

TETRAEDRE TRIDREPTUNGHICE

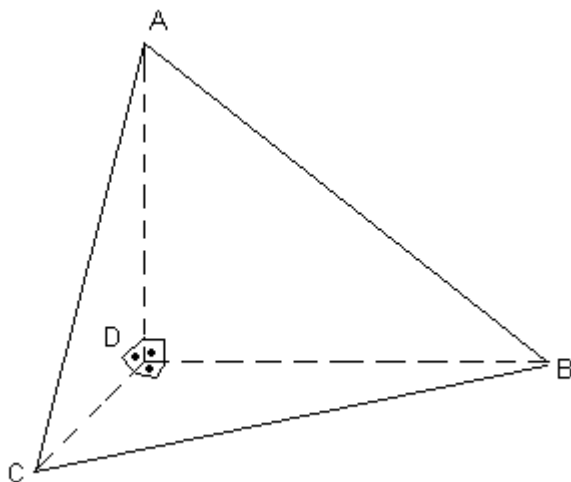
Prof. Cojocaru Camelia

Școala Nr. 1 Chiraftei, Jud. Galați

Definiție

Un tetraedru $[ABCD]$ se numește tridreptunghic în D dacă oricare două din dreptele DA, DB, DC sunt perpendiculare.

Observație :Un tetraedru tridreptunghic este ortocentric, deci are toate proprietățile acestuia, dar are și proprietăți suplimentare ce generalizează relațiile metrice ale triunghiurilor dreptunghice.



Teorema 1

Dacă tetraedrul $[ABCD]$ este tridreptunghic în D și proiecția ortogonală a lui D în planul (ABC) este H , atunci H este ortocentrul triunghiului ascuțitunghic ABC .

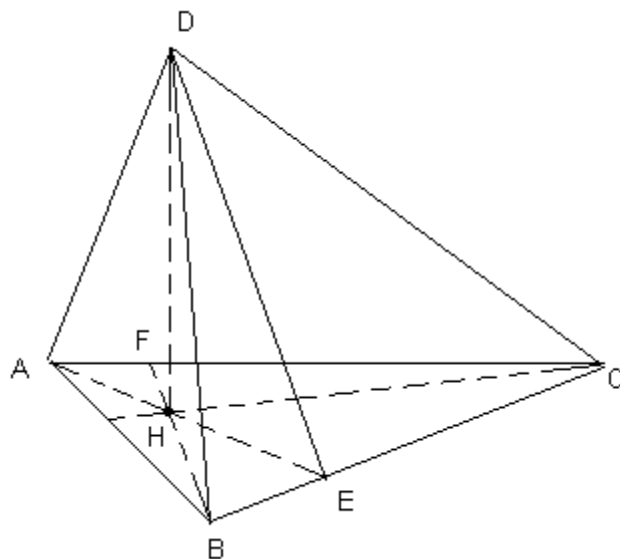
Demonstrație :

Fie E proiecția lui D pe BC . Presupunem că A, E, H nu sunt coliniare.

Deoarece $AD \perp DB$ și $AD \perp DC \Rightarrow AD \perp (BCD) \Rightarrow AD \perp BC$ (1)

Deoarece E este piciorul perpendicularei din D pe $BC \Rightarrow DE \perp BC$ (2)

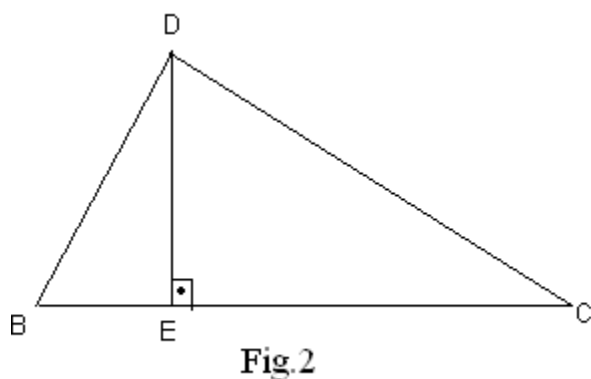
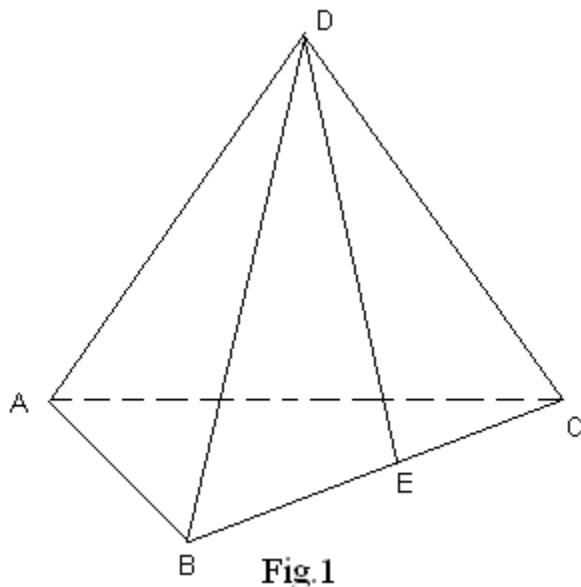
Din (1) și (2) avem: $BC \perp (ADE) \Rightarrow BC \perp AE$ (3)


$$\left. \begin{array}{l} \text{BC} \perp \text{AE} \\ \text{DE} \perp \text{BC} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{HE} \perp \text{BC} \quad (4)$$

În mod analog $HF \perp AC$ și B,H,F coliniare deci H este ortocentrul triunghiului ABC .

Într-un tetraedru $[ABCD]$ tridreptunghic în D are loc relația :

$$\frac{1}{D_H^2} = \frac{1}{D_A^2} + \frac{1}{D_B^2} + \frac{1}{D_C^2} \quad (5)$$



Demonstrație

Fie DE înălțimea din D a triunghiului BCD și H ortocentrul triunghiului ABC.

$$S = \frac{DB \cdot DC}{2} = \frac{BC \cdot DE}{2} \Rightarrow DB \cdot DC = BC \cdot DE \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DB^2 \cdot DC^2 = BC^2 \cdot DE^2$$

Din teorema lui Pitagora în triunghiul BCD, avem :

$$BC^2 = DB^2 + DC^2 \Rightarrow \frac{1}{DE^2} + \frac{1}{DB^2} + \frac{1}{DC^2} \quad (6)$$

$$\text{Din } \left. \begin{array}{l} AD \perp DB \\ AD \perp DC \end{array} \right\} \Rightarrow AD \perp (BCD) \Rightarrow AD \perp DE$$

În triunghiul dreptunghic ADE, obținem:

$$\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DE^2} \quad (7)$$

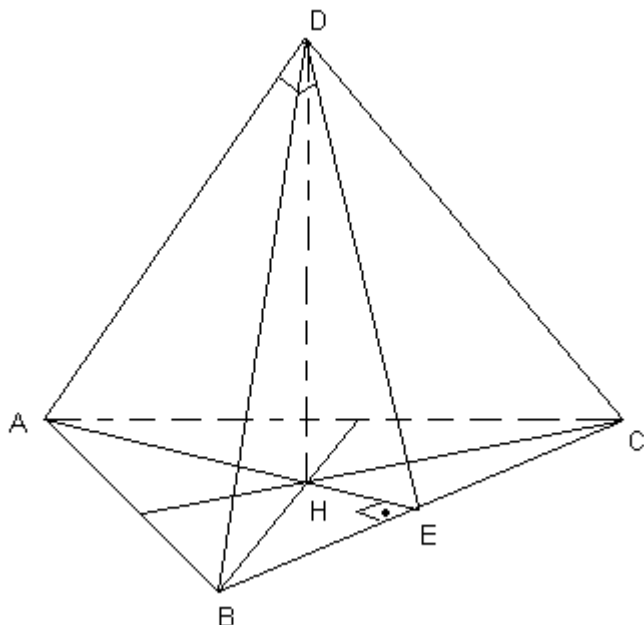
Din relațiile (6) și (7) obținem relația (5)

$$\frac{1}{DH^2} + \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DB^2} + \frac{1}{DC^2}$$

Consecință

Dacă H este ortocentrul triunghiului ABC, atunci :

$$\cos^2 \hat{HDA} + \cos^2 \hat{HDB} + \cos^2 \hat{HDC} = 1 \quad (8)$$



Dacă înmulțim relația (5) cu DH^2 obținem :

$$\frac{DH^2}{DA^2} + \frac{DH^2}{DB^2} + \frac{DH^2}{DC^2} = 1$$

$$\text{Dar } \frac{DH}{DA} = \cos \hat{HDA}, \quad \frac{DH}{DB} = \cos \hat{HDB}, \quad \frac{DH}{DC} = \cos \hat{HDC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 \hat{HDA} + \cos^2 \hat{HDB} + \cos^2 \hat{HDC} = 1$$

Teorema 3

Într-un tetraedru [ABCD] tridreptunghic în D are loc egalitatea:

$$S_{DBC}^2 = S_{ABC} \cdot S_{HBC} \quad (9)$$

Demonstrație

Deoarece $AD \perp BD$ și $AD \perp CD \Rightarrow AD \perp (BCD)$;

$-DE \subset (BCD) \Rightarrow AD \perp DE \Rightarrow \Delta ADE$ - dreptunghic.

În triunghiul ADE, aplicăm torema catetei:

$$DE^2 = AE \cdot HE \mid \cdot BC^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DE^2 \cdot BC^2 = AE \cdot HE \cdot BC^2 \Rightarrow$$

$$(DE \cdot BC)^2 = (BC \cdot AE) \cdot (BC \cdot HE) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{BC \cdot DE}{2} \right)^2 = \frac{BC \cdot AE}{2} \cdot \frac{BC \cdot HE}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{DBC}^2 = S_{ABC} \cdot S_{HBC}$$

Aria unei fețe este media geometrică între aria bazei și aria proiecției pe bază a feței respective.

Observație: Această teoremă este o generalizare a teoremei catetei din geometria plană.

Teorema 4

Într-un tetraedru [ABCD] tridreptunghic în D are loc egalitatea .

$$S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 = S_D^2 \quad (10)$$

Demonstrație

$$S_A = S_{DBC}, S_B = S_{ADC}, S_C = S_{ABD}, S_D = S_{ABC}$$

Aplicând teorema 3, obținem:

$$S_A^2 = S_D \cdot S_{HBC}$$

$$S_B^2 = S_D \cdot S_{HAC}$$

$$S_C^2 = S_D \cdot S_{HAB}$$

Adunând relațiile membru cu membru, obținem:

$$S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 = S_D \cdot (S_{HBC} + S_{HAC} + S_{HAB}) = S_D \cdot S_D = S_D^2$$

Observație : Această teoremă reprezintă o generalizare a teoremei lui Pitagora din geometria plană.

Teorema 5

Un tetraedru ABCD este tridreptunghic în D dacă și numai dacă au loc relațiile :

$$2 DA^2 = b^2 + c^2 - a^2$$

$$2 DB^2 = a^2 + c^2 - b^2 \quad (11)$$

$$2 DC^2 = a^2 + b^2 - c^2$$

Demonstrație :

Necesitatea : ABCD tridreptunghic $\Rightarrow$ (11)

Din teorema lui Pitagora aplicată fețelor obținem:

$$DB^2 + DC^2 = a^2,$$

$$DC^2 + DA^2 = b^2,$$

$$DA^2 + DB^2 = c^2$$

care verifică egalitățile (11)

Suficiență : Din relațiile (11) și reciproca teoremei lui Pitagora aplicată fețelor tetraedrului se obține că unghiurile plane ale tetraedrului D sunt drepte.

Volumul tetraedrului tridreptunghic

Volumul V al tetraedrului ABCD tridreptunghic în D se exprimă în funcție de laturile a, b, c ale triunghiului ABC prin formula:

$$288 V^2 = (a^2 + b^2 - c^2) \cdot (b^2 + c^2 - a^2) \cdot (c^2 + a^2 - b^2) \quad (12)$$

Avem:

$$6 \cdot V = DA \cdot DB \cdot DC$$

Înlocuind formulele (11) și ridicând la pătrat se obține (12)

$$36 V^2 = DA^2 \cdot DB^2 \cdot DC^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \Rightarrow$$

$$288 V^2 = (a^2 + b^2 - c^2) \cdot (b^2 + c^2 - a^2) \cdot (c^2 + a^2 - b^2)$$

Volumul V al tetraedrului ABCD tridreptunghic în D satisface relația:

$$9V^2 = 2 \cdot S_A \cdot S_B \cdot S_C \quad (13)$$

în care $S_A = S_{DBC}$, $S_B = S_{ADC}$, $S_C = S_{ABD}$

Demonstrație: Din : $6 \cdot V = DA \cdot DB \cdot DC \Rightarrow 36 V^2 = DA^2 \cdot DB^2 \cdot DC^2 = (DA \cdot DB) \cdot (DA \cdot DC) \cdot (DB \cdot DC) = 8 \cdot S_A \cdot S_B \cdot S_C \Rightarrow$ (13)

BIBLIOGRAFIE:

1. J. Hadamard - Lecții de geometrie în spațiu, Ed. Tehnică, București
2. Dan Brânzei, Sebastian Aniță, Constantin Cocea- Planul și spațiul euclidian, D. Academiei, București, 1986.

PREMIILE CONGRESULUI INTERNAȚIONAL DE MATEMATICĂ

(Hyderabad, 19-27 august 2010)

NECULAI STANCIU¹

Motto:

*“Calculând cu logaritmi unghiul sufletului tău,
L-am găsit destul de mare ca să-ncap în el și eu,
Nu cer prea mult de la tine, nu am nici un gând demonic,
Numai ca doi buni prieteni să fim în raport armonic. “*

Mihail Manoilescu

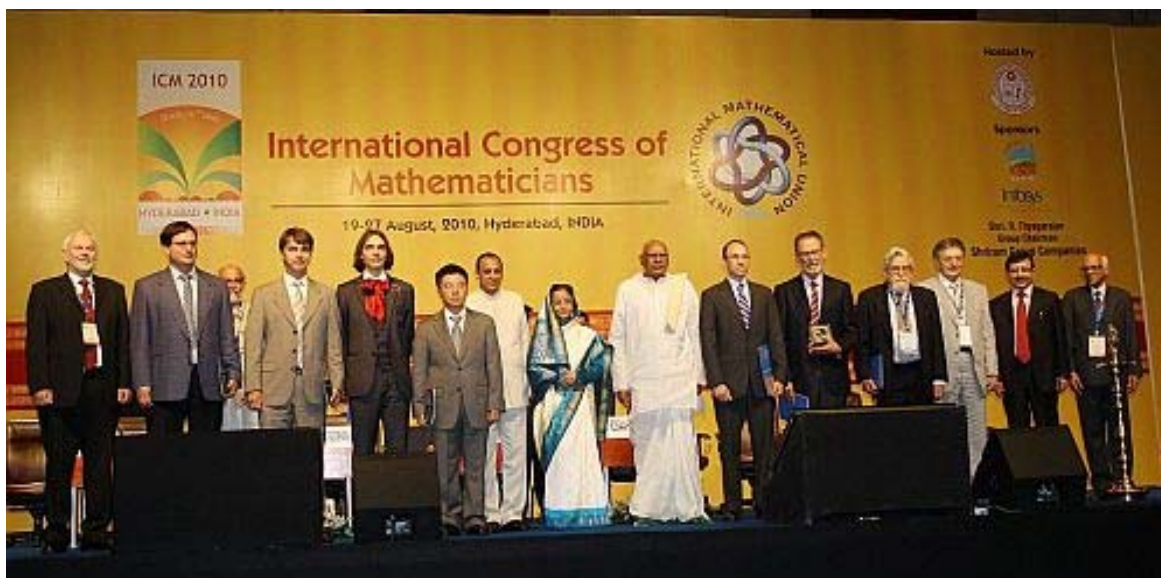
(dedicat de autor unui inspector școlar!)

Abstract. The International Mathematical Union (IMU) doled out seven prizes, including the brand-new, \$500,000 Chern Medal Award, in opening ceremonies at its quadrennial International Congress of Mathematicians (ICM) in Hyderabad, India. Also at the meeting, IMU elected its first woman president, Ingrid Daubechies of Princeton University. Four mathematicians received the prestigious Fields Medal, long regarded as mathematics' version of the Nobel Prize. Elon Lindenstrauss of Hebrew University of Jerusalem and Ngô Bảo Châu of Université Paris-Sud in Orsay, France, took the prize for analytic work with applications to number theory. Stanislav Smirnov of the University of Geneva, Switzerland, and Cédric Villani of the Henri Poincaré Institute in Paris won for theoretical work in statistical physics. The Nevanlinna Prize, given for work in mathematical aspects of computer science, went to Daniel Spielman of Yale University for contributions in the areas of linear programming and error-correcting codes, which underlie much of what computers spend their time doing in business applications and telecommunications. The Gauss Prize, awarded for work in applied mathematics, went to Yves Meyer, professor emeritus at the École Normale Supérieure de Cachan in France. Louis Nirenberg of New York University was honored with the inaugural Chern Medal for his lifetime work in the modern theory of partial differential equations and for his mentoring of students and postdocs. Congratulations to all the winners!

Keywords: International Mathematical Union, International Congress of Mathematicians, Fields Medal, Carl Friedrich Gauss Prize, Rolf Nevanlinna Prize, Chern Medal.

MSC :01AXX

¹ Profesor, Șc. Gen. “George Emil Palade”, Buzău



Internațional Mathematical Union (IMU) acordă **medalia Fields**, “nobilul matematicii”, la fiecare patru ani, începând din 1936, matematicienilor mai tineri de 40 de ani(vezi [1]), cu ocazia Congresului Internațional al Matematicienilor(CIM).

Acest premiu a fost înmănat celor patru laureați de către președintele indian *Shrimati Pratibha Patil*, cu ocazia deschiderii CIM pe 2010, la care participă peste 3.000 de specialiști din întreaga lume și care s-a desfășurat în perioada 19 - 27 august, în orașul Hyderabad din sudul Indiei.



Shrimati Pratibha Patil

Francezii *Cédric Villani* și *Ngô Bảo Châu*, israelianul *Elon Lindstrauss* și rusul *Stanislav Smirnov* au primit, în 19 august 2010, medalia Fields.

