Revista Electronică MateInfo.ro

NOIEMBRIE 2012

ISSN 2065 – 6432

www.mateinfo.ro

ARTICOLE :

Coordonator: Andrei Octavian Dobre

E-mail pentru articole: revistaelectronica@mateinfo.ro

1.CÂTEVA PROPRIETĂŢI ALE NUMERELOR TRIUNGHIULARE

Profesor : ANGELICA UNGUREANU
LICEUL "ALEXANDRU CEL BUN"- BOTOŞANI

Unnumărtriunghiularestenumărul de punctedintr-un triunghi unilateral umplut uniform cu puncte.

Al *n*-lea numărtriunghiular (T_n) este numărul de puncte dintr-un triunghi cu *n*punctepelaturi , adicăsumaprimelor*n*numerenaturalenenule, consecutive:

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2} = C_{n+1}^2 .$$

Proprietatea 1. Suma a două numere triunghiulare consecutive este un pătrat perfect (pătratul diferenţei celor două numere).

Soluţie : $T_{n+1} + T_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}(n+2+n) = (n+1)^2$

$$(T_{n+1} - T_n)^2 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \left[\frac{n+1}{2}(n+2-n)\right]^2 = (n+1)^2 .$$

Proprietatea 2. Diferenţa pătratelor a două numere triunghiulare consecutive este un cub.

Soluţie :

$$T_{n+1}{}^2 - T_n{}^2 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 - \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \frac{(n+1)^2}{4}[(n+2)^2 - n^2] = \frac{(n+1)^2}{4}(2n+2)(n+2-n) = (n+1)^3$$

.

Proprietatea 3. Dacă T este un numărtriunghiular, atunci $9T+1$ este tot un numărtriunghiular.

Soluţie : Fie $T = T_k = \frac{k(k+1)}{2}$

$$9T+1 = 9\frac{k(k+1)}{2} + 1 = \frac{9k(k+1)+2}{2} = \frac{9k^2+9k+2}{2} = \frac{(3k+1)(3k+2)}{2} = T_{3k+1}.$$

Proprietatea 4. Dacă T este un numărtriunghiular, atunci $8T+1$ este un pătrat perfect.

Soluţie : Fie $T = T_k = \frac{k(k+1)}{2}$

$$8T+1 = \frac{8k(k+1)}{2} + 1 = 4k^2 + 4k + 1 = (2k+1)^2.$$

Proprietatea 5. $T_{k+l} = T_k + T_l + kl$.

Soluţie : $T_k + T_l + kl =$

$$\frac{k(k+1)}{2} + \frac{l(l+1)}{2} + kl = \frac{k^2+l^2+k+l+2kl}{2} = \frac{(k+l)^2+k+l}{2} = \frac{(k+l)(k+l+1)}{2} = T_{k+l}.$$

Proprietatea 6. $T_{kl} = T_k \cdot T_l + T_{k-1} \cdot T_{l-1}$.

Soluţie : $T_k \cdot T_l + T_{k-1} \cdot T_{l-1} = \frac{k(k+1)}{2} \cdot \frac{l(l+1)}{2}$
$+$
$\frac{(k-1)k}{2} \cdot \frac{(l-1)l}{2} = \frac{kl}{4}[(k+1)(l+1)+(k-1)(l-1)] = \frac{kl}{4}(2kl+2) =$
$\frac{kl(kl+1)}{2} = T_{kl}$.

Proprietatea 7. Suma inverselor numerelor triunghiulare este 2.
Soluţie : Fie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{T_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$
Suma parţială este : $S_n = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = 2\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$ şi cum
$\lim_{x\to\infty} S_n = 2, \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{T_n} = 2$.

Şirul numerelor triunghiulare pentru n=1,2,3, este:1,3,6,10,15,21,28,36,45,55,… .
Proprietatea 8. Numărul N=0,1360518… care are drept cifre ultima cifră a numerelor triunghiulare luate succesiv este un număr raţional.
Soluţie : Calculăm diferenţa :
$T_{n+20} - T_n = \frac{(n+20)(n+21)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}(n^2+41n+420-n^2-n) =$
$10(2n+21)$.

