MATEmatică și INFOrmații din învățământul ROmânesc

www.mateinfo.ro

Revista Electronică MateInfo.ro
- Revistă LUNARĂ -

August 2013
ISSN 2065 – 6432

ARTICOLE :

Coordonator: Andrei Octavian Dobre
E-mail pentru articole:
revistaelectronica@mateinfo.ro

1. O rafinare şi o generalizare pentru Problema VIII. 169, din Recreaţii Matematice, Nr. 2/2013

de Nela Ciceu[1] și Roxana Mihaela Stanciu[2]

Problema în discuţie are următorul enunţ:

''*Pentru* $a,b,c \in R_+^*$, *demonstraţi inegalitatea:*

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2} \geq \frac{3(a+b+c)}{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

Marian Cucoaneș, Mărășești''

Prezentăm în continuare trei soluţii, o rafinare și o generalizare a acestei inegalităţi.

1. Folosind inegalitatea lui *Bergström*, obţinem:

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}=\frac{a^2}{ab^2+ac^2}+\frac{b^2}{bc^2+ba^2}+\frac{c^2}{ca^2+cb^2} \geq$$
$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2},$$

şi atunci este suficient să demonstrăm că

$$2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 3(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2),$$

care se scrie succesiv:

$$2(a^3+b^3+c^3)+2(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2) \geq$$
$$\geq 3(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2)$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3-a^2b-ab^2+b^3+c^3-b^2c-bc^2+c^3+a^3-a^2c-ac^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (a^2-b^2)(a-b)+(b^2-c^2)(b-c)+(c^2-a^2)(c-a) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b)+(b-c)^2(b+c)+(c-a)^2(c+a) \geq 0,$$

evident adevărată. Avem egalitate dacă şi numai dacă $a=b=c$.

2. Avem:

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}-\frac{3(a+b+c)}{2(a^2+b^2+c^2)}=\sum\left(\frac{a}{b^2+c^2}-\frac{3a}{2(a^2+b^2+c^2)}\right)=$$
$$=\sum\frac{a(2a^2+2b^2+2c^2-3b^2-3c^2)}{2(b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)}=$$
$$=\frac{1}{2(a^2+b^2+c^2)}\sum\left(\frac{a(a^2-b^2)}{b^2+c^2}+\frac{a(a^2-c^2)}{b^2+c^2}\right)=$$
$$=\frac{1}{2(a^2+b^2+c^2)}\left(\sum\frac{a(a^2-b^2)}{b^2+c^2}+\sum\frac{a(a^2-c^2)}{b^2+c^2}\right)=$$

[1] Roșiori, Bacău
[2] Liceul cu Program Sportiv ''Iolanda Balas Soter'', Buzău

$$=\frac{1}{2(a^2+b^2+c^2)}\left(\sum\frac{a(a^2-b^2)}{b^2+c^2}+\sum\frac{b(b^2-a^2)}{c^2+a^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2(a^2+b^2+c^2)}\sum\frac{(a^2-b^2)[a(c^2+a^2)-b(b^2+c^2)]}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)}=$$

$$=\frac{1}{2(a^2+b^2+c^2)}\sum\frac{(a-b)^2(a+b)(a^2+ab+b^2+c^2)}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)}\geq 0.$$

Deoarece $a^2+ab+b^2+c^2>a^2+b^2+c^2$, am obţinut următoarea rafinare a inegalităţii date:

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}\geq\frac{3(a+b+c)}{2(a^2+b^2+c^2)}+\frac{1}{2}\sum\frac{(a-b)^2(a+b)}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)}.$$

3. Vom demonstra inegalitatea mai generală:

$$\frac{a^m}{b^n+c^n}+\frac{b^m}{c^n+a^n}+\frac{c^m}{a^n+b^n}\geq\frac{3(a^m+b^m+c^m)}{2(a^n+b^n+c^n)},$$

unde $m,n\in N$.