Cédric Villani²(36 de ani), directorul Institutului Henri Poincaré (IHP) din Paris din iulie 2009 și profesor la Ecole Normale Supérieure din Lyon, a primit această distincție pentru lucrările sale asupra “amortizării Landau” și ecuației lui *Boltzmann*, un fizician și matematician austriac de la sfârșitul secolului al XIX-lea.



²vezi: http://en.wikipedia.org/wiki/C%C3%A9dric_Villani și <http://www.umpa.ens-lyon.fr/~cvillani/>

Fields Medal – *Cédric Villani*, Institut Henri Poincaré



Laudație, *Hong-Tzer Yau*
Prezentare, *Julie Rehmeyer*

Ngô Bảo Châu³ (38 de ani), născut în 1972, la Hanoi, și devenit cetățean francez în 2010, predă la Universitatea Paris-Sud și a primit medalia Fields pentru demonstrația din 2008 a lemei fundamentale propuse de *Robert Langlands*. Verificată recent de numeroși experți în domeniul matematicii, această demonstrație de peste 150 de pagini a fost inclusă, în decembrie 2009, pe lista “celor mai frumoase zece descoperiri științifice ale anului” realizată de revista Times.



Fields Medal - *Ngô Bảo Châu*, Université Paris-Sud



Laudație, *James Arthur*
Prezentare, *Julie Rehmeyer*

Elon Lindenstrauss⁴ (40 de ani), a fost premiat pentru ”rezultatele sale din domeniul măsurării rigidității din teoria ergodică și aplicațiile lor în teoria numerelor”.



³ vezi: http://en.wikipedia.org/wiki/Ng%C3%B4_B%E1%BA%A3o_Ch%C3%A2u

⁴ vezi: http://en.wikipedia.org/wiki/Elon_Lindenstrauss și
<http://www.ma.huji.ac.il/~elon/index.html>

Fields Medal - *Elon Lindenstrauss*, Princeton University



Laudație, *Harry Furstenberg*
Prezentare, *Julie Rehmeyer*

Stanislav Smirnov⁵ (40 de ani) născut în 1970 la Sankt Petersburg, în Rusia, în prezent profesor la Universitatea din Geneva, a fost recompensat pentru lucrările sale din domeniul fizicii statistice și din domeniul percolațiilor.



Fields Medal - *Stanislav Smirnov*, Université de Genève



Laudație, *Hary Kesten*
Prezentare *Julie Rehmeyer*

Premiul Gauss, care recompensează aplicațiile din matematică (vezi [1]), a revenit francezului **Yves Meyer**⁶, în vârstă de 71 de ani, ”pentru contribuțiile sale fundamentale aduse teoriei numerelor” și ”rolului său de pivot în dezvoltarea teoriei funcțiilor wavelet”.



⁵ vezi: http://en.wikipedia.org/wiki/Stanislav_Smirnov și <http://www.unige.ch/~smirnov/>

⁶ vezi: http://en.wikipedia.org/wiki/Yves_Meyer

Carl Friedrich Gauss Prize - Yves Meyer, ENS Cachan



Laudație, Ingrid Daubechies

Premiul Nevanlinna, care recompensează lucrările din domeniul științelor informatice(vezi [1]), a fost atribuit americanului **Daniel Spielman**⁷ (40 de ani).

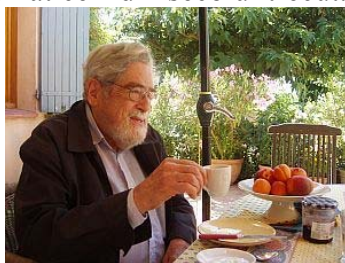


Rolf Nevanlinna Prize - Daniel Spielman, Yale University



Laudație, Gil Kalai
Prezentare, R. Ramachandran

Medalia Chern, decernată în premieră(vezi [1]), în acest an în memoria matematicianului chinez *Shiing-Shen Chern* (1911 - 2004), a fost atribuită americanului **Louis Nirenberg**⁸ (85 de ani), considerat de confrății săi drept “unul dintre cei mai mari specialiști ai analizei matematice” din secolul trecut.



Chern Medal - Louis Nirenberg, Courant Institute of Mathematical Sciences

⁷ vezi: http://en.wikipedia.org/wiki/Daniel_Spielman și <http://cs-www.cs.yale.edu/homes/spielman/>

⁸ vezi: http://en.wikipedia.org/wiki/Louis_Nirenberg



Laudație, Yan Yan Li
Prezentare, R. Ramachandran



BIBLIOGRAFIE:

- [1] Neculai Stanciu, Constantin Rusu, *Aspecte din istoria O.I.M.* - Gazeta Matematică, seria A, nr. 3/ 2009
- [2] <http://www.youtube.com/watch?v=YaygWWCDzeQ>⁹
- [3] <http://www.youtube.com/watch?v=S3nVp2AOOD0>¹⁰
- [4] http://www.imo-official.org/year_individual_r.aspx?year=1986¹¹
- [5] http://www.imo-official.org/year_individual_r.aspx?year=1987¹²
- [5] http://www.imo-official.org/year_individual_r.aspx?year=1988¹³

⁹ Decernarea Medaliei Fields

¹⁰ Univ. din Israel

¹¹ *Stanislav Smirnov*, olimpic internațional (1986)

¹² *Stanislav Smirnov*, olimpic internațional (1987)

- [7] http://www.imo-official.org/year_individual_r.aspx?year=1989 ¹⁴
- [8] http://www.imo-official.org/year_individual_r.aspx?year=1988 ¹⁵
- [9] <http://www.icm2010.org.in/welcome> ¹⁶
- [10] <http://www.mathunion.org/organization/general-assembly/> ¹⁷

¹³ Ngô Bảo Châu , olympic internațional (1988)

¹⁴ Ngô Bảo Châu, olympic internațional (1989)

¹⁵ Elon Lindenstrauss, olympic internațional (1988)

¹⁶ Pagina online ICM -2010, Hyderabad, India, 2010

¹⁷ Pagina online IMU

O proprietate a triunghiurilor cu laturile în progresie geometrică

Nicușor Zlota¹**P1. Un triunghi cu laturile în progresie geometrică este dreptunghic dacă și numai dacă**

$$q^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, q = \text{rația progresiei}$$

Demonstrație

Fie ABC un triunghi cu laturile a, b, c

Notăm cu q rația progresiei geometrice crescătoare, avem $a=a$, $b=aq$, $c=aq^2$, $q>1$

Dacă triunghiul ABC este dreptunghic rezultă

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = a^2 q^2 + a^2 q^4 \Leftrightarrow q^4 + q^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow q^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$q = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

Din enunțul proprietății avem ca $q^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow q^2 = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow \frac{1}{q^2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, care reprezintă numărul de aur

P2. Să se arate că într-un triunghi dreptunghic avem inegalitatea $AD > AB + AC - BC$, unde AD = înălțimea triunghiului dreptunghic ABC

Rezolvare

Se știe că într-un triunghi dreptunghic $D \in BC$, avem relația, $AD = bc/a$, unde $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$

Înlocuind cu notațiile din P1, avem succesiv

$$AD = \frac{bc}{a} = \frac{a^2 q^3}{a} = a q^3$$

$$a q^3 > b + c - a \Rightarrow a q^3 > a q + a q^2 - a \Rightarrow q^3 > q^2 + q - 1 \Rightarrow 1 + q^3 - q(1 + q) > 0 \Rightarrow (1 + q)(q - 1)^2 > 0$$

q.e.d

P3. Să se arate ca într-un triunghi dreptunghic avem inegalitatea $h \leq \frac{p}{1+\sqrt{2}}$, $h=AD$, $p=$ semiperimetru

Indicație: Se utilizează relațiile din P1 și după efectuarea calculelor se obține P3

P4 Fie ABC un triunghi oarecare cu laturile a, b, c în progresie geometrică crescătoare. Să se arate că

$$1 < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Demonstrație

Notăm $q > 1$ rația progresiei, avem $a=a$, $b=aq$, $c=aq^2$

Din condiția de existență a triunghiului ABC, avem $a+b > c$, rezultă că

$$1+q > q^2, \text{ de unde rezulta că } 1 < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

P5. Să se demonstreze că într-un triunghi ABC avem inegalitatea

$$\sin B + \sin C < (2 + \sqrt{5}) \sin A$$

Rezolvare

În continuare aplicând teorema sinusului, avem succesiv :

$$\sin B + \sin C = \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} = \frac{aq + aq^2}{2R} = \frac{a}{2R} (q + q^2) = (q + q^2) \sin A$$

$$q < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow q^2 < \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow q + q^2 < (2 + \sqrt{5})$$

q.e.d

P6. Să se arate că în orice triunghi ABC cu laturile în progresie geometrică crescătoare avem

$$\sin^2 A \geq \sin 2B \sin 2C$$

Rezolvare

Aplicând teorema sinusului și cosinusului avem succesiv :

$$\sin^2 A \geq \sin 2B \sin 2C$$

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{4R^2} &\geq 4 \frac{b}{2R} \cos B \frac{c}{2R} \cos C \Rightarrow \frac{a^2}{4R^2} \geq 4 \frac{bc}{4R^2} \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Rightarrow a^4 \\ &\geq (a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) \Rightarrow 1 \geq (1 + q^2 - q^4)(1 + q^4 - q^2) \\ &\Rightarrow q^4(q^2 - 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

q.e.d

¹ Profesor Nicusor Zlota - Colegiul Tehnic Auto Traian Vuia Focșani

METODE DE REZOLVARE A ECUAȚIILOR ÎN Z

Profesor : **Adela Cotul**
Grup Școlar „**Liviu Rebreanu**” Maieru
Jud. Bistrița – Năsăud

1. Metode care folosesc relația de divizibilitate

1.1 Metoda descompunerii

Rezolvarea majorității ecuațiilor în numere naturale sau întregi se bazează pe unicitatea descompunerii în factori primi (D.F.P.) a numerelor întregi¹.

Uneori descompunerea se observă imediat.

Exemplul 1.1.1: Ecuația în numere naturale

$$xyz+xy+xz+yz+x+y+z=1000 \quad (***)$$

Rezolvare: Avem:

$$(x+1)(y+1)(z+1)=7 \cdot 11 \cdot 13,$$

de unde soluțiile:

$$(x,z,y)=(6,10,12) \text{ și permutările.}$$

De cele mai multe ori, descompunerea – când aceasta este posibilă – se face prin prelucrarea ecuației, prin tatonări și încercări. Reușita depinde mult de ecuație și de abilitatea rezolvitorului.

Exemplul 1.1.2: Ecuația

$$x^2(y-1)+y^2(x-1)=1 \quad (\text{Olimpiada poloneză})$$

Soluție: Ecuația se scrie succesiv:

$$xy(x+y)-(x^2+y^2)=1$$

$$xy(x+y+2)-(x+y)^2=1$$

$$xy(x+y+2)-[(x+y)^2-4]=5$$

$$(x+y+2)(xy-x-y+2)=5$$

iar de aici soluțiile $(1,2), (2,1), (-5,2), (2,-5)$.

Alteori, când încercările de descompunere sunt greoaie, folosim metoda coeficienților nedeterminați.

Exemplul 1.1.3: Ecuația

$$(x+y)(x^2+y^2)=4xy+3. \text{ (I.Cucurezeanu)}$$

Soluție: Vom încerca să scriem ecuația ca o egalitate între produsul a doi factori – un polinom de gradul întâi și altul de gradul doi în necunoscutele x, y – și un număr întreg. Ecuația fiind simetrică în x și y , vom lua:

$$(x+y+a)(x^2+y^2+bx+by+c)=d,$$

unde numerele întregi a, b, c, d se determină prin identificare. Găsim

$$a=2, b=-2, c=-4, d=5$$

și ecuația se scrie sub forma

$$(x+y+2)(x^2+y^2-2x-2y-4)=5$$

de unde se găsesc ușor toate soluțiile întregi.

Câteodată, când o ecuație se poate scrie ca o ecuație de gradul al doilea într-una din necunoscute, punem condiția ca discriminantul său să fie pătrat perfect, ceea ce ușurează descompunerea.

Exemplul 1.1.4: Ecuația în numere întregi nenule

$$(x^2+y)(x+y^2)=(x-y)^3 \text{ (A 16-a olimpiadă SUA)}$$

Soluție: După desfacerea parantezelor și simplificarea cu $y \neq 0$, o putem considera ca o ecuație de gradul doi în y :

$$2y^2+(x^2-3x)y+3x^2+x=0$$

și pentru ca aceasta să aibă soluții întregi trebuie ca discriminantul său, $x(x+1)^2(x-8)$ să fie pătrat perfect. Rezultă $x(x-8)=z^2$ sau $(x-4)^2-z^2=16$, de unde $(x-4-z)(x-4+z)=16$, iar de aici $x \in \{-1, 8, 9\}$ și corespunzător y .

Dacă $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ este descompunerea canonică a numărului $n > 1$, atunci numărul divizorilor pozitivi ai lui n este $\tau(n) = (a_1+1)(a_2+1) \dots (a_k+1)^2$.

Aplicația 1.1.5: Fie $n > 1$ un număr întreg dat prin descompunerea sa canonică

$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$. Se cere numărul de soluții pozitive al ecuației:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}. (***)$$

Rezolvare: Ecuația se mai scrie:

$(x-n)(y-n)=n^2$ și cum n^2 are $(2a_1+1)(2a_2+1)\dots(2a_k+1)$ divizori pozitivi, rezultă că și ecuația are același număr de soluții.

Sunt utile și identitățile:

1. $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$
2. $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(a+c)$

Exemplul 1.1.6: Rezolvați în numere naturale ecuația:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=p,$$

unde $p>3$ este un număr prim dat. (Titu Andreescu și Dorin Andrica)

Soluție: Ecuația este echivalentă (conform identității 1) cu:

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-zy)=p.$$

Deoarece $x+y+z>1$ implică $x+y+z=p$ și $x^2+y^2+z^2-xy-xz-zy=1$. Ultima ecuație se mai scrie:

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2.$$

Din simetria ecuației putem presupune $x\geq y\geq z$, atunci $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2>2$. Deci $x=y=z+1$ sau $x-1=y=z$. Numărul prim p este de forma $3m+1$ sau $3m+2$ și soluțiile sunt:

$$\left(\frac{p-1}{3}, \frac{p-1}{3}, \frac{p+2}{3}\right) \text{ sau } \left(\frac{p-2}{3}, \frac{p+1}{3}, \frac{p+1}{3}\right)$$

și permutările acestora.

1.2 Probleme

Vom prezenta în continuare, o colecție de probleme, a căror rezolvare se bazează pe metoda descompunerii.

1. Pentru fiecare întreg pozitiv m dat, ecuația

$$x^2+y^2+2xy-mx-my-m-1=0$$

are exact m soluții în numere întregi. (***)

Demonstrație: Avem descompunerea

$$x^2+y^2-2xy-mx-my-m-1=(x+y+1)(x+y-m-1)$$

și cum x și z sunt pozitivi, deci $x+y+1>0$, rezultă $x+y=m+1$, care are exact m soluții în întregii pozitivi x, y și anume $x=k, y=m-k+1$, unde $k=1, 2, \dots, m$.

2. Ecuația

$$(x^2+1)(y^2+1)+2(x-y)(1-xy)=4(1+xy). \quad (\text{Titu Andreescu})$$

Soluție: Scriem succesiv ecuația astfel:

$$x^2y^2-2xy+1+x^2+y^2-2xy-2(x-y)(xy-1)=4$$

$$(xy-1)^2+(x-y)^2-2(x-y)(xy-1)=4$$

$$[xy-1-(x-y)]^2=4$$

$$(x+1)(y-1)=\pm 2,$$

de unde soluțiile:

$$(x,y)=(1,2),(-3,0),(0,3),(-2,-1),(1,0),(-3,2),(0,-1),(-2,3).$$

3. Ecuația

$$x^5+x^4+2x^2-1=y^2. \quad (\text{I. Cucurezeanu})$$

Rezolvare: Descompunând membrul stâng, avem:

$$(x^2+x-1)(x^3+x+1)=y^2$$

Se constată ușor că:

$$(x^2+x-1, x^3+x+1)=1,$$

și atunci

$$x^2+x-1=\pm u^2, \quad x^3+x+1=\pm v^2, \quad \text{cu } uv=y.$$

Prima ecuație are numai soluțiile $x=1, 0, -1$ și convine pentru a doua numai $x=-1$. Deci $x=-1$ este unică pentru ecuația inițială.

4. Ecuația

$$x^4+4=py^4, \quad p \text{ prim.} \quad (\text{I. Cucurezeanu})$$

Rezolvare: Evident x și y impare. Ecuația se mai scrie:

$$(x^2+2)^2-4x^2=py^4 \quad \text{sau}$$

$$(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)=py^4,$$

iar de aici și din:

$$(x^2-2x+2, x^2+2x+2)=1$$

rezultă:

$$x^2-2x+2=a^4,$$

$$x^2+2x+2=pb^4,$$

$$ab=y$$

sau:

$$(x-1)^2+1=a^4,$$

$$(x+1)^2 = pb^4.$$

Din prima rezultă

$$a^2 = 1, x = 1$$

și din a doua

$$p = 5, b^2 = 1.$$

Deci avem numai soluția

$$x^2 = 1, y^2 = 1, p = 5.$$

Observație: De fapt, ecuația $x^4 + 4 = py^4$ are o infinitate de soluții întregi. Rezolvarea este însă laborioasă.

5. Ecuația

$$p(p+1) + q(q+1) = n(n+1),$$

unde p și q sunt numere prime și n natural. (APMC 1982)

Soluție: C. Mortici. Ecuația se mai scrie

$$(n-p)(n+p+1) = q(q+1).$$

Presupunând că $q/(n-p)$, avem $n = aq + p$, cu $a \geq 1$ întreg și $a(aq + 2p + 1) = q + 1$ cu $a \geq 1$, contradicție. Deci $q/(n-p+1)$ și analog $p/(n-q+1)$, de unde $q/(n+p+q+1)$ și $p/(n+p+q+1)$. Dacă $p \neq q$, atunci $pq/(n+p+q+1)$, deci $pq \leq n+p+q+1$. Presupunând $p < q$, ceea ce implică $n < 2q$, avem $pq < 3q + p + 1$ sau $(p-3)(q-1) < 2$. De aici prin verificări, găsim $p=3$, iar din ecuație $q=5$ și $n=6$. Pentru $p=q$ mai găsim soluția $p=q=2$, $n=3$.