Rezultă că numerele triunghiulare , din douăzeci în douăzeci, au aceeaşi ultimă cifră , ceea ce înseamnă că numărul N este reprezentat de o fracţie periodică , deci raţional .
Proprietatea 9. Fie T_n , $n \in \mathbb{N}^*$, un număr triunghiular. Atunci :
$T_1 + T_2 + \cdots + T_{2n-1} = 1^2 + 2^2 + \cdots + (2n-1)^2 = C_{2n+1}^3$.
Soluţie : Prima egalitate, pe care o notăm P(n), o demonstrăm prin inducţie matematică.
Pentru n=1 se obţine: P(1): $T_1 = \frac{1\cdot 2}{2} = 1^2$ (A)
Demonstrăm implicaţia P(k) $\Longrightarrow P(k+1), k \geq 1$.
Presupunem că propoziţia P(k) este adevărată , adică :
$T_1 + T_2 + \cdots + T_{2k-1} = 1^2 + 2^2 + \cdots + (2k-1)^2$
Şi demostrăm că P(k+1) este adevărată :
$T_1 + T_2 + \cdots + T_{2k-1} + T_{2k} + T_{2k+1} = 1^2 + 2^2 + \cdots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2$
Folosind P(k) adevărată, rezultă :
$T_1 + T_2 + \cdots + T_{2k-1} + T_{2k} + T_{2k+1} =$
$= 1^2 + 2^2 + \cdots + (2k-1)^2 + \frac{2k(2k+1)}{2} + \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} =$
$= 1^2 + 2^2 + \cdots + (2k-1)^2 + \frac{(2k+1)(4k+2)}{2} =$
$= 1^2 + 2^2 + \cdots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2$
$\Longrightarrow$ P(k+1) este adevărată.

Cele două etape fiind verificate, conform metodei inducţiei matematice rezultă că P(n) este o propoziţie adevărată, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Pentru a demonstra partea a doua a egalității ,folosim formula de descompunere a combinărilor : $C_n^k = C_{n+1}^{k+1} - C_n^{k+1}$

$T_1 + T_2 + \cdots + T_{2n-1} = C_2^2 + C_3^2 + \cdots + C_{2n}^2 =$
$= C_3^3 + (C_4^3 - C_3^3) + \cdots + (C_{2n+1}^3 - C_{2n}^3) = C_{2n+1}^3$.

Proprietatea 10. Dacă un număr întreg *n* este suma a două numere triunghiulare $\left(n = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{l(l+1)}{2}\right)$, atunci numărul 4*n*+1 este o sumă de pătrate :
$4n + 1 = x^2 + y^2$.

Reciproc , dacă $4n + 1 = x^2 + y^2$, atunci *n* este o sumă de două numere triunghiulare.

Soluție : Dacă $n = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{l(l+1)}{2}$, atunci :

$$4n + 1 = 2k(k+1) + 2l(l+1) + 1 = 2k^2 + 2k + 2l^2 + 2l + 1 =$$
$$= (k^2 + l^2 + 1 + 2k + 2l + 2kl) + (k^2 + l^2 - 2kl) = (k + l + 1)^2 + (k + l)^2$$
$$= x^2 + y^2.$$

Reciproc , presupun că $4n + 1 = x^2 + y^2$, cu $x, y \in \mathbb{Z}$. Deoarece $4n + 1$ este impar, atunci x sau y este impar .

Consider $k = \frac{x+y-1}{2}$, $l = \frac{x-y-1}{2}$. Atunci :

$\frac{k(k+1)}{2} + \frac{l(l+1)}{2} = \frac{(x+y)^2-1}{8} + \frac{(x-y)^2-1}{8} = \frac{2x^2+2y^2-2}{8} = \frac{x^2+y^2-1}{4} = \frac{4n+1-1}{4} = n$.

Proprietatea 11. Dacă *a* este un număr întreg pozitiv, numărul
$E(a) = (a^2 + a - 1)(a^2 + 3a + 1)+1$ este dublul unui număr triunghiular.

