frac{\sqrt{2}(b+c)^2}{2}$$

$$b^2 + c^2 + \frac{\sqrt{2}(b+c)^2}{2} \geq 2(1+\sqrt{2})bc \Leftrightarrow$$

este suficient să verificăm: $2b^2 + 2c^2 + \sqrt{2}b^2 + \sqrt{2}c^2 + 2\sqrt{2}bc \geq 4bc + 4\sqrt{2}bc \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2(b^2 + c^2 - 2bc) + \sqrt{2}(b^2 + c^2 - 2bc) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(b-c)^2 + \sqrt{2}(b-c)^2$$

care este adevărată. Egalitate avem dacă $b=c$, adică în cazul triunghiului dreptunghic isoscel.

14. Sa se demonstreze ca in orice triunghi ABC au loc inegalitatile:

1) $m_a < p, m_b < p, m_c < p$

2) $2m_a < b + c, 2m_b < c + a, 2m_c < a + b$

3) $p < m_a + m_b + m_c < 2p$

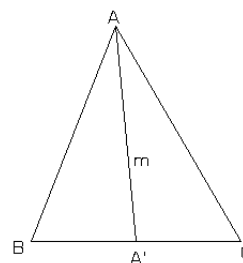
Solutie:

1) Fie triunghiul ABC și $A' \in (BC)$

In triunghiul ABA': $m_a = \frac{c + a}{2}$, iar in triunghiul ACA': $m_a = \frac{b + a}{2}$,

deci $2m_a = a + b + c$, de unde $m_a < p$

Celelalte relatii se obtin in mod analog.



2) Fie triunghiul ABC și $A' \in (BC)$.

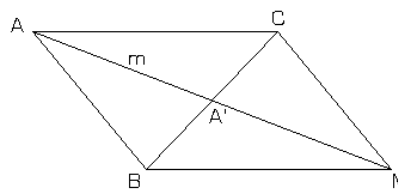
Consideram punctul M ca fiind simetricul lui A fata de mijlocul segmentului (BC)

Prin urmare $AM = AA' + A'M = m_a + m_a$.

Triunghiurile AA'C și MA'B sunt congruente (L.U.L) ceea ce implica: $BM = AB = b$

In triunghiul ABM avem: $AM < AB + BM$, ceea ce implica $2m_a < b + c$.

Celelalte relatii se obtin in mod similar

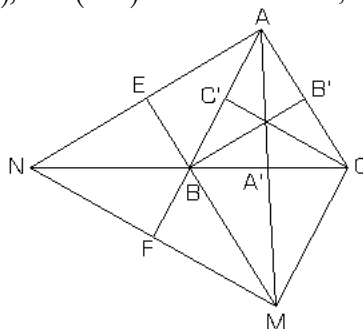


3) Fie triunghiul ABC și $A' \in (BC), C' \in (AB), B' \in (AC)$ astfel încât AA', BB', CC' sunt mediane

conform punctului 2) avem:

$2m_a < b + c, 2m_b < b + c,$

$2m_c < a + b$ ceea ce implica



$$2(m_a + m_b + m_c) < 2(a + b + c)$$

$$\text{adica } m_a + m_b + m_c < 2p \quad (*)$$

Consideram punctul N ca fiind intersectia dreptei BC cu paralela prin A la mediana BB'. Notam cu $\{E\} = AN \cap MB$, unde M este simetricul

lui A fata de mijlocul segmentului (BC), iar cu $\{F\} = AB \cap MN$.

Observam ca AEBB' este paralelogram de unde rezulta ca $EB=AB'=b/2$ și cu $BM=AC=b$, obtinem $ME=3b/2$.

In triunghiul MNA avem: NA' este mediana iar $BE=ME/3$ și $BM=2ME/3$ prin urmare, NA', ME și AF sunt mediane $\{B\} = AF \cap ME \cap NA$.

$$\text{De asemenea, } AM=2m_a, NM=2m_c, AN=2m_b, \text{ iar } ME = \frac{3b}{2}; NA' = \frac{3a}{2}; AF = \frac{3c}{2} \quad (**)$$

Conform relatiilor din punctul 2) vom avea in triunghiul ANM: $2AF < AN + AM$, $2ME < MA + MN$, $2NA' < NA + NM$, dar având in vedere relatiile (**) obtinem:

$$3c < 2m_a + 2m_b, \quad 3b < 2m_a + 2m_c \text{ de unde rezulta } 3(a+b+c) < 4(m_a+m_b+m_c) \text{ care este echivalenta cu :}$$

$$\frac{3p}{2} < m_a + m_b + m_c, \text{ dar } p < \frac{3p}{2} \text{ și deci } p < m_a + m_b + m_c, \text{ care impreuna cu } (*) \text{ ne da dubla inegalitate din enunt.}$$

15. Se noteaza cu M,N și P respectiv mijloacele laturilor (BC); (AC) și (AB) ale triunghiul ABC oarecare. Dreptele AM , BN și CP intersecteaza cercul circumscris triunghiul ABC in Q,S,T. Sa se arate ca:

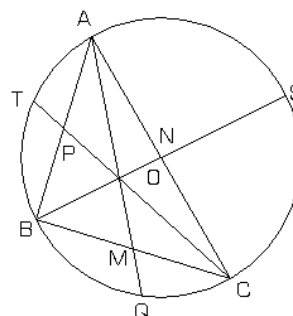
$$\frac{AM}{MQ} + \frac{BN}{NS} + \frac{CP}{PT} \geq 9$$

Solutie:

Puterea punctului M fata de cerc implica:

$$AM/MQ = BM/BC \text{ dar } BM=MC=A/2 \text{ iar}$$

$$AM=m_a \text{ de unde rezulta } \frac{AM}{MQ} = \frac{4m_a}{a^2} \text{ deci}$$



$$\frac{AM}{MQ} = \frac{4m_a^2}{a^2}. \text{ In mod analog obținem } \frac{BN}{NS} = \frac{4m_b^2}{b^2}$$

și $\frac{CP}{PT} = \frac{4m_c^2}{c^2}$. Având cele trei relații și folosind teorema medianei avem:

$$\begin{aligned} \frac{AM}{MQ} + \frac{BN}{NS} + \frac{CP}{PT} &= \frac{4m_a^2}{a^2} + \frac{4m_b^2}{b^2} + \frac{4m_c^2}{c^2} = \\ &= \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{a^2} + \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{b^2} + \frac{2(b^2 + a^2) - c^2}{c^2} = \\ &= 2\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2}\right) + 2\left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2}\right) + 2\left(\frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2}\right) - \end{aligned}$$

$$- 3 \geq 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 3 = 9.$$

$$\text{In concluzie } \frac{AM}{MQ} + \frac{BN}{NS} + \frac{CP}{PT} \geq 9.$$

Bibliografie:

Ion Vârtopeanu, Olimpia Vârtopeanu – Geometrie plană pentru gimnaziu și liceu. Craiova, Editura Sibia 1994

Chiței, Gh. A. Metode pentru rezolvarea problemelor de geometrie. București, Editura Didactică și Pedagogică 1969