6. Ecuația: $x^5 + y^5 = 2004^z$ nu are soluții în numere întregi pozitive. (I. Cucurezeanu)

Rezolvare: Deoarece $2004 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167$ rezultă, mai întâi, că x și y sunt numere impare. Apoi, cum c.m.m.d.c.

$$\left(x + y, \frac{x^5 + y^5}{x + y} \right) = 1 \text{ sau } 5,$$

din: $5 \nmid 2004$ rezultă că c.m.m.d.c. este 1. Din unicitatea D.F.P., ținând seama că $x+y$ este par și că $(x+y)^2 \nmid x^5 + y^5$, avem numai următoarea descompunere:

$$x + y = 2^{2z} 3^z,$$

$$\frac{x^5 + y^5}{x + y} = 167^z.$$

Deoarece x și y sunt impari, rezultă:

$$\begin{aligned}\frac{x^5 + y^5}{x + y} &= x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = \\ &= \mathcal{M}_8 + 3 - xy(x^2 + y^2) = \\ &= \mathcal{M}_8 + 3 - 2xy = \mathcal{M}_8 + 5,\end{aligned}$$

în timp ce $167^z = \mathcal{M}_8 \pm 1$.

7. Rezolvați ecuația

$$(x+y)^2 - 2(xy)^2 = 1, \quad x, y \in \mathbb{N}^*. \quad (\text{Olimpiada poloneză, 2002})$$

Soluție: Aparent este o ecuație Pell, $u^2 - 2v^2 = 1$. În realitate este o ecuație mult mai simplă. Într-adevăr, ea se mai scrie $(x^2 - 1)(y^2 - 1) + (xy - 1)^2 = 1$, de unde rezultă ușor că una dintre necunoscutele x sau y este 1, iar cealaltă este 2.

1.3 Ecuații exponențiale elementare

În contextul acestui capitol (ca de altfel în toată Teoria Numerelor), cuvântul *elementar* nu este sinonim în nici un caz cu *simplu* și cu atât mai puțin cu *ușor*. Ecuațiile respective se numesc *elementare* doar pentru că derivă din elementele matematicii de bază, ale aritmeticii și algebrei aplicate numerelor.

În ciuda eficacității tehnicilor analitice, metoda elementară este mai apropiată de proprietățile fundamentale ale numerelor întregi, iar rezultatele la care s-a ajuns prin aceasta sunt intuitiv mai clare și de aici mai profunde.

Rezolvarea acestor ecuații se bazează pe unicitatea descompunerii în factori primi a numerelor întregi (D.F.P.)

Exemplul 1.3.1: Să se rezolve în numere naturale ecuația:

$$x^{x+y} = y^{y-x}. \quad (\text{A.P.M.C., 1999})$$

Soluție: Evident numerele x și y au aceiași factori în descompunerea canonică și deoarece exponentul lui x este mai mare decât exponentul lui y rezultă că x/y . Fie $y = xz$. Înlocuind în ecuație, avem $x^{x(1+z)} = (xz)^{x(z-1)}$, de unde $x^2 = z^{z-1}$ și apoi $y^2 = z^{z+1}$. Dar o putere este pătrat perfect fie când baza este pătrat, fie când exponentul este par. Pentru $z = t^2$ avem $x = t^{t^2-1}$, $y = t^{t^2+1}$, care verifică ecuația pentru orice $t \geq 1$. Pentru $z-1 = 2a$ avem $x = (2a+1)^{a+1}$, care și ele verifică ecuația pentru orice $a \geq 0$. Tot din unicitatea D.F.P. rezultă ușor că dacă a , b , c , și n sunt întregi pozitivi, cu a și b primi între ei, notat $(a, b) = 1$, iar $ab = c^n$, atunci există întregii c_1 , c_2 astfel

încât $a=c_1^n$, $b=c_2^n$ cu $c_1c_2=c$. Iar de aici rezultă că dacă $ab=p^\alpha q^\beta$, cu $p \neq q$ prime și $(a,b)=1$, atunci $a=p^\alpha$ și $b=q^\beta$ sau invers. În fine, dacă $ab=p^\alpha$, p prim, atunci $a=p^m$, $b=q^n$ cu $m+n=\alpha$, iar m și n întregi nenegativi.

Aceste proprietăți vor fi folosite în unele rezolvări.

Exemplul 1.3.2: Aflați tripletele de întregi pozitivi (x,y,z) astfel încât:

$$(x+y)(1+xy)=2^z. (***)$$

Soluție: Avem $x+y=2^a$, $1+xy=2^b$, cu a și b întregi pozitivi, $a+b=z$. Fie $x=2^aq_1+1$, $y=2^bq_1-1$ cu q, q_1 impari. Din prima ecuație rezultă $a=b$, apoi din a doua ecuație avem $2^{2a}qq_1=2^b$. De aici rezultă că $q=q_1=1$ și soluțiile $x=2^a+1$ și $y=2^a-1$, cu a întreg pozitiv arbitrar, sau invers $y=2^a+1$ și $x=2^a-1$.

Reamintim că prin (a,b) , unde a și b sunt numere întregi, se notează valoarea pozitivă a celui mai mare divizor comun al numerelor a și b . Este utilă următoarea teoremă:

Teorema 1.3.3: Dacă x, y și k sunt numere întregi cu $x+y \neq 0$, $(x,y)=1$ și $k>1$ impar, atunci

$$\left(x+y, \frac{x^k+y^k}{x+y} \right) = (x+y, k).$$

Exemplul 1.3.4: Aflați numerele naturale n cu proprietatea că există numerele naturale x, y , prime între ele, și un număr întreg $k>1$ astfel încât:

$$x^k+y^k=3^n. \text{ (Olimpiada rusă, 1997)}$$

Soluție: Pentru k par, din $(x,y)=1$ rezultă $x^k+y^k \equiv 2 \pmod{3}$, deci nu avem soluții. Pentru k impar ecuația se scrie:

$$(x+y) \frac{x^k+y^k}{x+y} = 3^n.$$

Și cum:

$$\left(x+y, \frac{x^k+y^k}{x+y} \right) = (x+y, k),$$

iar $x+y=3^\alpha$ rezultă $3/k$ și $\frac{x^k+y^k}{x+y} = 3$.

$$\text{Cum } x+y \leq \frac{x^k+y^k}{x+y} = 3 \text{ rezultă } x=2, y=1 \text{ și soluția } 2^3+1^3=3^2.$$

Un rol important în rezolvarea unor ecuații exponențiale îl are și bine-cunoscuta teoremă a lui Fermat, pe care o amintim în continuare:

Teorema 1.3.5: (Mica teoremă a lui Fermat) Dacă p este prim și a întreg prim cu p , atunci $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Este utilă și următoarea:

Lema 1.3.6: Dacă p este prim, a, b întregi, atunci $p|a^n - b^n$, dacă și numai dacă $p|a^d - b^d$, unde $d = (p-1, n)$.

Demonstrație: Implicația $p|a^d - b^d \Rightarrow p|a^n - b^n$ este evidentă (fiindcă $d|n$). Fie $p|a^n - b^n$. Dacă $p|a$ și $p|b$, implicația este evidentă. Altfel, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ și $b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, conform teoremei lui Fermat. Din $d = (p-1, n)$ rezultă că există α, β întregi astfel încât $d = \alpha(p-1) + \beta n$ ceea ce implică

$$a^d = a^{\alpha(p-1) + \beta n} \equiv b^{\beta n} \equiv b^{\alpha(p-1) + \beta n} \equiv b^d \pmod{p},$$

deci $p|a^d - b^d$.

1.4 Probleme

1. Ecuația $3^x + 4^y = 5^z$ are soluție unică în întregii pozitivi. (***)

Soluție: Scriind-o sub forma:

$$3^x + (3+1)^y = (6-1)^z \text{ rezultă } z \text{ par, } z=2u \text{ și } 5^{2u} - 2^{2y} = 3^x,$$

de unde:

$$5^u - 2^y = 3^a \text{ și } 5^u + 2^y = 3^b, \text{ cu } a+b=x,$$

iar de aici:

$$2^{y+1} = 3^a(3^{b-a} - 1) \Rightarrow a=0, b=x$$

și atunci:

$$2^{y+1} = 3^x - 1 = (4-1)^x - 1 \Rightarrow x \text{ par, } x=2v$$

și ecuația se scrie:

$$(3^v - 1)(3^v + 1) = 2^{y+1}.$$

Dar dintre două numere pare consecutive unul se divide numai cu 2, iar celălalt cel puțin cu 4.

Așa că $3^v - 1 = 2$, $v=1$ și soluția unică este $x=y=z=2$.

2. Să se rezolve ecuația: $2^x + 3^y = 5^z$. (A. Schinzel)

Soluție: Scriind ecuația sub forma:

$$(3-1)^x + 3^y = (6-1)^z$$

deducem că x și z trebuie să aibă aceeași paritate. Dacă x și z sunt pare, ecuația se reduce la precedentă și avem soluția $x=4, y=2, z=2$.

Fie x și z impare. Pentru $x \geq 3$, scriind ecuația sub forma:

$$2^x + (4-1)^y = (4+1)^z,$$

se observă că nu avem soluții.

Deci $x=1$ și ecuația $2+3^y=5^z$ este imposibilă modulo 9 pentru $y \geq 2$.

În concluzie avem soluția $x=1, y=1, z=1$.

3. Rezolvați ecuația

$$x^3 + 7^y = 2^z \quad (\text{I. Cucurezeanu})$$

Soluție: Considerând ecuația modulo 7, deducem că $3 \nmid z$. Fie $z=3k$ și $2^k=u$. Ecuația devine $x^3 + 7^y = u^3$ sau

$$(1) (u-x)[(u-x)^2 + 3ux] = 7^y$$

Deoarece 7 nu divide c.m.m.d.c. dintre $u-x$ și $(u-x)^2 + 3ux$, din (1) rezultă:

$$u-x=1 \text{ și } (u-x)^2 + 3ux = 7^y,$$

iar de aici:

$$1 + 3u(u-1) = 7^y,$$

sau încă:

$$(2) 3 \cdot 2^k(2^k - 1) = 7^y - 1.$$

De aici, pentru $k=0$ avem soluția:

$$x=0, y=0, z=0,$$

iar pentru $k=1$ soluția:

$$x=1, y=1, z=3.$$

Pentru $k > 1$ nu mai avem soluții. Într-adevăr, fie $y=2^s m$, cu m impar. Din binom avem:

$$7^y - 1 = (8 - 1)^{2^s m} - 1 = \dots = 2^{s+3} m - 1$$

iar de aici și din (2) rezultă $2^k = 2^{s+3}$, deci $k=s+3$. Avem inegalitățile evidente:

$$2^{2k+2} > 3 \cdot 2^k(2^k - 1) = 7^y - 1 > 2^{2y},$$

de unde $2k+2 > 2y$, deci $k+1 > y$ rezultă $k > y$, adică $s+3 \geq 2^s m$, de unde $s+3 \geq 2^s$ valabilă numai pentru $s=0, 1, 2$, cărora le corespund $k=3, 4, 5$, ce nu mai dau soluții.

4. Ecuația

$$5^x \cdot 7^y + 4 = 3^z. \quad (\text{Olimpiada din Bulgaria})$$

Soluție: Evident x și z nu pot fi simultan nuli. Considerând ecuația modulo 4, dacă $y=0$, sau modulo 7, dacă $y \neq 0$, deducem că z trebuie să fie par, $z=2z_1$ și atunci ecuația se scrie

$$(3^{z_1} - 2)(3^{z_1} + 2) = 5^x \cdot 7^y$$

Cei doi factori din stânga sunt divizibili numai cu puteri ale lui 5 și 7 și cum sunt primi între ei rezultă situațiile:

$$3^{z_1} - 2 = 5^x \text{ și } 3^{z_1} + 2 = 7^y$$

sau

$$3^{z_1} - 2 = 7^y \text{ și } 3^{z_1} + 2 = 5^x,$$

de unde rezultă, relativ ușor, numai soluția:

$$x=1, y=0.$$

5. Rezolvați ecuația

$$3^x 2^y + 1 = z^2. \text{ (D. Acu)}$$

Soluție: Pentru $x=0$ avem $2^y = (z-1)(z+1)$, ceea ce implică $z-1=2$ și soluția:

$$x=0, y=3, z=2.$$

Pentru $y=0$ avem:

$$3^x = (z-1)(z+1),$$

de unde $z-1=1$ și soluția:

$$x=1, y=0, z=2.$$

Fie $x>0, y>0$. Din $(z-1)(z+1) = 3^x 2^y$ avem:

$$z-1 = 2 \cdot 3^x, \quad z+1 = 2^{y-1} \text{ sau:}$$

$$z-1 = 2^{y-1}, \quad z+1 = 2 \cdot 3^x.$$

Primele două implică $1 = 2^{y-2} - 3^x$ și rezultă:

$$y=3, x=0 \text{ sau } x=1, y=4.$$

Ultimele două implică $1 = 3^x - 2^{y-2}$, de unde:

$$x=2, y=5.$$

6. Dacă ar exista numerele naturale x, y, z, n care să verifice ecuația:

$$x^n + y^n = z^n,$$

atunci $x>n, y>n, z>n$. (J.A.Grünert)

Soluție: Într-adevăr, fie $z=x+a, a \geq 1$, atunci:

$$x^n + y^n = x + nx^{n-1}a + \dots + nxa^{n-1} + a^n,$$

și deci $y^n > nx^{n-1}a > nx^{n-1}$. Analog se arată că $x^n > ny^{n-1}$.

Prin urmare:

$$(y^n)^n > n^n x^{n(n-1)} > n^n n^{n-1} (y^{n-1})^{n-1}$$

adică: $y^{2n-1} > n^{2n-1}$, de unde $y>n$. Datorită simetriei $x>n$ și deci $z>n$.

1.5 Metoda divizorilor unei expresii

Este vorba de expresii de forma a^2+b^2 și $a^2\pm 2b^2$, a, b întregi, despre divizorii lor posibili și despre rolul acestora în rezolvarea unor ecuații diofantice.

• Divizori ai expresiilor a^2+b^2

Teorema 1.5.1: Orice factor prim impar al lui a^2+1 este de forma $4m+1$ (și deci nu poate fi de forma $4m+3$)

Demonstrație: Prin absurd. Presupunem $p=4m+3$ și $p/(a^2+1)$. Deci $a^2\equiv -1 \pmod{p}$ și atunci $a^{p-1}=(a^2)^{2m+1}\equiv -1 \pmod{p}$, contrar teoremei lui Fermat.

Analog avem:

Teorema 1.5.2: Dacă $p/(a^2+b^2)$, p prim impar și $(a,b)=1$, atunci $p=4m+1$.

Demonstrație: Prin absurd. Presupunem $p=4m+3$ și $p/(a^2+b^2)$. Deci $a^2\equiv -b \pmod{p}$ ceea ce implică $(a^2)^{2m+1}\equiv -(b^2)^{2m+1} \pmod{p}$ și cum $(a,b)=1$ ne rezultă că $p\nmid a$ și $p\nmid b$ și din teorema lui Fermat avem $a^{p-1}\equiv 1, b^{p-1}\equiv 1 \pmod{p}$, deci $1\equiv -1 \pmod{p}$, fals.

Lema 1.5.3: Dacă $p=4m+3$ și $p/(a^2+b^2)$, atunci p/a și p/b .

Demonstrație: Dacă $(a,p)=1$, atunci $(b,p)=1$ și din teorema lui Fermat avem $a^{p-1}\equiv 1 \pmod{p}$ și $b^{p-1}\equiv 1 \pmod{p}$, iar din $p/(a^2+b^2)$, adică $a^2\equiv -b^2 \pmod{p}$, rezultă ușor că $a^{p-1}\equiv -b^{p-1} \pmod{p}$, adică $1\equiv -1 \pmod{p}$, fals. Deci p/a și p/b .

În rezolvarea unor ecuații se folosesc aceste teoreme astfel:

Observația 1.5.4: Dacă unul dintre membrii ecuației se poate scrie sub forma x^2+a^2 , cu $(x,a)=1$, iar celălalt are un divizor de forma $4m+3$, atunci ecuația nu are soluții întregi.

Exemplul 1.5.5: Ecuația:

$$x^3+7=y^2$$

nu are soluții în numere întregi. (V.A. Lebesgue)

Demonstrație: Într-adevăr, cum evident x este impar, $x=2m+1$, și cum ecuația se mai scrie:

$$y^2+1=x^3+2^3=(x+2)[(x-1)^2+3],$$

ar trebui ca $4m^2+3$ să dividă pe y^2+1 . Dar $4m^2+3$ are un divizor prim de forma $4k+3$.

Exemplul 1.5.6: În numere naturale impare, ecuația

$$x^n+2^{n-1}=y^2, \quad n>1.$$

nu are soluții. (I. Cucurezeanu)

Demonstrație: Cheia rezolvării ecuației constă în observația simplă, dar esențială că ea se mai poate scrie sub forma:

$$x^n + 2^n = y^2 + 2^{n-1}.$$

Membrul stâng al acestei ecuații are un divizor prim de forma $4m+3$, fiindcă dacă x este de această formă, atunci divizorul prim este de această formă, iar dacă x este de forma $4m+1$, atunci $x+2$, care divide x^n+2^n , este de forma $4m+3$. Dar un divizor de forma $4m+3$ nu poate divide o sumă de două pătrate y^2+2^{n-1} prime între ele.

Amintim și următoarele:

Observația 1.5.7: Orice număr de forma $4m+3$ are cel puțin un factor prim de aceeași formă. Resturile minime în valoare absolută la împărțirea prin 8 ale oricărui întreg impar, n , sunt ± 1 și ± 3 . Deci, el are una din formele: $n=8m-3$, $n=8m-1$, $n=8m+1$, $n=8m+3$. Dacă $n=4k+1$, atunci $n=8m+1$ sau $n=8m-3$ și dacă $n=4k+1$, atunci $n=8m-1$ sau $n=8m+3$.

Definiția 1.5.8: Fie p prim m par, a un întreg prim cu p și congruența $x^2 \equiv a \pmod{p}$. Dacă această congruență nu are soluții, atunci a se numește rest pătratic modulo p , iar în caz contrar nerest pătratic.