Soluție : $E(a) = (a^2 + a - 1)(a^2 + 3a + 1)+1 =$
$= (a^2 + a - 1)(a^2 + a + 1) + (a^2 + a - 1) \cdot 2a + 1 =$
$= (a^2 + a)^2 - 1 + 2a(a^2 + a - 1) + 1 =$
$= (a^2 + a)^2 + 2a(a^2 + a) - 2a =$
$= a^4 + 4a^3 + 3a^2 - 2a = a^2(a^2 + 4a + 4) - a^2 - 2a =$
$= a^2(a + 2)^2 - (a^2 + 2a) = (a^2 + 2a)^2 - (a^2 + 2a) =$
$$= (a^2 + 2a)(a^2 + 2a - 1) = 2\frac{(a^2 + 2a)(a^2 + 2a - 1)}{2} = 2T_{a^2+2a-1}$$

Proprietatea 12. Să se găsească numărul natural $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât diferența numerelor triunghiulare $T_{n+k} - T_n$ să fie număr prim.

Soluție : $T_{n+k} - T_n = \frac{(n+k)(n+k+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{k(k+1+2n)}{2}$

Diferența $T_{n+k} - T_n$ este număr prim $\Longrightarrow k = 1$ sau $k = 2$ (deoarece $k + 1 + 2n > k$).

Pentru $k = 1 \Longrightarrow T_{n+k} - T_n = n + 1 = p$, unde *p* este un număr prim , de unde $n = p - 1$.

Pentru $k = 2 \Longrightarrow T_{n+k} - T_n = 2n + 3 = p$, unde p este un număr prim , de unde $n = \frac{p-3}{2}$.

Bibliografie:

- Radovici-Mărculescu, P. *Probleme de teoria elementară a numerelor* , Bucureşti,Editura Tehnică, 1986.
- Popovici,C.,*Teoria numerelor,* Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică, 1973.

Asupra problemei L219

Prof. Daniel Văcaru

Colegiul Economic „Maria Teiuleanu”, Piteşti

De – a lungul timpului, am observat că problemele de construcţie cu rigla şi compasul nu sunt foarte dese. Reflectând asupra acestui tip de probleme am constatat că rezolvarea unei astfel de probleme necesită o gândire aprofundată şi o cunoaştere a fenomenului din spatele acestui tip de probleme. Să revenim la subiectul nostru, şi să ne reamintim enunţul problemei:

Problema L219 (*Rec.Mat.1/2011*) Fie dat un triunghi ABC şi numerele $m \geq n \geq 1$.naturale Construiţi cu rigla şi compasul punctele A' din planul triunghiului pentru care triunghiul $A'BC$ are perimetrul şi aria de m, respectiv n ori mai mare decât cele ale triunghiului ABC.

Am împărţit problema în două subpuncte separate:

A) Dându – se un triunghi ABC şi un număr n, să se determine locul geometric al punctelor A' astfel încât aria triunghiului $A'BC$ să fie egală cu n. S(ABC). Să se construiască cu rigla şi compasul acest loc geometric

B) Cunoscându – se locul geometric de la A), să se determine, cu rigla şi compasul, punctele A', aparţinând acestui loc geometric, cu proprietatea că perimetrul triunghiului satisface relaţia $P_{(A'BC)} = m \cdot P_{(ABC)}$.

Să începem rezolvarea cu ce este mai uşor, adică punctul A). Dacă se cunoaşte triunghiul, se poate determina înălţimea din A, cu rigla şi compasul. Cerinţa este atunci foarte simplu de îndeplinit, dacă construim două drepte, aflate la o distanţă $n \cdot h_a$ de de dreapta suport a lui

[*BC*]. Acesta este locul geometric căutat. Pentru a putea construi cele două drepte, câte una în fiecare semiplan determinat de dreapta *BC,* în *B*, respectiv *C*, construim perpendiculare pe dreapta *BC*, d_1 şi d_2, pe care, cu ajutorul compasului, determinăm punctele aflate la distanţa $n \cdot h_a$ de *B*, respectiv *C*. Unind punctele aflate în acelaşi semiplan, obţinem cele două drepte, totalitatea locului geometric căutat.

A mai rămas de rezolvat următoarea

Problemă. Să se construiască, cu rigla și compasul, un triunghi, atunci când se cunoaște aria *S*, semiperimetrul *p* și lungimea unei laturi *a*.

Rezolvare. Să presupunem problema rezolvată. Să păstrăm notațiile obișnuite pentru un triunghi. În consecință, vom fi interesați de a afla și construi laturile *b* și *c* pentru acest triunghi. Să ne reamintim, că, prin urmare avem $a + b + c = 2p$.