Putem presupune că $a\geq b\geq c$. Atunci:

$$a^m\geq b^m\geq c^m,\text{ şi } b^n+c^n\leq c^n+a^n\leq a^n+b^n\Leftrightarrow\frac{1}{b^n+c^n}\geq\frac{1}{c^n+a^n}\geq\frac{1}{a^n+b^n}.$$

Aplicând inegalitatea lui *Cebâşev* şi apoi inegalitatea dintre media aritmetică şi media armonică, obţinem:

$$\frac{a^m}{b^n+c^n}+\frac{b^m}{c^n+a^n}+\frac{c^m}{a^n+b^n}\geq\frac{1}{3}(a^m+b^m+c^m)\left(\frac{1}{b^n+c^n}+\frac{1}{c^n+a^n}+\frac{1}{a^n+b^n}\right)\geq$$

$$\geq\frac{1}{3}(a^m+b^m+c^m)\cdot\frac{9}{b^n+c^n+c^n+a^n+a^n+b^n}=\frac{3(a^m+b^m+c^m)}{2(a^n+b^n+c^n)}.$$

Pentru $m=1,n=2$ obţinem inegalitatea de la care am pornit, iar pentru $m=n=1$ obţinem inegalitatea lui *Nesbitt*.

2. CALCULUL UNOR DETERMINANȚI

Profesor : ANGELICA UNGUREANU
Școala: LICEUL "ALEXANDRU CEL BUN"- BOTOȘANI

Fie matricea A= $\begin{pmatrix} 1\ a_1\ a_1^2 \dots a_1^n \\ 1\ a_2\ a_2^2\ \dots a_2^n \\ \dots\dots\dots \\ 1\ a_n\ a_n^2\ \dots a_n^n \end{pmatrix}_{(n,n+1)}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, unde

$a_1, a_2, \dots, a_n$ sunt numere reale distincte două câte două. Notăm A_j matriea pătratică obținută din *A* prin eliminarea coloanei ce conține puterile de exponent j, $j = \overline{0,n}$. Vom calcula det(A_j), $j = \overline{0,n}$.

Dacă $j = n$, notez Δ= det(A_n)= $\begin{vmatrix} 1\ a_1\ a_1^2 \dots a_1^{n-1} \\ 1\ a_2\ a_2^2\ \dots a_2^{n-1} \\ \dots\dots\dots \\ 1\ a_n\ a_n^2\ \dots a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq l<k\leq n}(a_k - a_l)$.

Notez Δ_i determinantul obținut din Δ prin înlocuirea coloanei *i* cu coloana *n+1* din *A*

Pentru a calcula determinanții Δ_i, fie sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 + a_1^2 x_3 + \cdots + a_1^{n-1} x_n = -a_1^n \\ x_1 + a_2 x_2 + a_2^2 x_3 + \cdots + a_2^{n-1} x_n = -a_2^n \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_1 + a_n x_2 + a_n^2 x_3 + \cdots + a_n^{n-1} x_n = -a_1^n \end{cases}$$

cu necunoscutele x_i, $i = \overline{1,n}$.

Fie ecuația de grad *n* :

$$(2): x_1 + x_2 X + x_3 X^2 + \cdots + x_n X^{n-1} + X^n = 0.$$

Ecuațiile sistemului (1) exprimă faptul că $a_1, a_2, \dots, a_n$ sunt soluțiile ecuației (2).

Relațiile lui Viete pentru ecuația (2) sunt :

$$\sum a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_i = (-1)^i x_{n-i+1}, i = \overline{1,n}$$

$$\Rightarrow x_{n-i+1} = (-1)^i \sum a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_i,$$

$$\Rightarrow x_i = (-1)^{n-i+1} \sum a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-i+1}, i = \overline{1,n}$$

Deoarece determinantul sistemului (1) este $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ sistemul este compatibil determinat cu soluțiile (formulele lui Cramer) :

$$x_i = \frac{-\Delta_i}{\Delta}, i = \overline{1,n}$$

$$\Rightarrow \Delta_i = -x_i \cdot \Delta$$

$$\Rightarrow \Delta_i = (-1)^{n-i}\left(\sum a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-i+1}\right) \cdot \Delta, \quad i = \overline{1,n}.$$