Notăția 1.5.9: Notăm cu: $\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } a \text{ este rest patratric;} \\ -1, & \text{dacă } a \text{ este nerest patratric.} \end{cases}$

Numărul $\left(\frac{a}{p}\right)$ se numește simbolul lui Legendre.

$$\begin{aligned} \text{Avem} \quad \left(\frac{1}{p}\right) &= 1, & \left(\frac{-1}{p}\right) &= (-1)^{\frac{p-1}{2}}, \\ \left(\frac{2}{p}\right) &= (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}, & \left(\frac{-2}{p}\right) &= \left(\frac{-1}{p}\right) \left(\frac{2}{p}\right). \end{aligned}$$

Lema 1.5.10 (Axel Thue): Dacă $n > 1$ este întreg și a prim cu n , atunci există numerele întregi x și y , cu $0 < x, y < \sqrt{n}$, astfel încât $n \mid (ax \pm y)$, pentru o alegere convenabilă a semnelui $+$ sau $-$.

Demonstrație: Fie e cel mai mic întreg mai mare decât $\sqrt{n}$, $e = [\sqrt{n}] + 1$. Considerăm toate cele e^2 numere de forma $ax+y$, unde $x, y \in \{0, 1, \dots, e-1\}$. Deoarece $e^2 > n$, conform principiului lui Dirichlet, există două dintre numerele $ax_1+y_1 \neq ax_2+y_2$ care să dea același rest la împărțirea prin n , adică $a(x_1-x_2) \equiv y_2-y_1 \pmod{n}$. Notăm $x = x_1-x_2$ și $y = y_2-y_1$. Deci $ax \equiv \pm y \pmod{n}$.

- Divizori ai expresiilor a^2+2b^2

Teorema 1.5.11: Numărul prim impar p se scrie sub forma $p=a^2+2b^2$, a, b întregi, dacă și numai dacă p este de forma $p=8m+1$ sau $p=8m+3$.

Demonstrație: Într-adevăr, dacă $p=a^2+2b^2$, atunci $a^2 \equiv -2b^2 \pmod{p}$. Fie b' astfel încât $bb' \equiv 1 \pmod{p}$, deci $(ab')^2 \equiv -2 \pmod{p}$ și deci $\left(\frac{-2}{p}\right) = 1$, unde $\left(\frac{2}{p}\right)$ este simbolul lui

Legendre. Deducem de aici că:

$$\left(\frac{-2}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = 1,$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\frac{p-1}{2} + \frac{p^2-1}{8} = 2k \Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod{8} \text{ sau } p \equiv 3 \pmod{8}.$$

Reciproc, dacă $p \equiv 1 \pmod{8}$ sau $p \equiv 3 \pmod{8}$, atunci $\left(\frac{-2}{p}\right) = 1$ și deci există a întreg astfel încât $a^2 \equiv -2 \pmod{p}$. Din lema A. Thue rezultă că există numerele întregi x și y , cu $0 < x, y < \sqrt{n}$, astfel încât $p | a^2 x^2 - y^2$, adică $p | (a^2 + 2)x^2 - (2x^2 + y^2)$ și cum $p | a^2 + 2$, rezultă că:

$$2x^2 + y^2 = pk, \quad 0 < 2x^2 + y^2 < 3p \quad \text{și deci } k \in \{1, 2\}.$$

$$\text{Pentru } k=1 \text{ rezultă } p = 2x^2 + y^2.$$

$$\text{Pentru } k=2 \text{ rezultă } 2p = 2x^2 + y^2, \text{ deci } y = 2y_1 \text{ și } p = 2x^2 + y_1^2.$$

Lema 1.5.12: Dacă numărul prim p este de forma $p=8m-1$ sau $p=8m-3$ și $p | a^2 + 2b^2$, atunci p/a și p/b .

Demonstrație: Prin absurd, dacă $p \nmid a$, atunci $p \nmid b$ și există b' întreg astfel încât $bb' \equiv 1 \pmod{p}$.

Cum $a^2 \equiv -2b^2 \pmod{p}$ rezultă $(ab')^2 \equiv -2 \pmod{p}$, și cum $(ab', p) = 1$ rezultă $\left(\frac{-2}{p}\right) = 1$ ceea ce

implică $p \equiv 1$ sau $3 \pmod{p}$, contradicție.

În rezolvarea unor ecuații în numere întregi, acestea se folosesc astfel:

Observația 1.5.13: Dacă unul dintre membrii ecuației se poate scrie sub forma $x^2 + 2y^2$ cu $(x, y) = 1$, iar celălalt membru are un factor prim de forma $8m-1$ sau $8m-3$, atunci ecuația nu are soluții întregi.

Exemplul 1.5.14: Ecuația

$$x^3 - 3 = 2y^2$$

nu are soluții în numere întregi. (I. Cucurezeanu)

Demonstrație: Scriem ecuația sub formele echivalente:

$$(i) x^3 - 1 = 2(y^2 + 1)$$

$$(ii) x^3 + 1 = 2(y^2 + 2)$$

și observăm că membrul drept al lor se divide cel mult cu 4 (și nu cu o putere mai mare a lui 2). Dar x impar are una din formele $x = 8m \pm 1$ sau $x = 8m \pm 3$. Pentru $x = 8m + 1$ membrul stâng din (i) se divide cel puțin cu 8, iar pentru $x = 8m - 1$ același lucru se întâmplă cu cel din (ii). Pentru $x = 8m \pm 3$, să observăm că $x^2 - x + 1$, care ar trebui să dividă pe $y^2 + 2$, conform cu (ii), este de forma $8M - 1$ sau $8M - 3$ și are un divizor prim de aceeași formă, care nu poate divide pe $y^2 + 2$.

• **Divizori ai expresiilor $a^2 - 2b^2$**

Teorema 1.5.15: Numărul prim p impar se scrie sub forma $p = a^2 - 2b^2$, a, b întregi, dacă și numai dacă p este de forma $p = 8m + 1$ sau $p = 8m - 1$ (deci nu poate fi de forma $p = 8m \pm 3$).

Demonstrație: Într-adevăr, dacă $p = a^2 - 2b^2$, atunci $a^2 \equiv 2b^2 \pmod{p}$. Fie b' astfel încât $bb' \equiv 1 \pmod{p}$, deci $(ab')^2 \equiv 2 \pmod{p}$ și deci $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$, unde $\left(\frac{2}{p}\right)$ este simbolul lui Legendre.

Dar $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = 1$ dacă și numai dacă $p \equiv 1 \pmod{8}$ sau $p \equiv -1 \pmod{8}$.

Reciproc, dacă $p \equiv 1 \pmod{8}$ sau $p \equiv -1 \pmod{8}$, atunci $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$ și deci există a întreg astfel

încât $a^2 \equiv 2 \pmod{p}$. Din lema A. Thue rezultă că există numerele întregi x și y , cu $0 < x, y < \sqrt{p}$, astfel încât $p \mid a^2 x^2 - y^2$, de unde $p \mid (a^2 - 2)x^2 + 2x^2 - y^2$ și cum $p \mid a^2 - 2$, rezultă că $p \mid 2x^2 - y^2$, deci

$$0 < 2x^2 - y^2 < 2p,$$

$$2x^2 - y^2 < 2p, \text{ deci}$$

$$p = 2x^2 - y^2.$$

Lema 1.5.16: Dacă numărul prim p este de forma $p = 8m - 3$ sau $p = 8m + 3$ și atunci $p \nmid a$ și $p \nmid b$.

Demonstrație: Prin absurd, dacă $p \mid a$, atunci $p \nmid b$ și există b' întreg astfel încât $bb' \equiv 1 \pmod{p}$. Cum $a^2 \equiv 2b^2 \pmod{p}$ rezultă $(ab')^2 \equiv 2 \pmod{p}$, și cum $(ab', p) = 1$ rezultă

$\left(\frac{2}{p}\right) = 1$, deci $p = 8m + 1$ sau $p = 8m - 1$, contradicție.

În rezolvare unor ecuații se folosesc aceste teoreme astfel:

Observația 1.5.17: Dacă unul dintre membrii ecuației se poate scrie sub forma $x^2 - 2a^2$ cu $(x, a) = 1$, iar celălalt un factor prim de forma $8m - 3$ sau $8m + 3$, atunci ecuația nu are soluții întregi.

Exemplul 1.5.18: Ecuația

$$x^n - 2^{2n-1} = y^2, n > 2$$

nu are soluții în numere întregi. (I. Cucurezeanu)

Demonstrație: Cazul n par este banal, având de considerat o diferență de pătrate. Fie n impar. Mai întâi, x impar. Pentru $x=8m-1$ sau $x=8m\pm3$ ecuația este imposibilă modulo 8. Pentru $x=8m+1$, o scriem sub forma $x^n - 4^n = y - 2 \cdot 4^{n-1}$ și $x-4=8m+3$ are un divizor prim de forma $8k+3$ care nu poate însă divide membrul drept al ecuației. În fine, pentru x par ecuația revine la $2x_1^n - 1 = 2y_1^2$, evident fără soluții.

Deosebit de utilă este și următoarea:

Lema 1.5.19: Fie a și x două numere întregi prime între ele, $x+a \neq 0$, p prim impar. Atunci

$$x+a, \frac{x^p + a^p}{x+a} = 1 \text{ sau } p.$$

Demonstrație: Fie $x+a=dq$ și $\frac{x^p + a^p}{x+a} = dQ$, cu $d = x+a, \frac{x^p + a^p}{x+a}$. Avem:

$$\begin{aligned} \frac{x^p + a^p}{x+a} &= x^{p-1} - ax^{p-2} + \dots + a^{p-1} = \\ &= a(dq-a)^{p-1} - a(dq-a)^{p-2} + \dots + a^{p-1} = \pi d + pa^{p-1} = dQ \end{aligned}$$

iar de aici $d|pa^{p-1}$. Dar $(d,a)=1$, fiindcă în caz contrar, din $x+a=dq$ și $(a,x)=1$, ar rezulta o contradicție. Deci d/p și atunci $d=1$ sau $d=p \cdot \hat{a}$

Exemplul 1.5.20: Ecuația

$$x^7 + 2 = y^2$$

nu are soluții în numere întregi. (I. Cucurezeanu)

Demonstrație: Într-adevăr, să observăm mai întâi că y trebuie să fie par și apoi că $x \neq 4k-1$. Pentru $x=4k+1$ scriem ecuația sub forma

$$x^7 + 2^7 = y^2 + 11^2$$

și observăm că dacă $11 \nmid y$, atunci $x+2$, care divide membrul stâng este de forma $4k+3$ și nu poate divide suma de pătrate $y^2 + 11^2$, prime între ele. Dacă $11 \mid y$, atunci $y=11y_1$, scriem ecuația sub forma:

$$(x+2) \frac{x^7 + 2^7}{x+2} = 11^2 (y_1^2 + 1)$$

și cum $(x+2), \frac{x^7 + 2^7}{x+2} = 1$ sau 7, unul dintre cei doi factori ai membrului stâng nu se divide cu 11 și cum ambii membri sunt de forma $4k+3$, unul din ei nu divide pe $y_1^2 + 1$.

1.6 Probleme

1. Ecuația

$$4xy - x - y = z^2$$

nu are soluții în numere întregi pozitive, dar are o infinitate de soluții în numere întregi negative. (L. Euler)

Demonstrație: Ecuația se mai scrie:

$$(4x-1)(4y-1) = (2z)^2 + 1$$

și întregul pozitiv $4x-1 \geq 3$ are un factor prim de forma $4k-3$, ce nu poate divide suma de pătrate din membrul drept. Pe de altă parte, numerele întregi negative:

$$x = -1, y = -5n^2 - 2n, z = -5n - 1,$$

cu n natural arbitrar, verifică ecuația.

2. Ecuația

$$8xy - x - y = z^2$$

nu are soluții în numere întregi pozitive, dar are o infinitate de soluții în numere întregi negative. (***)

Demonstrație: Ecuația se mai scrie

$$(8x-1)(8y-1) = 8z^2 + 1.$$

Cum întregul pozitiv $8x-1 \geq 7$ are un factor prim de forma $8m-1$ sau de forma $8m-3$ (fiindcă putem avea $8x-1 = (8m-1)(8k+1)$ sau $8x-1 = (8m-3)(8k+3)$, iar acesta nu poate divide pe $2(2z)^2 + 1$. Numerele întregi negative

$$x = -1, y = -9n^2 - 2n, z = -9n - 1,$$

cu n natural arbitrar, verifică ecuația.

3. Ecuația

$$x^3 - 3 = y^2$$

nu are soluții în numere întregi. (***)

Demonstrație: Evident $x \neq 2k$ și $x \neq 4k+1$.

Pentru $x = 4k-1$ scriem ecuația sub forma

$$x^3 + 1 = y^2 + 4$$

sau

$$(x+1)(x^2 - x + 1) = y^2 + 4$$

și observăm că x^2-x+1 are un factor prim de forma $4m+3$ care nu poate divide membrul drept.

4. Ecuația

$$x^3-5=y^2$$

nu are soluții în numere întregi.

Demonstrație: Evident x nu poate fi par sau de forma $4m-1$, fiindcă $y^2 \equiv 1 \pmod{8}$. Pentru $x=4m+1$ scriem ecuația sub forma

$$x^3-1=y^2+4$$

sau

$$(x+1)(x^2+x+1)=y^2+4$$

și x^2-x+1 are un factor prim de forma $4m+3$ care nu poate divide suma de pătrate y^2+4 . Avem $x^p-5 \not\equiv y^2$, pentru $p=4m+3$.

5. Ecuația

$$x^3-6=y^2$$

nu are soluții în numere întregi.

Demonstrație: Evident x este impar. Pentru $x=8m \pm 3$ sau $x=8m+1$, ecuația este imposibilă mod 8. Pentru $x=8m-1$, scriem ecuația sub forma:

$$x^3-2^3=y^2-2$$

și observăm că membrul stâng, care se divide cu $x-2$, are un factor prim de forma $8k-3$ sau $8k+3$.

6. Ecuația

$$x^3+6=y^2$$

nu are soluții în numere întregi.

Demonstrație: Evident $x \not\equiv 2k$ și $x \not\equiv 2k+1$. Fie $x=4k-1$, adică $x=8k-1$ sau $x=8k+3$. Ecuația se mai scrie

$$x^3+8=y^2+2$$

sau

$$(x+2)(x^2-2x+4)=y^2+2.$$

Pentru $x=8k+3$ avem $x^2-2x+4=8m-1$.

Pentru $x=8k-1$ avem $x^2-2x+4=8m-1$.

7. Ecuația

$$x^3 + 7 = y^2$$

nu are soluții în numere întregi. (***)

Demonstrație: Rezultă din $(x+2)(x^2-2x+4)=y^2+1$.

8. Ecuația

$$x^3 - 9 = y^2$$

nu are soluții în numere întregi. (***)

Demonstrație: Evident $x \neq 2k$ și $x \neq 4k-1$. Pentru $x=4k+1$ scriem ecuația astfel:

$$x^3 + 3^3 = y^2 + 6^2$$

sau

$$(x+3)(x^2-3x+9)=y^2+6^2$$

și x^2-3x+9 care este de forma $4M+3$, nu poate divide y^2+6^2 , pentru $(y,3)=1$. În cazul $3|y$, $y=3v$, rezultă $3|x$, $x=3u$ și ecuația devine $3u^3=v^2+1$, dar $3 \nmid v^2+1$.

9. Ecuația

$$x^3 - 10 = y^2$$

nu are soluții în numere întregi. (***)

Demonstrație: Evident x impar și deci y impar și atunci modulo 8 (ținând seama că $y^2 \equiv 1 \pmod{8}$) rezultă că $x \neq 8k \pm 1$ și $x \neq 8k-3$. Pentru $x=8k+3$ scriem ecuația sub forma

$$x^3 + 2^3 = y^2 + 2 \cdot 3^2$$

și observăm că $x+2$, care divide membrul stâng, are un divizor prim ce nu divide membrul drept, dacă $(y,3)=1$. Reamintim că o expresie de forma a^2+2b^2 , cu $(a,b)=1$, nu poate avea divizori primi de forma $8m-1$ sau $8m-3$. Rămâne cazul $3|y$, $y=3u$ și ecuația se scrie:

$$(x+2)(x^2-2x+4)=9(u^2+2)$$

și cum $(x+2, x^2-2x+4)=3$ avem $3|(x+1)$, iar de aici și din $x=8k+3$ rezultă că $x+2$ este de forma $x+2=3(8t-1)$. Dar acest $8t-1$ nu poate divide pe u^2+2 .

10. Ecuația

$$x^3 + 10 = y^2$$

are soluție unică $x=1$. (***)

Demonstrație: Evident $x \neq 2k$ și $x \neq 4k-1$. Rămâne $x=4k+1$ adică $x=8m+3$ sau $x=8m-1$. Pentru $x=8m+3$, ecuația este imposibilă modulo 8. Pentru $x=8m-1$ scriem ecuația sub forma:

$$(i) x^3 - 2^3 = y^2 + 2 \cdot 3^2.$$

Dar pentru $(y, 3) = 1$ membrul drept din (i) nu poate avea un factor de forma $8t \pm 3$. Dar $x-2$, care divide membrul stâng din (i), trebuie să fie diferit de $8t-3$, deci $x \neq 8m-1$. Pentru $3|y$, $y=3u$, relația (i) devine

$$x^3 - 2^3 = 9(u^2 - 2).$$

Dar pentru $x=8m-1$, $x-2$ nu poate divide pe u^2-2 și atunci $(x-2) \nmid 9$, iar de aici și din $x=8m-1$ rezultă $x=-1$.

11. Ecuația

$$x^3 + 11 = y^2$$

nu are soluții în numere întregi. (***)

Demonstrație: Evident $x \neq 2k$ și $x \neq 4k-1$. Pentru $x=4k+1$, scriem ecuația sub forma

$$x^3 + 3^3 = y^2 + 4^2$$

sau

$$(x+3)(x^2-3x+9) = y^2 + 4^2$$

și observăm că x^2-3x+9 , care divide membrul stâng, este de forma $4M+3$. Însă ecuația $x^3-11=y^2$ are soluții pentru $x=3$ și $x=15$.