Se știe, via Heron, că: $S=\sqrt{(p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c))}$, aşadar

$$\left(\frac{S^2}{p\cdot(p-a)}=(p-b)\cdot(p-c)\right)\rightarrow\left(\frac{S^2}{p\cdot(p-a)}-p^2+(2\cdot p-a)\cdot p=b\cdot c\right)\rightarrow$$
$$\rightarrow\left(\frac{S^2}{p\cdot(p-a)}+p^2-a\cdot p=b\cdot c\right)\ .$$

Prin urmare, trebuie să rezolvăm, mai întâi obișnuit, apoi grafic (i.e., cu rigla și compasul), ecuația de gradul II

$$t^2-(2\cdot p-a)\cdot t+\left(\frac{S^2}{p\cdot(p-a)}+p^2-a\cdot p\right)=0\quad ,$$

care are discriminantul $\Delta=(2\cdot p-a)^2-4\cdot\left(\frac{S^2}{p\cdot(p-a)}+p^2-a\cdot p\right)=a^2-4\cdot\left(\frac{S^2}{p\cdot(p-a)}\right)$ Prin urmare

$$\{b,c\}=\left\{p-\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{\left(a^2-\frac{4\cdot S^2}{p\cdot(p-a)}\right)}}{2},\ p+\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{\left(a^2-\frac{4\cdot S^2}{p\cdot(p-a)}\right)}}{2}.\right\}$$

Segmente de lungime p și $\frac{a}{2}$ se pot construi cu ușurință, relativ la această problemă, și vom face acest lucru în algoritmul de construcție. Rămâne să găsim un mod de a construi cu rigla și compasul, un segment de lungime $\sqrt{\left(a^2-\frac{4\cdot S^2}{p\cdot(p-a)}\right)}$. Să observăm că $\sqrt{\left(a^2-\frac{4\cdot S^2}{p\cdot(p-a)}\right)}=\sqrt{\left(a^2-\frac{a^2\cdot h_a^2}{p\cdot(p-a)}\right)}$. Prin urmare, vom începe construcția segmentului de lungime $\sqrt{\left(a^2-\frac{a^2\cdot h_a^2}{p\cdot(p-a)}\right)}$, folosind teorema înălțimii și bazându – ne pe geometria de clasa a VII – a. .Cunoaștem segmentul [*BC*]. Pe semidreapta [CB construim un segment de lungime p, iar pe semidreapta opusă construim un segment de lungime $p-a$. În acest mod am obținut un nou segment [$B'C'$], de lungime $2p-a$. Construim acum un semicerc de diametru $2p-a$. În C ridicăm o perpendiculară pe dreapta BC și intersectăm această perpendiculară cu semicercul construit anterior. Am obținut un triunghi dreptunghic MBC de înălțime $\sqrt{(p\cdot(p-a))}$. În B avem deja ridicat un segment care este noua înălțime a triunghiului (de n ori înălțimea inițială). Construim un semicerc de diametru [*BC*] și segmentul [*MN*] (notat [*MP*]) congruent cu înălțimea ridicată în B. În P construim perpendiculara pe [*MC*], pe care o intersectăm cu segmentul [*MB*] în Q. Folosind asemănarea, deducem că $PQ=BC\cdot\left(\frac{h_a}{\sqrt{(p\cdot(p-a))}}\right)$. Acest segment va fi purtat în compas în C și se va trasa un cerc de rază PQ. Acesta se intersectează cu cercul deja construit, de diametru [*BC*], în R. Segmentul BR are lungimea $\sqrt{\left(a^2-\frac{a^2\cdot h_a^2}{p\cdot(p-a)}\right)}$, cum ne asigură teorema lui Pitagora.

În acest moment, avem gata justificările teoretice pentru construcția noastră. Putem deci introduce algoritmul de construcție, pentru datele inițiale:

1. Prima etapă este construirea înălțimii triunghiului dat. Acest lucru se face utilizând proprietățile rombului, pe care îl vom folosi având două vârfuri, și ca urmare latura sa. Fie latura [*AB*]. Cu deschiderea compasului dată de AB, construim un cerc de rază AB, cu centrul în A pe care îl intersectăm cu latura BC, obținând punctul D. Cu centrele în B, respectiv D, construim cercuri de aceeași rază, anume AB, care se interpectează în E. Dreapta AE este suportul înălțimii, căci știm cu toții că un romb are diagonalele perpendiculare.
2. Să construim acum două drepte paralele cu BC, situate la o distanță de $n\cdot h_a$, în cele două semiplane. Pentru început, în B și în C ridicăm două perpendiculare pe BC, folosind cunoștințele despre mediatoare. Simetrizăm punctele B față de C și C față de B, folosind compasul. Apoi construim mediatoarele celor două segmente astfel construite. Cunoaștem deja distanța h_a. Va fi foarte ușor de construit două perechi de

puncte (B', B''), (C', C'') la distanța $n \cdot h_a$ de B, respectiv C. Să menționăm că B', C' și respectiv B'', C'' sunt în același semiplan. Unind B' cu C', respectiv B'', C'' obținem dreptele care formează locul geometric din prima parte a rezolvării problemei.

3. Construim apoi un segment de lungime noul semiperimetru, în modul următor. Construim mai întâi un segment de lungime perimetrul triunghiului, folosind ca suport dreapta BC intersectată cu un cerc de centru B și rază $[BA]$, respectiv cu centrul în C și de rază $[CA]$. În acest mod, notând B_1, respectiv C_1, cele două intersecții astfel aflate, am construit un segment de lungime perimetrul triunghiului. Să – l multiplicăm cu un număr este atunci ușor, iar apoi folosim construcția mediatoarei, putem cu ușurință să – l înjumătățim.
4. În final, construim, cu vârful în B, respectiv în C segmente de lungimi

$$\{b, c\} = \left\{ p - \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{\left(a^2 - \frac{4 \cdot S^2}{p \cdot (p-a)}\right)}}{2}, p + \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{\left(a^2 - \frac{4 \cdot S^2}{p \cdot (p-a)}\right)}}{2}. \right\}$$

folosind construcția de la punctul B).

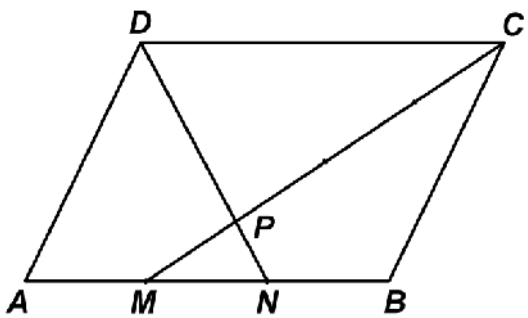
3.Metode de rezolvare a unor probleme de geometrie plană cu ajutorul geometriei vectoriale

Prof. Gabriela Jupenschi,
Colegiul Tehnic „Petru Poni” Oneşti

Voi prezenta, în cele ce urmează, două probleme de geometrie plană dintre care una va fi rezolvată atât cu ajutorul geometriei plane, cât şi a celei vectoriale, iar cealaltă va fi rezolvată doar vectorial, rămânând cititorilor să găsească o soluţie folosind doar geometria plană.

1. Fie *ABCD* un paralelogram . Se consideră punctele $M \in (AB)$ şi $N \in (AB)$ astfel încât $[AM] \equiv [MN] \equiv [NB]$ şi punctul $P \in (CM)$ astfel încât $\frac{MP}{PC} = \frac{1}{3}$. Să se arate că punctele *D*, *P* şi *N* sunt coliniare.

Un model de rezolvare cu ajutorul geometriei plane ar fi următorul:



Din ipoteză avem că $AM = MN = NB \Rightarrow AB = 3MN \Rightarrow DC = 3MN \Rightarrow \frac{MN}{DC} = \frac{1}{3}$.

Considerăm dreptele $DC \parallel AB$ şi CM secantă. Rezultă că: $\sphericalangle DCM \equiv \sphericalangle CMB$ (unghiuri alterne interne congruente) $\Rightarrow \sphericalangle DCP \equiv \sphericalangle PMN$

Din ipoteză avem că $\frac{MP}{PC} = \frac{1}{3}$. Folosind rezultatul: $\frac{MN}{DC} = \frac{1}{3}$ obţinem că $\frac{MP}{PC} = \frac{MN}{DC}$.

Prin urmare, $\frac{MP}{PC} = \frac{MN}{DC}$ şi $\sphericalangle PMN \equiv \sphericalangle DCP$. Conform cazului de asemănare L.U.L. avem că $\Delta MNP \sim \Delta CDP$.

Din definiţia asemănării triunghiurilor avem: $\sphericalangle MPN \equiv \sphericalangle CPD$.