12. Ecuația

$$x^3 - 12 = y^2$$

nu are soluții în numere întregi. (***)

Demonstrație: Pentru x impar, scriem ecuația sub forma

$$x^3 - 2^3 = y^2 + 4$$

și observăm că x^2+2x+4 , care divide membrul drept, are un factor prim de forma $4m+3$ (fiindcă x este impar), ce nu poate divide membrul drept. Pentru x par, $x=2x_1$ rezultă și y par, $y=2y_1$ și ecuația devine

$$x_1^3 - 3 = y_1^2,$$

care este imposibilă modulo 8. În schimb, ecuația $x^3+12=y^2$ are soluții $13^3+12=47^2$.

13. Ecuația

$$x^3 + 13 = y^2$$

nu are soluții în numere întregi.

Demonstrație: Evident $x \neq 2k$ și $x \neq 4k+1$. Pentru $x=4k-1$, scriem ecuația sub forma

$$x^3 + 17^3 = y^2 + 70^2$$

sau

$$(x+17)(x^2 - 17x + 17^2) = y^2 + 70^2$$

și observăm că numărul din a doua paranteză este de forma $4M+3$ și are un factor prim de aceeași formă, care nu poate divide suma de pătrate din membrul drept.

14. Ecuația

$$x^3 + 14 = y^2$$

nu are soluții în numere întregi. (***)

Demonstrație: Evident x impar. Pentru $x \neq 8k \pm 1$ sau $x = 8k \pm 3$ scriem ecuația sub forma

$$x^3 + 4^3 = y^2 + 2 \cdot 5^2$$

sau

$$(x+4)(x^2 - 4x + 16) = y^2 + 2 \cdot 5^2$$

și cum cei doi factori din membrul stâng au divizori de forma $8M-1$ sau $8M-3$, iar c.m.m.d.c. al lor este 1 sau 3 se încheie demonstrația.

15. Ecuația

$$x^3 - 14 = y^2$$

nu are soluții în numere întregi. (***)

Demonstrație: Evident x impar. Pentru $x = 8m + 1$ sau $x = 8k \pm 3$, ecuația este imposibilă în mod

8. Pentru rezolvarea cazului $x = 8m - 1$ scriem ecuația sub forma

$$x^3 - 4^3 = y^2 - 2 \cdot 5^2$$

și observăm că membrul stâng, care se divide cu $x-4$, are un factor prim de forma $8m \pm 3$ care

nu poate divide membrul drept, dacă $(y, 5) = 1$. Pentru $5 | y$, $y = 5y_1$, deoarece $x - 4, \frac{x^3 - 4^3}{x - 4} = 1$

sau 3, atunci unul dintre cei doi factori ai membrului stâng al ecuației

$$(x-4) \cdot \frac{x^3 - 4^3}{x-4} = 5^2 (y_1^2 - 2)$$

are un divizor prim diferit de 5, de forma $8m \pm 3$, care nu poate divide pe $y_1^2 - 2$.

16. Ecuația

$$x^3 - 16 = y^2$$

nu are soluții în numere întregi. (***)

Demonstrație: Evident x impar. Evident $x \neq 4m-1$. Pentru $x=4m+1$, adică $x=8k+1$ sau $x=8k-3$, scriem ecuația sub forma

$$x^3-2^3=y^2+8$$

sau

$$(x-2)(x^2+2x+4)=y^2+2 \cdot 2^2$$

și observăm că membrul stâng are un factor prim de forma $8t-1$ sau $8t-3$ care nu poate divide membrul drept. Pentru x par trebuie să avem $x=4u$, $y=4v$ și ecuația devine

$$4u^3-1=v^2,$$

care mod 4 nu are soluții întregi.

17. Ecuația

$$x^3+16=y^2$$

are, în numere întregi, numai soluția $x=0$. (***)

Demonstrație: Fie mai întâi x impar. Rezultă $x \neq 4m-1$, adică $x \neq 8k-1$ și $x \neq 8k-3$. Scriem apoi ecuația sub forma

$$x^3+2^3=y^2+8$$

sau

$$(x+2)(x^2-2x+4)=y^2+2 \cdot 2^2$$

și din prima paranteză rezultă $x \neq 8k+1$, iar din a doua $x \neq 8k-3$. Pentru x par trebuie ca $x=4u$, $y=4v$ și ecuația devine

$$4u^3+1=v^2,$$

de unde rezultă

$$v+1=2m^3, v-1=2n^3, mn=u,$$

ceea ce implică

$$m^3-n^3=1,$$

de unde

$$m-n=1 \text{ și } m^2+mn+n^2=1$$

sau

$$m^2+m(m-1)+(m-1)^2=0$$

și rezultă că

$$m^2-m=0, \text{ de unde } u=0, v^2=0, \text{ deci } x=0.$$

18. Ecuația

$$x^3 - 17 = y^2$$

nu are soluții în numere întregi. (***)

Demonstrație: Evident $x \neq 2k$ și $x \neq 4k-1$. Pentru $x=4k+1$, scriem ecuația sub forma

$$x^3 - 1 = y^2 + 4^2$$

sau

$$(x-1)(x^2+x+1) = y^2 + 4^2$$

și observăm că x^2+x+1 este de forma $4M+3$. Raționamentul se păstrează și în cazul ceva mai general, $x^n - 17 = y^2$, când n este de forma $4M+3$.

19. Ecuația

$$x^3 + 19 = y^2$$

are, în numere întregi, soluția unică $5^3 + 19 = 12^2$. (***)

Demonstrație: Evident $x \neq 2k$ și $x \neq 4k-1$. Fie $x=4k+1$, adică $x=8m+1$ sau $x=8m-3$. Pentru $x=8k+1$ scriem ecuația sub forma

$$x^3 + 3^3 = y^2 + 2 \cdot 2^2$$

și observăm că x^2-3x+9 , care divide membrul stâng, este de forma $8M-1$ și nu poate divide membrul drept, care are numai divizori impari de forma $8M+1$ sau $8M+3$. Deci $x \neq 8M+1$. Fie $x=8m-3$. Pentru m par, $x^3+19=8(2M-1) \neq y^2$. Pentru m impar, $m=2q+1$, iar $x=16q+5$ scriem ecuația astfel

$$x^3 + 1 = y^2 - 2 \cdot 3^2$$

și $x+1=2(8q+3)$ nu poate divide membrul drept, dacă $(y,3)=1$, acesta având factorii impari numai de forma $8M \pm 1$. Deci $3|y$, $x=3v$ și avem $x^3+1=9(v^2-2)$. Deoarece trebuie ca $x+1=2(8q+3)$ să dividă membrul drept, iar $(8q+3) \nmid (v^2-2)$, rezultă $(8q+3) \nmid 9$, de unde rezultă $q=0$ și $x=5$.

20. Ecuația

$$x^3 - x^2 + 8 = y^2$$

nu are soluții în numere întregi. (I. Cucurezeanu)

Demonstrație: Pentru x impar o scriem astfel:

$$(x+2)(x^2-2x+4) = x^2 + y^2.$$

Evident $x \neq 4k+1$ și $x \neq 4k-1$, fiindcă $(x,y)=1$ și $(4m+3) \nmid (x^2+y^2)$. Pentru x par, $x=2u$, avem:

$$8u^3 - 4u^2 + 8 = y^2 \text{ sau}$$

$$2u^3 - u^2 + 2 = z^2, \text{ cu } x=2z.$$

Pentru u par membrul stâng este de forma $4M+2$, iar pentru u impar de forma $4M+3$, care nu pot fi pătrate perfecte.

21. Rezolvați ecuația:

$$x^3+3=4y(y+1). (***)$$

Soluție: Scriem ecuația sub forma:

$$x^3+8=(2y+1)^2+4.$$

Evident x impar. Pentru $x=4m-1$, membrul stâng al ecuației, care este de această formă, are un factor prim de forma $4m+3$, care nu poate divide membrul drept. Pentru $x=4m+1$ observăm că $(x+2) \mid (x^3+8)$ și analog.

22. Ecuația:

$$x^3-11=2y^2$$

nu are soluții în numere întregi. (***)

Demonstrație: Evident x impar. Scriem ecuația sub forma

$$x^3-3^3=2y^2-16$$

sau

$$(x-3)(x^2+3x+9)=2y^2-4^2$$

și cum o expresie de forma a^2-b^2 nu poate avea divizori primi de forma $8m+3$ sau $8m-3$ din a doua paranteză rezultă că $x \neq 8k+1$ și $x \neq 8k+3$. Scriem ecuația sub forma

$$x^3-15^3=2y^2-58$$

sau

$$(x-15)(x^2+15x+15^2)=2y^2-58^2$$

și din ultima paranteză rezultă că $x \neq 8k-1$ și $x \neq 8k-3$.

23. Rezolvați ecuația

$$x^5+3=y^2. (***)$$

Soluție: Modulo 8 rezultă y impar. Apoi rezultă că $x \neq 4k+3$, căci altfel nu poate divide suma de pătrate y^2+4 . Pentru $x=4k+1$ scriem ecuația sub forma

$$x^5+2^5=y^2+6^2$$

și observăm că $3 \nmid y$, atunci $x+2$, care divide membrul stâng, este de forma $4k+3$, iar dacă $3 \mid y$,

$y=3y_1$ și cum $x+2, \frac{x^5+2^5}{x+2} = 1 \text{ sau } 5$, unul din cei doi factori ai membrului stâng nu se divide

cu 3 și cum ambii membrii sunt de forma $4k+3$, aceasta nu poate divide suma y^2+2^2 . (Balkan Math. Olympiad, 1998)

24. Ecuația

$$x^5-9=y^2$$

nu are soluții în numere întregi. (***)

Demonstrație: Evident x impar (fiindcă în caz contrar membrul stâng al ecuației este de forma $8M-1$ dar $y^2=8k+1$). Apoi $x \neq 4m-1$, fiindcă în caz contrar membrul stâng este de forma $2(2m+1)$. Pentru $x=4k+1$, adică $x=8m+1$ sau $x=8m-3$, scriem ecuația sub forma

$$x^5-1=y^2+2 \cdot 2^2$$

și observăm că membrul stâng se divide cu

$$\frac{x^5-1}{x-1} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 1$$

și că acesta este de forma $8M-3$, pentru $x=8m+1$ sau $x=8m-3$. Dar $8M-3$ are un factor prim de forma $p=8m-3$ sau de forma $p=8m-1$, care nu poate divide membrul drept.

25. Ecuația

$$x^5+30=y^2$$

nu are soluții în numere întregi. (***)

Demonstrație: Evident x impar și $x \neq 4k+1$, adică $x \neq 8m+1$, $x \neq 8m-3$. Scriem apoi ecuația sub forma

$$x^5 2^5 = y^2 - 2$$

sau

$$(x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)=y^2+2$$

și din prima paranteză rezultă $x \neq 8m+3$, iar din a doua $x \neq 8m-1$.

26. Ecuația

$$x^5+36=y^2$$

nu are soluții în numere întregi. (A. Makowski)

Demonstrație: Se constată, modulo 16, că x trebuie să fie impar. Fie $x=2m+1$ și atunci $y=4k+1$. Cum ecuația se mai scrie

$$x^2+4=y^2-2^5$$

rezultă că $(y-2) \mid (x^2+4)$ și cum $y-2$ este de forma $4m+3$, iar $(x,4)=1$, acest lucru este imposibil. Makowski semnalează și cazul mai general

$$x^2 + 4(2^{2n-1} + 1) = y^{2n+1}, n \geq 2,$$

cu rezolvare analoagă.

27. Ecuația

$$x^2 + 2^{2k} + 1 = y^3, k \geq 1$$

nu are soluții în numere întregi. (L. Aubry)

Demonstrație: Pentru x impar, membrul stâng al ecuației este de forma $4M+2$, deci este diferit de y^3 . Pentru x par, $x=2^\alpha q$, q impar, scriem ecuația sub forma:

$$2^{2\alpha} q^2 + 2^{2k} = (y-1)(y^2 + y + 1).$$

Dar y , care trebuie să fie impar nu poate fi de forma $4m+3$, fiindcă atunci membrul drept al ultimei egalități se divide numai cu 2, iar cel stâng cel puțin cu 4. Deci $y=4m+1$ și atunci $y^2 + y + 1$ are un factor prim de forma $4m+3$, care nu poate divide membrul stâng.

2 Metoda inegalităților

2.1 Considerațiuni teoretice

În rezolvarea unor ecuații în numere întregi un rol important îl joacă utilizarea unor inegalități, ca de exemplu, inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică, pentru micșorarea intervalului de valori posibile ale necunoscutelor sau, uneori, chiar pentru rezolvarea ecuației.

Câteodată, cerința ca soluțiile unei ecuații să fie în numere întregi pozitive sugerează aplicarea inegalității mediilor.

Exemplul 2.1.1: Ecuația

$$x^3 + y^3 + z^3 = mxyz$$

nu are soluții în numere întregi pozitive, pentru $m=1$ și $m=2$, iar pentru $m=3$ are soluțiile:

$$x=y=z=n,$$

cu n natural arbitrar. (***)

Soluție: Din inegalitatea mediilor rezultă $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$, cu egalitate numai pentru $x=y=z$, de unde afirmația din enunț.

Câteodată, pentru a arăta că o expresie nu este pătrat sau cub perfect, o încadrăm între două pătrate sau cuburi consecutive.

Exemplul 2.1.2: Ecuațiile

$$x^6 + ax^4 + bx^2 + c = y^3,$$

unde $a \in \{3, 4, 5\}$, $b \in \{4, 5, \dots, 12\}$, $c \in \{1, 2, \dots, 8\}$, nu au soluții în numere întregi. (Dorin Andrica)

Demonstrație: Condițiile date implică:

$$x^6 + 3x^4 + 2x^2 + 1 < y^3 < x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8,$$

adică:

$$(x^2 + 1)^3 < y^3 < (x^2 + 2)^3,$$

ceea ce arată că fiecare din ecuațiile considerate nu au soluții.

Uneori, pentru a determina valorile variabilelor pentru care o expresie este pătrat perfect (adică pătratul unui număr întreg), o încadrăm pe aceasta între două pătrate apropiate.

Exemplul 2.1.3: Rezolvați ecuația

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x(z-1) + 2y(z+1) = w^2$$

în numere întregi pozitive. (Titu Andreescu)

Soluție: Avem:

$$(x+y+z\pm 1)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x(z\pm 1) + 2y(z\pm 1) \pm 2z + 1$$

de unde inegalitățile:

$$(x+y+z-1)^2 < w^2 < (x+y+z+1)^2.$$

Deci expresia din enunț poate fi egală numai cu $(x+y+z)^2$. Aceasta implică $x=y$ și soluțiile căutate sunt $(m, m, n, 2m+n)$, $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Uneori, nu putem încadra direct o expresie între două pătrate de întregi, dar o putem încadra pe aceasta înmulțită cu un factor care să fie pătrat.

Exemplul 2.1.4: Rezolvați ecuația

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2$$

în numere întregi. (T. H. Gronwall)

Soluție: Pentru $x=0$ avem $y = \pm 1$. Pentru $x \neq 0$ înmulțim ecuația cu 4 și avem:

$$(2x^2 + x)^2 < (2y)^2 < (2x^2 + x + 2)^2,$$

iar din această dublă inegalitate rezultă:

$$4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 = (2x^2 + x + 1)^2,$$

de unde ecuația:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

cu soluțiile $x = -1$ și $x = 3$, cărora le corespund

$$y = \pm 1 \text{ și respectiv } y = \pm 11.$$

Uneori, când se cere ca o expresie de forma $A^2 - 4B$, cu $A, B > 0$, să fie pătrat perfect, este util să folosim inegalitatea:

$$A^2 - 4B \leq (A-2)^2$$

rezultând din aceea că expresia trebuie să fie un pătrat mai mic decât A^2 și de aceeași paritate.

Exemplul 2.1.5: Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi exprimate prin numere întregi.

Dacă ecuația:

$$x^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + 1)x + ab + bc + ca = 0,$$

are rădăcini întregi, atunci triunghiul este echilateral. (I. Cucurezeanu)

Soluție: Dacă ecuația are rădăcini întregi, atunci:

$$(a^2 + b^2 + c^2 + 1)^2 - 4(ab + bc + ca)$$

este pătrat perfect mai mic decât $(a^2 + b^2 + c^2 + 1)^2$ și de aceeași paritate cu $a^2 + b^2 + c^2 + 1$. Deci:

$$(a^2 + b^2 + c^2 + 1)^2 - 4(ab + bc + ca) \leq (a^2 + b^2 + c^2 - 1)^2,$$

de unde (trecând termenul din dreapta în stânga și transformând diferența de pătrate) rezultă:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 1 \leq ab + bc + ca$$

sau

$$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \leq 0,$$

iar de aici $a=b=c$, deci triunghiul are toate laturile de aceeași lungime, prin urmare este un triunghi echilateral.

2.2 Probleme

1. În numere întregi, ecuația

$$(x+1)^4 - (x-1)^4 = y^3$$

are numai soluția $x=0, y=0$. (Olimpiada australiană)

Rezolvare: Avem:

$$(x+1)^4 - (x-1)^4 = 8x^3 + 8x.$$

Presupunem că x, y este o soluție, cu $x \geq 1$. Din:

$$(2x)^3 \leq 8x^3 + 8x \leq (2x+1)^3$$

rezultă că $2x < y < 2x+1$, ceea ce nu este posibil. Deci, pentru fiecare soluție x, y , avem $x \leq 0$. Să observăm însă acum că dacă x, y este o soluție atunci și $-x, -y$ este o soluție, deci $-x \leq 0$, de unde $x=0, y=0$.

2. Să se rezolve în numere întregi pozitive ecuația

$$(x+y)^2 + 3x + y + 1 = z^2. \text{ (Olimpiada română)}$$

Soluție: Inegalitățile:

$$(x+y)^2 < (x+y)^2 + 3x + y + 1 < (x+y+2)^2$$

implică:

$$(x+y)^2 + 3x + y + 1 = (x+y+2)^2,$$

de unde $x=y$ și toate soluțiile sunt $(k, k, 2k+1)$, $k \in \mathbb{N}$.

3. Rezolvați ecuația

$$x^4 + x^3 + x^2 + x = y^2 + y$$

în numere întregi. (***)

Soluție: Pentru a forma în partea dreaptă un pătrat, înmulțim ecuația cu 4 și adunăm 1:

$$4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = (2y+1)^2.$$

Apoi, observăm că:

$$(2x^2+1)^2 < (2y+1)^2 < (2x^2+x+2)^2,$$

iar din această dublă inegalitate rezultă:

$$4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = (2x^2+x+1)^2,$$

de unde ecuația $x^2 - 2x = 0$, cu soluțiile $x=0$, $x=2$, cărora le corespund $y=0$ și $y=-1$, și respectiv $y=5$ și $y=-6$.

4. Rezolvați ecuația

$$(x^2 - y^2)^2 = 1 + 4xy. \text{ (***)}$$

Soluție: Trebuie ca $xy \geq 0$. Putem presupune $x > y \geq 0$ și atunci $x - y \geq 1$, de unde:

$$(x^2 - y^2)^2 \geq (x+y)^2$$

și deci:

$$1 + 4xy \geq (x+y)^2$$

ceea ce implică:

$$x - y \leq 1.$$

Deci, $x - y = 1$ și toate numerele întregi care satisfac această egalitate sunt soluții ale ecuației după cum se verifică ușor.

5. Rezolvați ecuația

$$(x^2 - y^2)^2 = 1 + 16y. \text{ (Olimpiada rusă)}$$

Rezolvare: Observăm că $y \geq 0$. Cum partea dreaptă este diferită de zero, rezultă același lucru și din partea stângă. Să găsim un majorant pentru y . Avem $(|x| - y)^2 \geq 1$, iar de aici, dacă $y > |x|$, deci $y \geq |x| + 1$, rezultă:

$$x^2 - y^2 \geq y^2 - (y-1)^2 = 2y-1$$

și deci

$$1+16y \geq (2y-1)^2,$$

de unde $y \leq 5$. Analog pentru $y < |x|$. Prin încercări, pentru $0 \leq y \leq 5$, găsim soluțiile:

$$(\pm 1, 0), (\pm 4, 3), (\pm 4, 5).$$

6. Să se rezolve în numere întregi pozitive ecuația

$$x^2y + y^2z + z^2x = 3xyz. \quad (***)$$

Soluție: Din inegalitatea mediilor avem:

$$x^2y + y^2z + z^2x \geq 3xyz,$$

iar din ecuație rezultă că:

$$x^2y = y^2z = z^2x,$$

ceea ce implică:

$$x^2 = yz, y^2 = xz, z^2 = xy$$

sau

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0,$$

deci $x=y=z=n$, cu n natural arbitrar.

7. Să se rezolve ecuația

$$xy(x^2 + y^2) - (x^3 + y^3) = 1. \quad (\text{I. Cucurezeanu})$$

Soluție: Punând $x+y=s$ și $xy=p$, ecuația devine:

$$(1) \quad 2p^2 - (s^2 + 3s)p + s^2 + 1 = 0.$$

Considerată ca o ecuație de gradul doi în p , trebuie ca discriminantul său să fie pătrat perfect, deci:

$$\Delta = (s^2 + 3s)^2 - 8s^2 - 8 \text{ sau } \Delta = s^4 - 2s^3 + 9s^2 - 8, s \neq 0.$$

Avem, pe de o parte $\Delta < (s^2 - s + 5)^2$, după cum se verifică ușor, și pe de altă parte $\Delta \geq (s^2 - s)^2$ deci $(s^2 - s)^2 \leq \Delta \leq (s^2 - s + 4)^2$. Pentru $\Delta = (s^2 - s + 1)^2$, $\Delta = (s^2 - s + 2)^2$ sau $\Delta = (s^2 - s + 3)^2$ nu obținem s întreg. Pentru $\Delta = (s^2 - s + 4)^2$ găsim $s=3$ și din (1) rezultă $p=2$ sau $p=7$. Din $s=3$ și $p=2$ obținem soluțiile $(x,y)=(1,2)$ sau $(2,1)$. Însă $p=7$ nu convine. Pentru $\Delta = (s^2 - s)^2$ rezultă $s^2=1$, deci $s=\pm 1$.

Pentru $s=1$, din (1) rezultă $p=1$, care nu convine. Pentru $s=-1$, din (1) rezultă $p=0$ și, în fine, soluțiile $(x,y)=(-1,0)$ sau $(0,-1)$.

8. În numere întregi, ecuația

$$x^2+y^2+z^2=2xyz$$

are numai soluția $x=y=z=0$. (***)

Demonstrație: Evident, dacă una dintre necunoscute este 0, atunci toate sunt 0. Presupunem că există o soluție nenulă. Nu putem avea două dintre necunoscute impare și una pară, fiindcă atunci membrul stâng este de forma $4M+2$, iar cel drept de forma $4M$. Fie toate pare:

$$x=2^\alpha q_1, y=2^\beta q_2, z=2^\gamma q_3$$

cu q_1, q_2, q_3 impare (nu neapărat pozitive). Nu putem avea $\alpha=\beta=\gamma$, fiindcă după simplificare cu $2^{2\alpha}$ în stânga rămâne un număr impar, iar în dreapta unul par. Fie $\alpha=\min(\alpha,\beta,\gamma)$. Avem:

$$2^{2\alpha} [q_1^2 + 2^{2(\beta-\alpha)} q_2^2 + 2^{2(\gamma-\alpha)} q_3^2] = 2^{\alpha+\beta+\gamma+1} q_1 q_2 q_3.$$

Dacă $\beta>\alpha$ și $\gamma>\alpha$ rezultă $\alpha+\beta+\gamma>2\alpha$ și cum numărul din paranteza dreaptă este impar, egalitatea precedentă nu este posibilă. În fine, dacă $\beta=\alpha$ și $\gamma>\alpha$, din paranteză se mai poate scoate factor 2^1 (și nu mai mult) și avem totuși $\alpha+\beta+\gamma+1>2\alpha+1$, ceea ce încheie demonstrația.

9. Să se afle numerele întregi x și y pentru care expresiile

$$x^2+4y \text{ și } y^2+4x$$

sunt simultan pătrate perfecte. (Olimpiada “Asia Pacific”)

Soluție: Dacă $x=0$, atunci y trebuie să fie pătrat perfect. Analog pentru $y=0$. Observăm că x^2+4y și x^2 au aceeași paritate. La fel y^2+4x și y^2 . Distingem următoarele cazuri.

a) $x>0, y>0$

Avem $x^2+4y \geq (x+2)^2$ și $y^2+4x \geq (y+2)^2$, iar prin adunarea lor obținem o contradicție. Deci în acest caz nu avem soluții.

b) $x<0, y>0$

Avem $x^2+4y \geq (-x+2)^2$ și $y^2+4x \geq (y-2)^2$, de unde $x-y=1$ și orice astfel de pereche satisface condițiile problemei.

c) $x<0, y<0$

Avem $x^2+4y \geq (-x-2)^2$ și $y^2+4x \geq (-y-2)^2$, de unde $y \leq x+1$ și $y \geq x+1$. Pentru $y=x+1$, prima expresie este pătrat perfect și pentru a fi și a doua trebuie ca:

$$x^2+6x+1=t^2 \text{ sau } (x+3)^2-8=t^2, \text{ de unde } x=-6 \text{ și deci } y=-5.$$

Pentru $y=x$, avem $x^2+4x=t^2$, $(x+2)^2-4=t^2$, de unde $x=-4$ și deci $y=-4$. Pentru $y=x-1$, a doua expresie este pătrat perfect și pentru a fi și prima, trebuie ca:

$$x^2+4x-4=t^2 \text{ sau } (x+2)^2-8=t^2,$$

de unde $x=5$ și deci $y=-6$.

În concluzie, toate soluțiile problemei sunt perechile:

$$(0, k^2), (k^2, 0), (k, 1-k), (-6, -5), (-4, -4), (-5, -6).$$

10. Suma cuburilor a opt numere naturale consecutive nu poate fi cub perfect. (I. Cucurezeanu)

Soluție: Fie $a-3, a-2, a-1, a, a+1, a+2, a+3, a+4$, ($a>3$) și E suma cuburilor lor, pe care o presupunem cub perfect. Avem $E=8a^3+12a^2+132a+64$. Se verifică ușor că $E<(2a+4)^3$. De aici și cum E este cubul unui număr par rezultă că $E\leq(2a+2)^3$. Dar $E>(2a+1)^3 \Rightarrow E\geq(2a+2)^3$. Deci ar trebui ca $E=(2a+2)^3$, care însă nu se verifică.

3 Metoda aritmeticii modulare

3.1 Scurtă prezentare a metodei

În rezolvarea unor ecuații în numere întregi un rol important îl are metoda aritmeticii modulare. Aceasta constă în considerarea resturilor celor doi membrii ai unei ecuații prin împărțirea acestora la același număr $m>0$ numit modul (de unde și denumirea).

Această metodă are rolul de a restrânge domeniul în care sunt căutate soluțiile ecuației și, uneori chiar de a conduce la rezolvarea ei.

Pentru o mai bună înțelegere a problemelor din acest capitol, în continuare vom reaminti câteva chestiuni teoretice.

Teorema împărțirii 3.1.1: Fiind date două numere întregi a și $b\neq 0$, există două numere întregi q și r , unic determinate, astfel încât:

$$a=bq+r, \text{ cu } 0\leq r<b/.$$

Numerele a și b poartă numele de deîmpărțit și împărțitor, iar q și r de cât și respectiv rest.

În cazul în care $r=0$, spunem că b divide pe a (b/a), ceea ce se întâmplă atunci când există un întreg c astfel încât $a=bc$ și mai spunem că a este un multiplu al lui b . În caz contrar, spunem că b nu îl divide pe a ($b\nmid a$).

Din punctul de vedere al divizibilității, numărul zero este considerat cel mai mare, având orice divizor, $0=0\cdot c$, oricare ar fi c număr întreg.

Rezultă ușor următoarele proprietăți:

Proprietăți 3.1.2:

1. Dacă b/a și $a > 0, b > 0$, atunci $1 \leq b \leq a$.
2. Dacă b/a și a/c , atunci b/c .
3. Dacă b/a și $c \neq 0$, atunci bc/ac .
4. Dacă c/a și c/b , atunci $c/(ma+nb)$, pentru orice m, n întregi.

Ne va fi utilă și următoarea:

Variantă a teoremei împărțirii 3.1.3: Fiind date două numere întregi a și $b > 0$, există două numere întregi q și r , astfel încât:

$$a = bq + r, \text{ cu } 0 \leq r < \frac{b}{2}.$$

Observația.3.1.4: Numerele q și r din această variantă a teoremei împărțirii nu mai sunt unic determinate. Numărul r din această variantă poartă numele rest minim în valoare absolută.

Exemplul 3.1.5: La împărțirea prin 9, resturile obișnuite sunt 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, iar resturile minime în valoare absolută sunt 0, ± 1 , ± 2 , ± 3 , ± 4 iar la împărțirea prin 4 resturile obișnuite sunt 0, 1, 2, 3, iar resturile minime în valoare absolută sunt 0, ± 1 , ± 2 . se observă și de aici neunicitatea restului.

Definiția 3.1.6: Fie $m > 0$ un întreg. Numerele întregi a și b se numesc congruente modulo m dacă dau același rest la împărțirea prin m , altfel spus, dacă $m \mid (a-b)$.

Notăția 3.1.7: Notăm $a \equiv b \pmod{m}$ și citim a congruent cu b modulo m . Cazul contrar se notează cu $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Exemple 3.1.8: Faptul că pătratul oricărui număr impar a da restul 1 la împărțirea prin 8 (ceea ce se poate verifica foarte ușor), se notează prin $a^2 \equiv 1 \pmod{8}$.

Faptul că cubul oricărui număr întreg a nu poate da la împărțirea prin 7 sau 9 decât resturile minime $-1, 0, 1$ se notează prin $a^3 \equiv 0$ sau $\pm 1 \pmod{7}$, respectiv $a^3 \equiv 0$ sau $\pm 1 \pmod{9}$.

Ca terminologie, prin ecuația considerată modulo m înțelegem că studiem resturile celor doi membrii ai ecuației prin împărțirea la m . Dacă resturile sunt diferite, atunci ecuația nu are soluții întregi.

Exemplul 3.1.9: Ecuația

$$x^2 - 2y^2 + 8z = 3$$

nu are soluții întregi. (***)

Demonstrație: Evident x impar și atunci $x^2 \equiv 1 \pmod{8}$. Iar de aici, considerând ecuația modulo 8, obținem resturi diferite, indiferent de paritatea lui y . Prezența cubului unor necunoscute într-o ecuație, sugerează considerarea ei mod 7 sau 9.

Exemplul 3.1.10: Ecuația

$$x^3 - 2xy + y^3 = 2005$$

nu are soluții în numere întregi. (I. Cucurezeanu)

Rezolvare: Considerăm ecuația modulo 9 și avem $2005 \equiv -2 \pmod{9}$. Pentru $3/xy$, membrul stâng al ecuației este congruent cu 0 sau este congruent cu -1 , 3 sau $4 \pmod{9}$, deci în ambele cazuri avem o contradicție, adică ecuația este imposibilă modulo 9.

Alegerea modulului m depinde de ecuație și de abilitatea rezolvitorului. De obicei, acesta este un număr prim sau o putere a unui număr prim.

Exemplul 3.1.11: Ecuația

$$19x^3 - 84y^2 = 1984$$

nu are soluții în numere întregi. (Olimpiada rusă, 1984)

Demonstrație: Să studiem ecuația în raport cu un modul convenabil ales. Deoarece $x^3 \equiv 0$ sau ± 1 atât modulo 9 cât și modulo 7, iar $7/84$, vom considera ecuația mod 7. Cum $19 \equiv -2 \pmod{7}$, iar $1984 \equiv 3 \pmod{7}$, vom avea $-2x^3 \equiv 3 \pmod{7}$, adică $x^3 \equiv 2 \pmod{7}$, fals.

Deseori, considerarea unei ecuații în raport cu un modul nu conduce direct la rezolvarea ei, dar contribuie la micșorarea intervalelor de variație ale necunoscutelor.

Exemplul 3.1.12: Găsiți numerele naturale a, b, c , astfel încât

$$a^3 + b^3 + c^3 = 2001. \text{ (O.B.J., 2001)}$$

Soluție: Pentru micșorarea numărului încercărilor, vom considera ecuația modulo 9. Deoarece $2001 \equiv 3 \pmod{9}$, iar cum $x^3 \equiv 0$ sau $\pm 1 \pmod{9}$ rezultă $a \equiv b \equiv c \equiv 1 \pmod{9}$. Fie deci:

$$a = 3\alpha + 1, \quad b = 3\beta + 1, \quad c = 3\gamma + 1, \quad \text{cu } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}.$$

Notăm:

$$f(x) = 3x^3 + 3x^2 + x$$

și ecuația devine:

$$f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) = 222.$$

Deoarece $f(4) = 244 > 222$ rezultă că $\alpha, \beta, \gamma \leq 3$. Deoarece $f(0) = 0$, $f(1) = 7$, $f(2) = 111$ rezultă $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = 2$ sau simetricele și deci soluțiile: $(1, 10, 10)$, $(10, 1, 10)$, $(10, 10, 1)$.

În continuare reamintim pe scurt câteva proprietăți utile:

Proprietăți 3.1.13:

1. *Relația de congruență este o relație de echivalență, adică este reflexivă, simetrică și tranzitivă.*
2. *Două relații de congruență se pot aduna, scădea sau înmulți membru cu membru.*
3. *Ambii membrii ai unei relații de congruență pot fi ridicați la aceeași putere întreagă pozitivă.*
4. *Ambii membrii ai unei relații de congruență pot fi înmulțiți cu orice număr întreg, înmulțind sau nu în același timp și modulul.*
5. *Orice relație de congruență în raport cu un modul dat, este o relație de congruență în raport cu un modul care este divizor al modulului dat.*
6. *Ambii membrii ai unei relații de congruență pot fi simplificați cu orice factor prim cu modulul.*

Relația de congruență fiind o relație de echivalență pe mulțimea numerelor întregi, determină pe aceasta o partiție, adică o împărțire în clase nevide, disjuncte a căror reuniune acoperă mulțimea.

Aceste clase, numite clase de resturi modulo m , se pot organiza ca un inel comutativ cu element unitate, numit inelul claselor de resturi modulo m , sau ca un corp, dacă m este număr prim.

3.2 Probleme

1. a) Ecuația $5x^2 + 9y = 7$ nu are soluții în numere întregi.
- b) Ecuația $5x^2 + 9y = 8$ are o infinitate de soluții întregi. (I. Cucurezeanu)

Rezolvare: a) Avem $5x^2 \equiv 7 \pmod{9}$ și deci $x^2 \equiv 5 \pmod{9}$. Dar resturile minime în valoare absolută ale împărțirii unui număr întreg prin 9 sunt $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ și, prin urmare, ale lui x^2 sunt $0, 1, 4, -2$, deci nu 5 și atunci $x^2 \not\equiv 5 \pmod{9}$.

b) Avem $5x^2 \equiv 8 \pmod{9}$ și deci $x^2 \equiv -2 \pmod{9}$, de unde $x = 9k + 4$, $k \in \mathbb{Z}$ și corespunzător rezultă y întreg.

2. Ecuația

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 2006$$

nu are soluții în numere întregi. (I. Cucurezeanu)

Soluție: Evident, nu toate necunoscutele pot fi impare. Dacă două dintre ele sunt pare, atunci și a treia este pară și ecuația este imposibilă modulo 4. Dacă una singură este pară, de exemplu z , ecuația se scrie $(x-y)^2 + \mathbb{Z}4 = 2006$, tot imposibilă modulo 4.

3. Există doi întregi m și n astfel încât

$$5m^2 - 6mn + 7n^2 = 1985? \text{ (O.I.M.Long List, 1985)}$$

Soluție: Considerăm ecuația modulo 8. Evident m și n sunt de parități diferite. Deoarece $1985 \equiv 1 \pmod{8}$, iar pentru a impar, $a^2 \equiv 1 \pmod{8}$, rezultă n par și deci m impar.

Dar $-6mn + 7n^2 \equiv 0 \pmod{8}$, indiferent de faptul că n se divide cu 4 sau numai cu 2. Deducem că membrul stâng al ecuației este congruent cu 5 (mod 8), dar cel drept este congruent cu 1 (mod 8), deci nu există soluții.