Notăm cu $x = m(\sphericalangle MPN) = m(\sphericalangle CPD)$. Punctele C, P, M sunt coliniare $\Rightarrow m(\sphericalangle CPM) = 180° \Rightarrow m(\sphericalangle CPN) = 180° - x$

$m(\sphericalangle DPN) = m(\sphericalangle DPC) + m(\sphericalangle CPN) \Rightarrow m(\sphericalangle DPN) = x + 180° - x \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\sphericalangle DPN) = 180° \Rightarrow$ punctele D, P, N sunt coliniare.

Însă coliniaritatea punctelor *D*, *P* şi *N* ar putea fi demonstrată şi cu ajutorul geometriei vectoriale. Expunem această metodă de rezolvare doar pentru elevii care au făcut cunoştinţă cu geometria vectorială, adică pentru elevii care au terminat clasa a IX-a, semestrul I.

Un model de rezolvare a acestei probleme cu ajutorul geometriei vectoriale ar putea fi următorul:

Punctele *D*, *P*, şi *N* sunt coliniare dacă vectorii $\overrightarrow{DP}$ şi $\overrightarrow{DN}$ sunt coliniari. Vectorii $\overrightarrow{DP}$ şi $\overrightarrow{DN}$ sunt coliniari dacă şi numai dacă există un număr real α nenul, astfel încât $\overrightarrow{DP} = \alpha \cdot \overrightarrow{DN}$.

Folosind *regula triunghiului* şi *regula paralelogramului* de adunare a vectorilor avem:

$$\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\big(\overrightarrow{MB} +$$
$$+\overrightarrow{BC}\big) = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} = -\frac{4}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} \Rightarrow$$

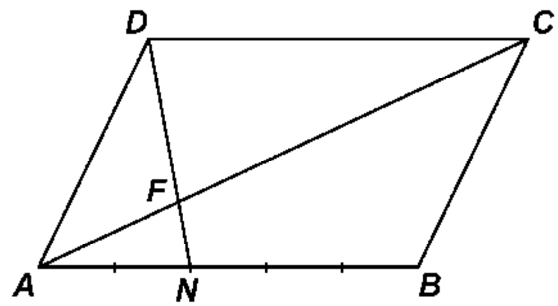
$\Rightarrow \overrightarrow{DP} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (1).

$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AN} \Rightarrow \overrightarrow{DN} = -\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Înmulţim ultima relaţie cu $\frac{3}{4}$ şi obţinem că: $\frac{3}{4}\overrightarrow{DN} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (2).

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă că: $\overrightarrow{DP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DN}$. Deci, vectorii $\overrightarrow{DP}$ şi $\overrightarrow{DN}$ sunt coliniari. Prin urmare, punctele *D*, *P*, şi *N* sunt coliniare.

2. Fie paralelogramul *ABCD*. Se consideră punctul $N \in AB$ astfel încât $\frac{AN}{NB} = \frac{2}{3}$ şi $DN \cap AC = \{F\}$. Să se calculeze raportul $\frac{AF}{FC}$.

Un model de rezolvare a acestei probleme cu ajutorul geometriei vectoriale ar putea fi următorul:



Considerăm $\frac{AF}{AC} = \frac{1}{\alpha}$ şi $\frac{NF}{ND} = \frac{1}{\beta}$

Folosind *regula triunghiului* şi *regula paralelogramului* de adunare a vectorilor avem: $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{\alpha}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{1}{\alpha}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{1}{\alpha}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{\alpha}\overrightarrow{AD}$ (1).

Dar, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{\beta}\overrightarrow{ND} \Rightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{\beta}\left(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AD}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{\beta}\cdot\left(-\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}\right) + \frac{1}{\beta}\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{2\beta-2}{5\beta}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{\beta}\overrightarrow{AD}$ (2).

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă că:

$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} = \frac{2\beta-2}{5\beta} \Rightarrow 5\beta = 2\beta^2 - 2\beta \Rightarrow 2\beta^2 - -7\beta = 0 \Rightarrow \beta(2\beta - 7) = 0 \Rightarrow \beta = 0$

, ceea ce este fals, sau $\beta = \frac{7}{2}$. De aici rezultă că $\alpha = \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{1}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7} \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{2}{5}$.