4. Există un întreg astfel încât cubul său să fie egal cu

$$3n^2 + 3n + 7,$$

unde n este un întreg? (O.I.M.Long List, 1985)

Soluție: Revine la rezolvarea ecuației:

$$m^3 = 3n^2 + 3n + 7$$

sau

$$m^3 + n^3 = (n+1)^3 + 6.$$

Considerată modulo 9 și ținând seama de faptul că $a^3 \equiv 0$ sau $\pm 1 \pmod{9}$, deducem că $3 \nmid n$ și $3 \nmid (n+1)$, deci $n = 3\mathcal{B} + 1$ și atunci $m^3 + 1 \equiv -1 + 6 \pmod{9}$, congruență fără soluții. Deci nu există.

5. Determinați cel mai mic număr natural a pentru care

$$7 + 7a + 7a^2$$

este bipătrat perfect. (Olimpiada din Canada, 1977)

Soluție: Trebuie mai întâi ca $1 + a + a^2$ să se dividă cu 7. Resturile minime în valoare absolută ale împărțirii lui a la 7 sunt 0, ± 1 , ± 2 , ± 3 , iar ale lui a^2 sunt 0, 1, -3, 2. Din $7 \mid (1 + a + a^2)$ rezultă $a = 7k + 2$ sau $a = 7k - 3$. Pentru $a = 7k - 3$ avem:

$$a^2 + a + 1 = 7(7k^2 - 5k + 1)$$

și cel mai mic k pentru care și numărul din paranteză se divide cu 7 este 3, pentru care avem:

$$a^2 + a + 1 = 7^3.$$

Deci $a = 18$. Pentru $a = 7k + 2$ avem:

$$a^2 + a + 1 = 7(7k^2 + 5k + 1)$$

și cel mai mic k pentru care și numărul din paranteză se divide cu 7 este 4, deci $a=30$. Dintre 18 și 30, cel mai mic este 18, deci soluția este $a=18$.

6. Să se rezolve în numere prime ecuația

$$p^3 - q^5 = (p+q)^2. \text{ (Olimpiada din Rusia, 1996)}$$

Soluție: Singura soluție a ecuației este $p=7$, $q=3$. Într-adevăr, să presupunem că nici unul din numerele p și q nu este 3. Atunci $p \equiv 1$ sau $2 \pmod{3}$ și la fel q . Dacă $p \equiv q \pmod{3}$, atunci partea stângă a ecuației se divide cu 3, iar partea dreaptă nu, deci ecuația este imposibilă modulo 3. Tot imposibilă mod 3 este și pentru $p \not\equiv q \pmod{3}$. Pentru $p=3$ avem $q^5 < 27$, imposibil. Pentru $q=3$, avem $p^3 - 243 = (p+3)^2$, cu soluția întreagă $p=7$.

7. Ecuația

$$x^3 = 2(x+y^2)$$

nu are soluții în numere întregi nenule. (I. Cucurezeanu)

Demonstrație: Presupunem că există o soluție cu $xy \neq 0$. Fie $d=(x,y)$, $x=dx_1$ și $y=dy_1$, $(x_1, y_1)=1$. Ecuația devine:

$$d^2 x_1^3 = 2(x_1 + d y_1^2).$$

De aici rezultă $2 \nmid d^2 x_1^3$ și dacă $2 \nmid x_1$, atunci $2 \nmid d$ și ecuația este imposibilă modulo 4. Deci $2 \mid x_1$ și atunci $2 \mid d y_1^2$ și cum $(x_1, y_1)=1$ rezultă că $2 \mid d$. Fie $x_1=2x_2$, $d=2d_1$ și ecuația devine:

$$8d_1^2 x_2^3 = x_2 + d_1 y_1^2.$$

De aici rezultă că $d_1 \mid x_2$ și $x_2 \mid d_1$, deci $d_1 = -x_2$ sau $d_1 = x_2$. În primul caz, $d_1 = -x_2$, ecuația devine:

$$8x_2^4 = 1 - y_1^2$$

ecuație care nu are soluții nenule. În primul caz, $d_1 = x_2$, ecuația devine:

$$8x_2^4 = 1 + y_1^2$$

imposibilă mod 8, fiindcă y_1 este impar și $1 + y_1^2 \equiv 2 \pmod{8}$.

8. Rezolvați ecuația

$$7^x - 3^y = 4. \text{ (Concurs India, 1995)}$$

Rezolvare: Este evidentă soluția $x=1$, $y=1$. Să arătăm că este și singura. Nu putem avea y par, deoarece $7 \nmid 3^y + 4$ (o sumă de pătrate), iar modulo 4 rezultă și x impar. Presupunem $y > 1$ și studiem ecuația modulo 9.

	x	0	1	2	3	4	5	6
mod 9	7^x	1	-2	4	1	-2	4	1

Observăm că 7^x dă restul 4 la împărțirea prin 9, în cazul x impar, pentru $x=6k+5$. Studiind apoi ecuația modulo 13, găsim că $x=12m+1$ sau $x=13m+3$. Dar $x=6k+5$ este echivalent cu $x=12n+5$ sau $x=12n+11$ și deci nu mai avem o altă soluție.

3 Metode de rezolvare a ecuațiilor diofantiene

3.1 Rezolvarea ecuațiilor diofantiene prin metoda descompunerii

Această metodă constă în scrierea ecuației $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ sub forma:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \dots f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = a,$$

unde $f_1, f_2, \dots, f_k \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, \dots, X_n]$ și $a \in \mathbb{Z}$. Folosind descompunerea în factori primi a lui a , obținem un număr finit de descompuneri în k factori întregi $a_1, a_2, \dots, a_n$. Fiecare astfel de descompunere conduce la un sistem de ecuații de forma:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_2 \\ \dots \\ f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_k \end{cases}$$

Rezolvând aceste sisteme de ecuații obținem mulțimea de soluții pentru ecuația considerată.

Exemplul 3.1.1: Determinați toate soluțiile întregi pentru ecuația

$$(x^2+1)(y^2+1)+2(x-y)(1-xy)=4(1+xy). \quad (\text{Titu Andreescu})$$

Soluție: Scriem ecuația sub forma:

$$x^2y^2-2xy+1+x^2+y^2-2xy+2(x-y)(1-xy)=4,$$

sau

$$(xy-1)^2+(x-y)^2-2(x-y)(xy-1)=4.$$

Aceasta este echivalentă cu:

$$[xy-1-(x-y)]^2=4,$$

de unde se obține:

$$(x+1)(y-1)=\pm 2.$$

Dacă $(x+1)(y-1)=2$, rezultă sistemele de ecuații:

$$\begin{cases} x+1=2 \\ y-1=1 \end{cases}; \begin{cases} x+1=-2 \\ y-1=-1 \end{cases}; \begin{cases} x+1=1 \\ y-1=2 \end{cases}; \begin{cases} x+1=-1 \\ y-1=-2 \end{cases}$$

care conduc la soluțiile $(1,2)$, $(-3,0)$, $(0,3)$, $(-2,-1)$. Dacă $(x+1)(y-1)=-2$, se obțin sistemele de ecuații:

$$\begin{cases} x+1=2 \\ y-1=-1 \end{cases}; \begin{cases} x+1=-2 \\ y-1=1 \end{cases}; \begin{cases} x+1=1 \\ y-1=-2 \end{cases}; \begin{cases} x+1=-1 \\ y-1=2 \end{cases}$$

ale căror soluții sunt $(1,0)$, $(-3,2)$, $(0,-1)$, $(-2,3)$. Toate cele opt perechi determinate satisfac ecuația considerată.

3.2 Rezolvarea ecuațiilor diofantiene cu ajutorul inegalităților

Această metodă constă în determinarea unor intervale în care se află necunoscutele, prin utilizarea unor inegalități adecvate. În general acest proces conduce numai la un număr finit de posibilități pentru toate necunoscutele sau pentru o parte dintre acestea.

Exemplul 3.2.1: Să se determine toate perechile (x,y) de numere întregi astfel încât

$$x^3+y^3=(x+y)^2.$$

Soluție: În primul rând observăm că perechile de forma $(k, -k)$, $k \in \mathbb{Z}$ sunt soluții pentru ecuația dată. Dacă $x+y \neq 0$, ecuația devine:

$$x^2-xy+y^2=x+y,$$

care este echivalentă cu:

$$(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=2.$$

Rezultă că $(x-1)^2 \leq 1$ și $(y-1)^2 \leq 1$, inegalități care restrâng intervalul în care se află necunoscutele x, y la $[0,2]$. Obținem astfel soluțiile $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$.

Exemplul 3.2.2: Determinați toate cvadruplele de numere naturale nenule (x,y,z,w) pentru care

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2x(z-1)+2y(z+1)=w^2. \quad (\text{Titu Andreescu})$$

Soluție: Avem:

$$(x+y+z \pm 1)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2x(z \pm 1)+2y(z \pm 1) \pm 2z+1$$

de unde rezultă inegalitățile:

$$(x+y+z-1)^2 < w^2 < (x+y+z+1)^2.$$

Prin urmare expresia:

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2x(z-1)+2y(z+1),$$

poate fi egală numai cu $(x+y+z)^2$. Aceasta implică $x=y$, deci soluțiile căutate sunt $(m, m, n, 2m+n)$, $m, n \in \mathbb{N}^*$.

3.3 Rezolvarea ecuațiilor diofantiene prin metoda parametrică

În multe situații soluțiile întregi ale unei ecuații diofantiene

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

pot fi reprezentate parametric sub forma:

$$x_1 = g_1(k_1, \dots, k_l), \quad x_2 = g_2(k_2, \dots, k_2), \dots, \quad x_n = g_n(k_n, \dots, k_n),$$

unde $g_1, g_2, \dots, g_n$ sunt funcții de l-variabile, cu valori întregi și $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$.

Pentru unele ecuații diofantiene mulțimea soluțiilor poate avea mai multe reprezentări parametrice.

În multe cazuri nu este posibil să găsim toate soluțiile pentru o ecuație diofantiană. Metoda parametrică este o cale utilă de a pune în evidență familii infinite de soluții.

Exemplul 3.3.1: Arătați că există o infinitate de triplete (x, y, z) de numere întregi astfel încât

$$x^3 + y^3 + z^3 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (\text{Turneul orașelor})$$

Soluție: Alegând $z = -y$, ecuația devine:

$$x^3 = x^2 + 2y^2.$$

Dacă $y = mx$, $m \in \mathbb{Z}$, atunci $x = 1 + 2m^2$ și obținem următoarea familie infinită de soluții:

$$x = 2m^2 + 1, \quad y = m(2m^2 + 1), \quad z = -m(2m^2 + 1), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

3.4 Rezolvarea ecuațiilor diofantiene prin metoda aritmeticii modulare.

În multe situații considerații simple de aritmetică modulară se dovedesc a fi extrem de utile în demonstrația faptului că anumite ecuații diofantiene nu sunt solvabile sau în reducerea posibilităților de alegere a soluțiilor acestora.

Exemplul 3.4.1: Arătați că ecuația

$$(x+1)^2 + (x+2)^2 + \dots + (x+2001)^2 = y^2$$

nu este solvabilă.

Soluție: Fie $x = z - 1001$. Ecuația devine:

$$(z-1000)^2 + \dots + (z-1)^2 + z^2 + (z+1)^2 + \dots + (z+1000)^2 = y^2$$

sau

$$2001z^2 + 2(1^2 + 2^2 + \dots + 1000^2) = y^2.$$

Urmează că:

$$2001z^2 + 2 \cdot \frac{1000 \cdot 1001 \cdot 2001}{6} = y^2,$$

ceea ce este echivalent cu:

$$2001z^2 + 1000 \cdot 1001 \cdot 667 = y^2.$$

Partea stângă a ultimei relații este congruentă cu $2 \pmod{3}$, deci nu poate fi un pătrat perfect.

Exemplul 3.4.2: Determinați toate perechile de numere prime (p, q) astfel încât

$$p^3 - q^5 = (p + q)^2. \text{ (Olimpiada de matematică din Rusia)}$$

Soluție: Singura soluție este $(7, 3)$. Să presupunem pentru început că nici unul dintre numerele p și q nu este egal cu 3. Atunci $p \equiv 1$ sau $2 \pmod{3}$. Dacă am avea $p \equiv q \pmod{3}$, atunci partea stângă a ecuației este divizibilă cu 3, iar partea dreaptă nu are această proprietate. Același lucru se întâmplă dacă $p \not\equiv q \pmod{3}$. Dacă $p = 3$, atunci $q^5 < 27$, ceea ce este imposibil. Pentru $q = 3$, avem $p^3 - 243 = (p + 3)^3$, ecuație cu unica soluție întreagă $p = 7$.

3.5 Rezolvarea ecuațiilor diofantiene prin metoda inducției matematice

Inducția matematică este o metodă utilă și elegantă în demonstrarea unor afirmații care depind de mulțimea numerelor naturale.

Fie $(P(n))_{n \geq 0}$ un șir de propoziții. Metoda inducției matematice ne ajută să demonstrăm că propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq n_0$, unde n_0 este un număr natural fixat.

3.5.1 Inducția matematică (forma slabă)

Presupunem că:

- $P(n_0)$ este adevărată;
- Pentru orice $k \geq n_0$, din faptul că $P(k)$ este adevărată rezultă că $P(k+1)$ este adevărată.

Atunci propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq n_0$.

3.5.2 Inducția matematică (cu pasul s)

Fie s un număr natural fixat. Presupunem că:

- $P(n_0), P(n_0+1), \dots, P(n_0+s-1)$ sunt adevărate;

- Pentru orice $k \geq n_0$, din faptul că $P(k)$ este adevărată rezultă că $P(k+s)$ este adevărată.

Atunci propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq n_0$.

3.5.3 Inducția matematică (forma tare)

Presupunem că:

- $P(n_0)$ este adevărată;
- Pentru orice $k \geq n_0$, din faptul că $P(m)$ este adevărată pentru orice m cu $n_0 \leq m \leq k$, rezultă că $P(k+1)$ este adevărată.

Atunci propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq n_0$.

Această metodă de demonstrație este frecvent utilizată în diferite discipline matematice, inclusiv în teoria numerelor. Următoarele exemple ilustrează utilizarea inducției matematice în studiul ecuațiilor diofantiene.

Exemplul 3.5.4: Arătați că pentru orice număr natural n , următoarea ecuație este solvabilă în mulțimea numerelor întregi

$$x^2 + y^2 + z^2 = 59^n. \text{ (Dorin Andrica)}$$

Soluție: Vom utiliza inducția matematică cu pasul $s=2$ și $n_0=1$. Observăm că pentru $(x_1, y_1, z_1) = (1, 3, 7)$ și $(x_2, y_2, z_2) = (14, 39, 42)$ avem

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 59 \text{ și } x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 59^2.$$

Definim (x_n, y_n, z_n) , $n \geq 3$, prin:

$$x_{n+2} = 59^2 x_n, y_{n+2} = 59^2 y_n, z_{n+2} = 59^2 z_n$$

pentru orice $n \geq 1$. Atunci:

$$x_{k+2}^2 + y_{k+2}^2 + z_{k+2}^2 = 59^2 (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2),$$

deci:

$$x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 = 59^k$$

Implică

$$x_{k+2}^2 + y_{k+2}^2 + z_{k+2}^2 = 59^{k+2}.$$

Exemplul 3.5.5: Să se arate că pentru orice $n \geq 3$, ecuația

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = 1$$

este solvabilă în numere naturale distincte.

Soluție: În cazul $n=3$ avem:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1.$$

Presupunem că pentru $k \geq 3$ are loc relația:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_k} = 1,$$

unde $x_1, x_2, \dots, x_k$ sunt numere naturale distincte și obținem:

$$\frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2x_2} + \dots + \frac{1}{2x_n} = \frac{1}{2}.$$

Prin urmare:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2x_2} + \dots + \frac{1}{2x_n} = 1$$

unde numerele naturale $2, 2x_1, 2x_2, \dots, 2x_k$ sunt distincte două câte două.

3.6 Rezolvarea ecuațiilor diofantiene liniare

Definiția 3.6.1: O ecuație de forma

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$$

unde $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ sunt numere întregi fixate, se numește ecuație diofantică liniară.

Presupunem că $n \geq 1$ și coeficienții $a_1, a_2, \dots, a_n$ sunt toți diferiți de zero.

Teorema 3.6.2: Ecuația

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$$

este solvabilă dacă și numai dacă $(a_1, a_2, \dots, a_n) / b$. În caz de solvabilitate, soluțiile întregi ale ecuației $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ se exprimă în funcție de $n-1$ parametri întregi.

Corolar 3.6.3: Fie a_1, a_2 numere întregi prime între ele. Dacă (x_1^0, x_2^0) este o soluție a ecuației:

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b,$$

atunci toate soluțiile ei sunt date de:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + a_2t \\ x_2 = x_2^0 - a_1t \end{cases}$$

unde $t \in \mathbb{Z}$.

Exemplul 3.6.4: Rezolvați în numere întregi ecuația

$$3x+4y+5z=6.$$

Soluție: Lucrând modulo 5 obținem:

$$3x+4y \equiv 1 \pmod{5},$$

deci

$$3x+4y=1+5s, s \in \mathbb{Z}.$$

O soluție a ecuației este:

$$x=-1+3s, y=1-s.$$

Conform corolarului 3.4.6.3 obținem:

$$x=-1+3s+4t, y=1-s-3t, t \in \mathbb{Z},$$

iar prin înlocuire în ecuația inițială rezultă $z=1-s$. Prin urmare toate soluțiile întregi ale ecuației noastre sunt date de:

$$(x,y,z)=(-1+3s+4t, 1-s-3t, 1-t), s, t \in \mathbb{Z}.$$

BIBLIOGRAFIE

- [1] Andreescu, T., Andrica, D., *O introducere în studiul ecuațiilor diofantiene*, Editura GIL, Zalău, 2002
- [2] Andrei, GH., Caragea, C., Cucurezeanu, I., Bordea, Gh., *Probleme de algebră*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1993.
- [3] Andrica D., Duca I. D., Pop I., Purdea I., *Matematica de bază*, Editura Studium, Cluj-Napoca, 2000.
- [4] Becheanu, M., *Olimpiade matematice (1987-1994)*, Editura GIL Zalău, 1995.
- [5] Beju, A. E., Beju, I., *Compendiu de matematică*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1983.
- [6] Bușneag, D., Boboc, Fl., Piciu, D., *Elemente de aritmetică și teoria numerelor*, Editura Universitaria, Craiova, 1999.
- [7] Chiș V., Lobonț Gh., Șerdean V., Chiorean M., *Ghidul profesorului de matematică*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 2001.
- [8] Cucurezeanu, I., *Ecuații în numere întregi*, Editura Aramis, București, 2006.
- [9] Ghelfond, A. O., *Rezolvarea ecuațiilor în numere întregi* (trad. din limba rusă), Editura Tehnică, București, 1954.
- [10] Ionescu M., Radu I., *Didactica modernă*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 2001.