4.Solutions of the problems J235, J237, J239, S235, O235 and O236 of MR 4 (2012)

By TITU ZVONARU, Comăneşti, Romania, and
NECULAI STANCIU, Buzău, Romania

Junior problems

J235. In the equality $\sqrt{\overline{ABCDEF}} = \overline{DEF}$, different letters represent different digits. Find the six-digit number $\overline{ABCDEF}$.

Proposed by Titu Andreescu, University of Texas at Dallas, USA

We have that:

$$\overline{ABCDEF} = \overline{DEF}^2 \Leftrightarrow 1000 \cdot \overline{ABC} = \overline{DEF}\left(\overline{DEF} - 1\right).$$

Therefore, the natural numbers $\overline{DEF}$ and $\overline{DEF} - 1$ are coprime, and in LHS we have the factor 5 with the power at the least 3 (the same is happen with the factor 2).

$\overline{DEF}$	$\overline{DEF}(\overline{DEF} - 1)$	
125	$125 \cdot 124 = 5^3 \cdot 2^2 \cdot 31$	
126	$126 \cdot 125 = 5^3 \cdot 2 \cdot 63$	
250	$250 \cdot 249 = 5^3 \cdot 2 \cdot 249$	
251	$251 \cdot 250 = 5^3 \cdot 2 \cdot 251$	
375	$375 \cdot 374 = 5^3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 187$	
376	$376 \cdot 375 = 5^3 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 47$	
501	$501 \cdot 500 = 5^3 \cdot 2^2 \cdot 501$	=
625	$625 \cdot 624 = 5^4 \cdot 2^4 \cdot 39$	
626	$626 \cdot 625 = 55^4 \cdot 2 \cdot 313$	
750	$750 \cdot 749 = 5^3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 749$	
751	$751 \cdot 750 = 5^3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 751$	
875	$875 \cdot 874 = 5^3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 437$	
876	$876 \cdot 875 = 5^3 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 219$	

Yields the following possibilities:

From this it follows that:

$$376^2 = 141376 \text{ (which not works because } A = C \text{) and } 625^2 = 390625.$$

Hence:

$$\overline{ABCDEF} = 390625.$$

J237. Prove that the diameter of the incircle of a triangle ABC is equal to $\frac{AB-BC+CA}{\sqrt{3}}$ if and only if $\angle BAC = 60^\circ$.

Proposed by Titu Andreescu, University of Texas at Dallas, USA

With usual notations and from well-known formulas:

$$r = \frac{F}{s},\ F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\ \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$$

we have that:

$$2r = \frac{b+c-a}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow r\sqrt{3} = s-a \Leftrightarrow \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}\cdot\sqrt{3} = s-a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(s-b)(s-c)}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{s(s-a)} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\cos\frac{A}{2} \Leftrightarrow tg\frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{A}{2} = 30^0 \Leftrightarrow A = 60^0 \text{ (because } 0^0 < \frac{A}{2} < 90^0\text{).}$$

The proof is complete.

J239. Let a and b be real numbers so that $2a^2 + 3ab + 2b^2 \le 7$. Prove that

$$\max\{2a+b, 2b+a\} \le 4.$$

Proposed by Titu Andreescu, University of Texas at Dallas, USA

If $2a+b<0$ or $2b+a<0$ we don't have what to prove.
We assume by absurd that:

$$2a+b>4 \text{ and } 2b+a>4.$$

We deduce successively that:

$$4a^2+4ab+b^2>16,$$
$$a^2+4ab+4b^2>16,$$

which by adding, yields that:

$$5a^2+8ab+5b^2>32 \Rightarrow 7(5a^2+8ab+5b^2)>32\cdot 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7(5a^2+8ab+5b^2)>32(2a^2+3ab+2b^2) \Rightarrow 29a^2+29b^2+40ab<0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+\frac{40}{29}ab<0 \Rightarrow \left(a+\frac{20}{29}b\right)^2+\frac{441b^2}{841}<0\text{, false!}$$

Hence, we are done.

Senior problems

S235. Solve the equation

$$\frac{8}{\{x\}}=\frac{9}{x}+\frac{10}{[x]},$$

where $[x]$ and $\{x\}$ denote the greatest integer less or equal than x and the fractional part of x, respectively.