- [11] **Mortici, C.**, *Probleme pregătitoare pentru concursurile de matematică*, Editura GIL Zalău, 1999.
- [12] **Mortici, C.**, *600 probleme*, Editura GIL, Zalău, 2001.
- [13] **Panaitopol, L., Gica, A.**, *Probleme celebre de teoria numerelor*, Editura Universității, București, 1998.
- [14] **Panaitopol, L., Șerbănescu, D.**, *Probleme de Teoria numerelor și Combinatorică pentru juniori*, Editura GIL, Zalău, 2003.
- [15] **Popovici, C. P.**, *Teoria numerelor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1973.
- [16] **Rădescu, N.**, *Elemente de aritmetică și teoria numerelor*, Editura Didactica Nova, Craiova, 1996.

Ariile în demonstrarea unor teoreme de geometrie plană

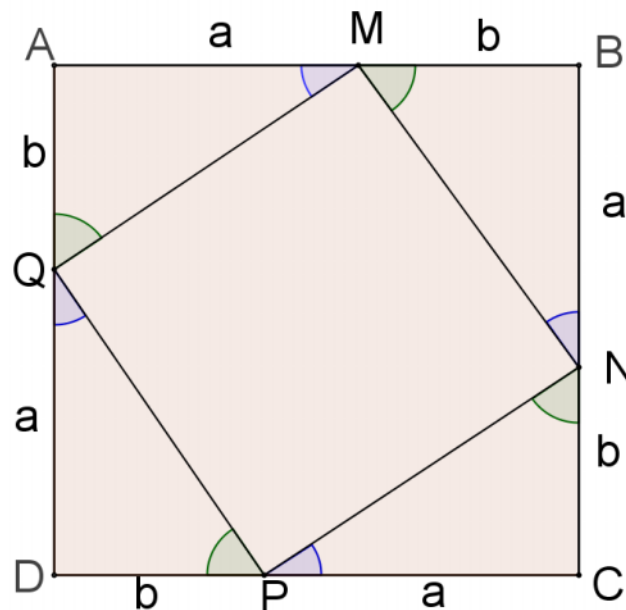
Prof. Michiu Irina Oana, Piatra Neamț

Teorema lui Pitagora, teorema catetei și alte teoreme reprezintă relații între ariile unor figuri plane: pătrate, triunghiuri, etc., de aceea vom prezenta în continuare demonstrațiile acestora folosind ariile.

Teorema lui Pitagora

Într-un triunghi dreptunghic ABC ($\hat{A}=90^\circ$) $BC^2 = AC^2 + AB^2$
($a^2 = b^2 + c^2$).

Demonstrație



În figura de mai sus $ABCD$ este un pătrat, $AM \equiv BN \equiv CP \equiv DQ$, $AM = a$ iar $AQ \equiv BM \equiv CN \equiv DP$, $AQ = b$. Triunghiurile AMQ , BNM , CPN , DQP sunt congruente (C.C) de unde deducem $\angle MNB \equiv \angle NPC \equiv \angle PQD \equiv \angle QMA$ și $\angle BMN \equiv \angle NPC \equiv \angle PQC \equiv \angle AMQ$ iar pe baza sumei unghiurilor într-un triunghi, rezultă că $MNPQ$ este un dreptunghi, iar din congruența triunghiurilor deducem că $MNPQ$ este pătrat.

$$A_{ABCD} = A_{MNPQ} + 4A_{AMQ}$$

$$\text{Deci: } (a+b)^2 = MN^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} \Rightarrow MN^2 = a^2 + b^2.$$

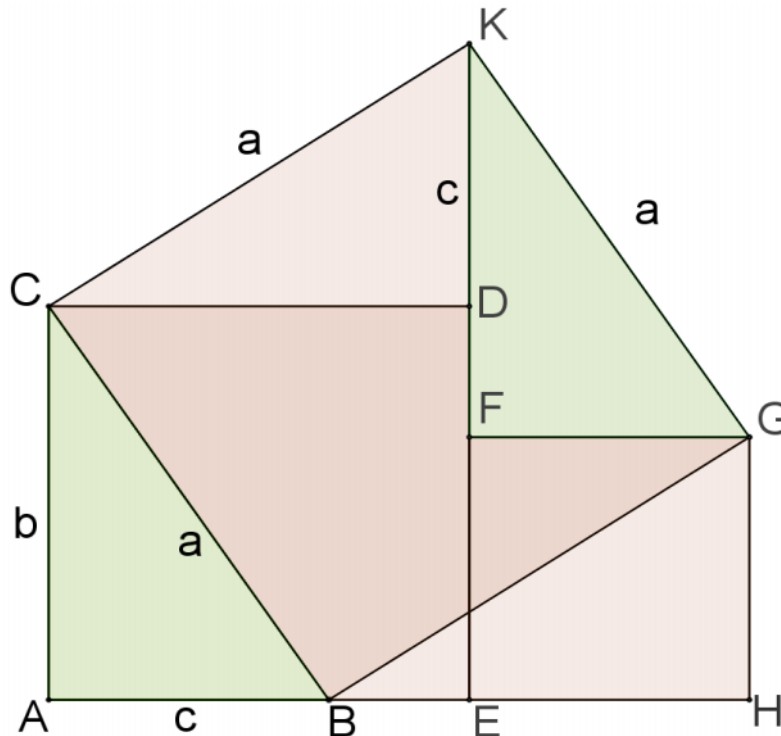
Sau, se dă triunghiul ABC dreptunghic în A , $BC = a$, $CA = b$ și $AB = c$, $b > c$.

Construim pătratele $ACDE$ și $EFGH$ cu laturile b respectiv c , $E \in (AB$,

$F \in (ED)$ și punctul K astfel ca $D \in (FK)$ și $DK = c$.

Atunci $\triangle ABC \equiv \triangle DKC \equiv \triangle HGB \equiv \triangle FGK$ și $BCKG$ este un pătrat de latură a și:

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= A_{ACDE} + A_{EFGH} = A_{ACDFGH} = A_{CBFD} + A_{ABC} + A_{HGB} \\ &= A_{CBFD} + A_{DKC} + A_{FGK} = A_{BCKG} = a^2. \end{aligned}$$



O altă demonstrație interesantă ar fi și următoarea: în triunghiul ABC dreptunghic în A luăm pe ipotenuza BC punctele $D \neq E$ astfel ca $BD \equiv BE \equiv BA$, D fiind între B și C .

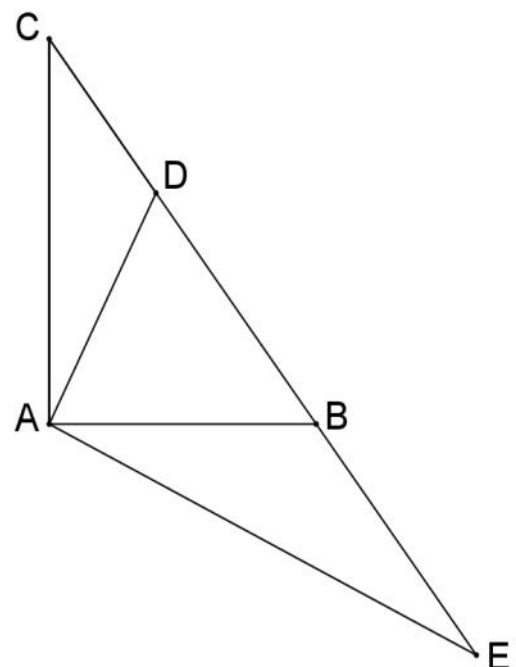
Triunghiurile BAE și BAD sunt isoscele,

$\hat{A} = 90^\circ$, vom obține că $\triangle ACD \sim \triangle ECA$,

$$\frac{AC}{CE} = \frac{CD}{AC}.$$

$$AC^2 = (CB + BE)(CB - BD) = BC^2 - AB^2$$

$$\text{deci } BC^2 = AB^2 + AC^2.$$



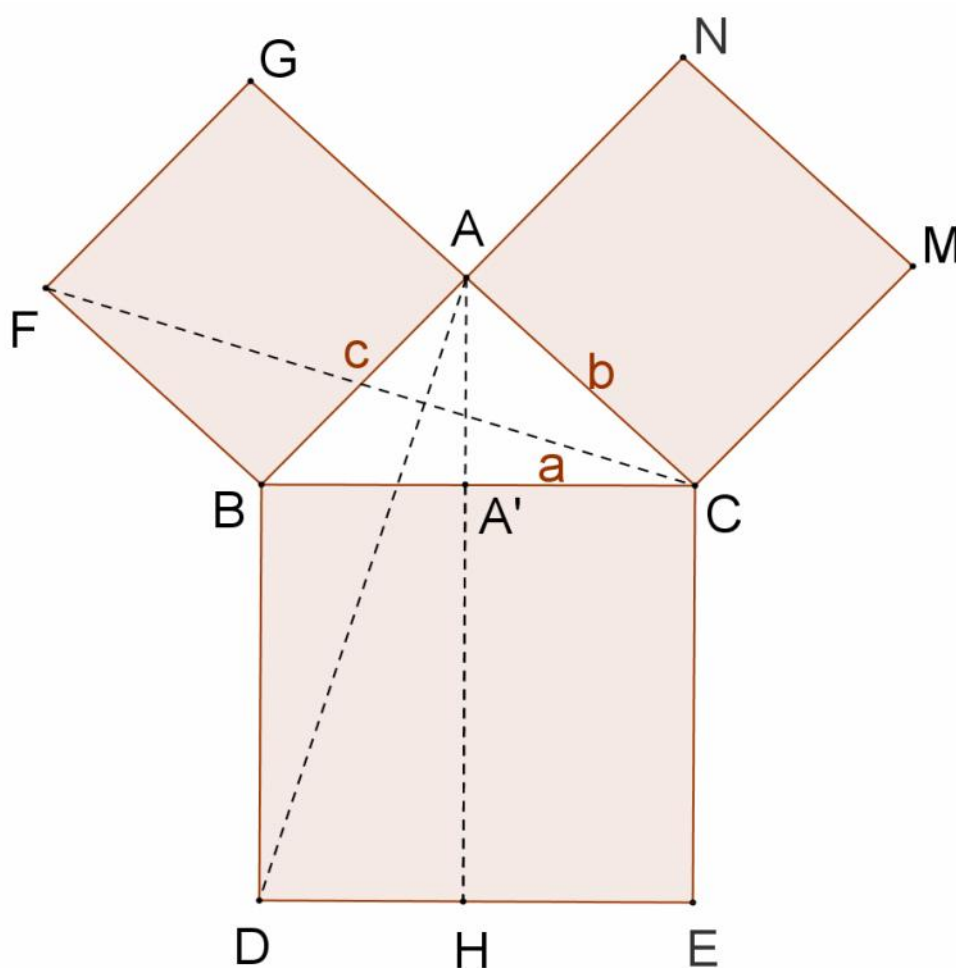
Teorema catetei

Fie triunghiul dreptunghic ABC și $AA' \perp BC$, $D \in (BC)$. Atunci:

$$AB^2 = BA' \cdot BC.$$

Demonstrație

Pe ipotenuza BC și pe cateta AB construim pătratele $BCED$ și $ABFG$ și $AA' \perp BC$, $AA' \cap DE = \{H\}$: $A_{ABFG} = A_{BA'HD}$ sau $A_{ABF} = A_{BHD}$, $A_{ABF} = A_{CBF}$, $A_{BDH} = A_{BDA}$, și $\triangle CBF \equiv \triangle DBA \Rightarrow c^2 = BA' \cdot BD = BA' \cdot BC$.

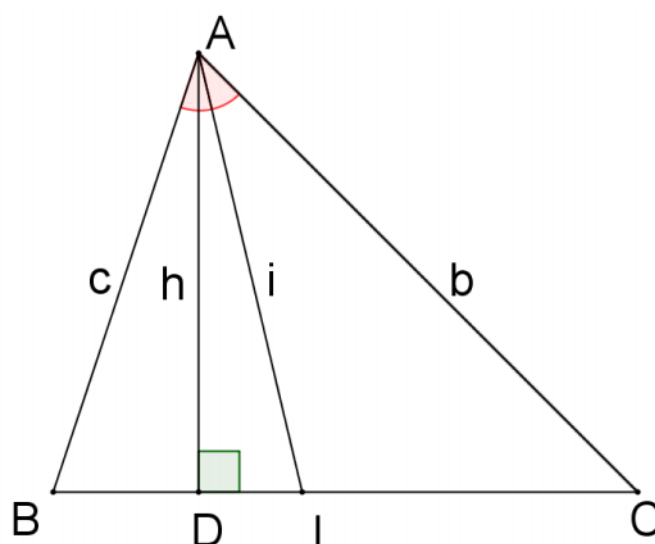


Teorema bisectoarei

Fie triunghiul ABC și AD bisectoarea interioară a unghiului A. Atunci:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}.$$

Demonstrație



$$\frac{A_{ABI}}{A_{ACI}} = \frac{\frac{BI \cdot h}{2}}{\frac{CI \cdot h}{2}} = \frac{c \cdot i \cdot \sin \frac{A}{2}}{b \cdot i \cdot \sin \frac{A}{2}} \Rightarrow \frac{BI}{CI} = \frac{c}{b}.$$

Teorema lui Ceva

Fie triunghiul ABC și $M \in (BC)$, $N \in (AC)$, $P \in (AB)$ astfel încât

$AM \cap CP \cap BN = \{O\}$. Atunci are loc : $\frac{MC}{MB} \cdot \frac{NA}{NC} \cdot \frac{PB}{PA} = 1$

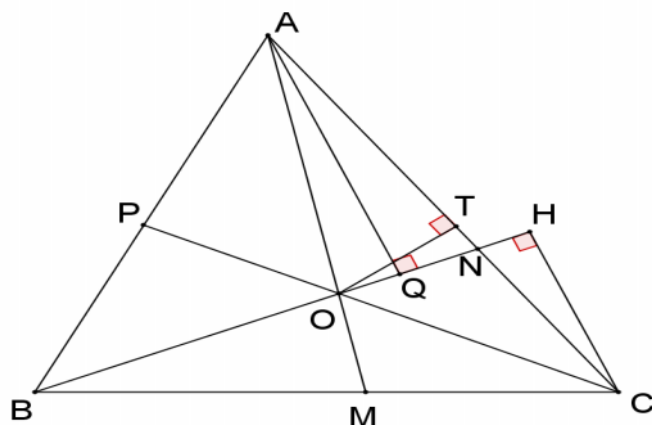
Demonstrație

Fie $AQ \perp BN$, $CH \perp BN$ și $OT \perp AC$.

$$\frac{A_{AOB}}{A_{BOC}} = \frac{\frac{BO \cdot AQ}{2}}{\frac{BO \cdot CH}{2}} \Rightarrow \frac{A_{AOB}}{A_{BOC}} = \frac{AQ}{CH} \text{ și } \frac{A_{AON}}{A_{CNO}} = \frac{\frac{ON \cdot AQ}{2}}{\frac{CH \cdot ON}{2}} \Rightarrow \frac{A_{AON}}{A_{CNO}} = \frac{AQ}{CH}.$$

$$\text{Deci } \frac{A_{AOB}}{A_{BOC}} = \frac{A_{AON}}{A_{CNO}} = \frac{\frac{OT \cdot AN}{2}}{\frac{OT \cdot CN}{2}} = \frac{AN}{CN} \quad (1).$$

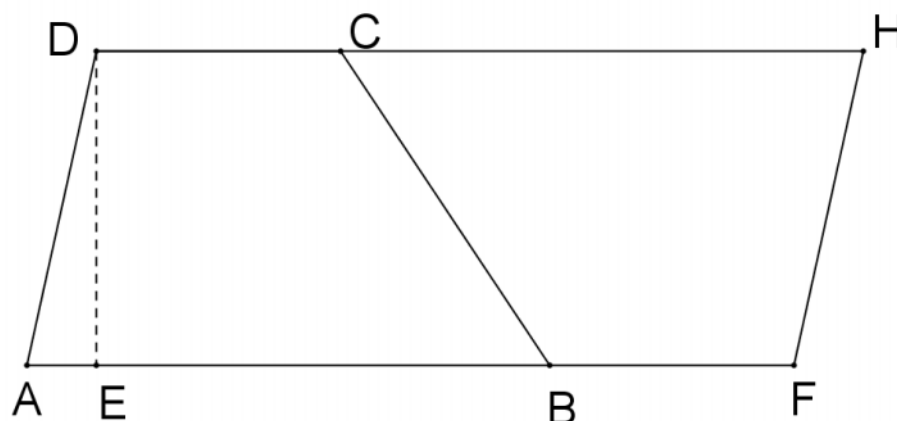
$$\text{Analog } \frac{A_{COB}}{A_{AOC}} = \frac{A_{CON}}{A_{AOP}} = \frac{BP}{PA} \quad (2) \text{ și } \frac{A_{COA}}{A_{AOB}} = \frac{A_{COM}}{A_{BOM}} = \frac{CM}{BM} \quad (3).$$



Înmulțind relațiile (1), (2) și (3) obținem:

$$\frac{A_{AOB}}{A_{BOC}} \cdot \frac{A_{COB}}{A_{AOC}} \cdot \frac{A_{COA}}{A_{AOB}} = \frac{CM}{BM} \cdot \frac{AN}{CN} \cdot \frac{BP}{PA} = 1.$$

Vom prezenta acum deducerea ariei unui trapez folosindu-ne tot de arii:



$$A_{AFHD} = AF \cdot DE = (B+b)h = 2 \cdot A_{ABCD} \text{ deci } A_{ABCD} = \frac{(B+b)h}{2}.$$

Bibliografie

1. A. Hollinger *Probleme de geometrie*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1982
2. Eugen Rusu *De la Tales la Einstein*, Ed. Albatros, București, 1971
Autor: Huma Irina Oana, profesoara de matematica la Colegiul Tehnic de Transporturi Piatra Neamt (în cazul selectării unuia din articole va rog respectuos să îmi trimiteți adevărata)