Proposed by Titu Andreescu, University of Texas at Dallas, USA

Denoting by:

$$\{x\}=p, [x]=t\text{, with } 0<p<1 \text{ and } t \text{ integer}, t\neq 0,$$

we have that:

$$\frac{8}{p}=\frac{9}{p+t}+\frac{10}{t} \Leftrightarrow 8pt+8t^2=9pt+10p^2+10pt \Leftrightarrow 10p^2+11pt-8t^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2p-t)(5p+8t)=0.$$

Yields that:

(i) $p=-\frac{8t}{5} \Rightarrow 0<-\frac{8t}{5}<1 \Rightarrow -5<8t<0$, so we don't have solutions;

(ii) $p=\frac{t}{2} \Rightarrow 0<\frac{t}{2}<1 \Rightarrow 0<t<2 \Rightarrow t=1, p=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{3}{2}$.

Hence, we have one solutions, i.e. $x=\frac{3}{2}$.

Olympiad problems

O235. Solve in integers the equation

$$xy-7\sqrt{x^2+y^2}=1.$$

Proposed by Titu Andreescu, University of Texas at Dallas, USA

It is obvious that x and y are coprime and have the same sign.We can assume that $x, y > 0$ .We take $x = 2mn, y = m^2 - n^2$ and then the given equation becomes:
$2mn(m^2 - n^2) - 7(m^2 + n^2) = 1$, and for $n = 1, m = 4$ we obtain $x = 8, y = 15$.
Hence we deduce the solutions: $(x, y) \in \{(15,8), (-8,-15), (-15,8), (8,15)\}$.
Continue (homework).

O236. Let a, b, c be positive real numbers. Prove that

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} + \frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{3(a+b+c)}{2(ab+bc+ca)}.$$

Proposed by Mircea Lascu and Marius Stanean, Zalau, Romania

By calculation we have that:

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{a(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} - \frac{3a}{2(ab+bc+ca)} =$$
$$= \frac{(a-b)(ab^2c + 2a^3b + a^2b^2) + (a-c)(abc^2 + 2a^3c + a^2c^2)}{2(a+b)(b+c)^2(c+a)\sum_{cyc} ab},$$

and analogous:

$$\frac{b}{(c+a)^2} + \frac{b(a+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} - \frac{3b}{2\sum_{cyc} ab} =$$
$$= \frac{(b-c)(abc^2 + 2b^3c + b^2c^2) + (b-a)(a^2bc + 2ab^3 + a^2b^2)}{2(a+b)(b+c)(c+a)^2\sum_{cyc} ab}.$$

Also by calculation we deduce that:

$$\frac{(a-b)(ab^2c + 2a^3b + a^2b^2)}{2(a+b)(b+c)^2(c+a)\sum_{cyc} ab} + \frac{(b-a)(a^2bc + 2ab^3 + a^2b^2)}{2(a+b)(b+c)(c+a)^2\sum_{cyc} ab} =$$
$$= \frac{(a-b)^2(2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 + 2a^2bc + 2ab^2c - abc^2)}{2(a+b)(b+c)^2(c+a)^2\sum_{cyc} ab}.$$

Therefore the given inequality becomes:

$$(b-c)^2 S_a + (c-a)^2 S_b + (a-b)^2 S_c \geq 0,$$

where:

$$S_a = (b+c)(2b^3c + 3b^2c^2 + 2bc^3 + 2ab^2c + 2abc^2 - a^2bc),$$
$$S_b = (a+c)(2ac^3 + 3a^2c^2 + 2a^3c + 2abc^2 + 2a^2bc - ab^2c),$$

$$S_c = (a+b)(2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 + 2a^2bc + 2ab^2c - abc^2).$$

WLOG $a \geq b \geq c$.

Since,

$$a^3c \geq ab^2c \text{, we have that } S_b \geq 0.$$

It remains to show that:

$$S_a + S_b \geq 0 \text{ and } S_b + S_c \geq 0.$$

From the sum $S_a + S_b$ omit some positively and look only at the next:

$$2ab^2c^2 - a^2b^2c - a^2bc^2 + 2a^2bc^2 - a^2b^2c - ab^2c^2 + 2a^4c =$$

$$= ab^2c^2 + a^2bc^2 + 2a^4c - 2a^2b^2c \geq 0 \text{, because } a \geq b \geq c.$$

Analogous:

$$S_b + S_c \geq 0 \text{, and we are done.}$$