Dar $\det(A_i) = (-1)^{n-i+1} \cdot \Delta_{i+1}$, $i = \overline{0,n-1}$ și cum

$\Delta_{i+1} = (-1)^{n-i-1}\left(\sum a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-i}\right) \cdot \Delta$,

$\Rightarrow \det(A_i) = \left(\sum a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-i}\right) \cdot \Delta$, $i = \overline{0,n-1}$

$\Rightarrow \det(A_i) = \left(\sum a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-i}\right) \cdot \prod_{1 \le l < k \le n}(a_k - a_l)$, ,

$i = \overline{0,n-1}$.

<u>Exemplu</u> : pentru n=3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix}_{(3,4)}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^3 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det(A_0) = (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_3) \cdot \prod_{1 \le l < k \le 3}(a_k - a_l)$

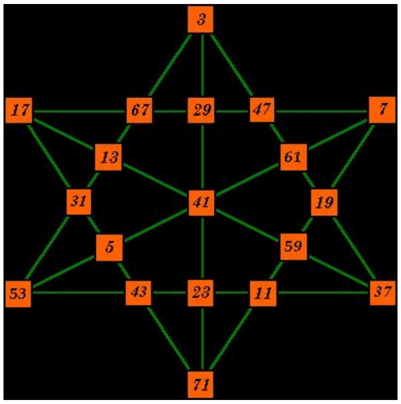
$\Rightarrow \det(A_1) = (a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_3) \cdot \prod_{1 \le l < k \le 3}(a_k - a_l)$

$\Rightarrow \det(A_2) = (a_1 + a_2 + a_3) \cdot \prod_{1 \le l < k \le 3}(a_k - a_l)$

$\Rightarrow \det(3) = \prod_{1 \le l < k \le 3}(a_k - a_l)$.

3. NUMERELE PRIME

Prof. Nistor Gabriela



Numere prime. Numerele naturale care nu se divid decât cu ele însuşi şi cu unu se numesc numere prime.

Numerele prime încep de la numărul 2.

Numere prime	2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

Descompunerea numerelor în factori primi :
Un număr care nu este prim poate fi descompus în factori primi.
La acelaşi rezultat se ajunge dacă îl descompunem pe 120 ca 10•12. Bazându-se pe algoritmul lui Euclid se poate demonstra unicitatea descompunerii în factori primi.

120 = 4 •30
4 = 2•2 30 = 2•15
15 = 3•5

Deci 120 = 2•2 • 2 • 3•5.

Cu ajutorul puterilor se poate scrie mai uşor descompunerea în factori primi:
de ex. 1 008 = 2•2•2•2•3•3•7 = $2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$.

Ciurul lui Eratostene. Matematicianul grec Eratostene (257-194 î.e.n.) a aplicat următoarea metodă pentru aflarea numerelor prime dintr-o parte a numerelor naturale. Se scrie şirul numerelor naturale de la 2 până la 100. Numărul 2 este prim, vom tăia toţi multiplii lui 2; 3 este număr prim, deci vom tăia toţi multiplii lui 3; tot aşa vom proceda şi cu 5; apoi va urma 7. Deoarece 7 × 7 = 49 < 100 şi 11 × 11 = 121 > 100, toate numerele care au rămas după ce am tăiat multiplii de 7 sunt prime.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

prima a 2-a a 3-a a 4-a ştergere din tabel.

Dacă de exemplu vrem să vedem ce fel de număr este 1 303 va trebui să verificăm dacă 1 303 este divizibil cu numerele prime p, care se bucură de proprietatea că

$q^2 < 1\ 303$; numerele prime q pentru care $q^2 > 1\ 303$ nu pot fi divizori ai lui 1 303. Pentru 1 303 trebuie să remarcăm dacă numerele prime $p = 2, 3, 5, ..., 31$ sunt divizorii lui 1 303, numărul prim 37 nu mai trebuie să fie verificat deoarece $37^2 = 1\ 369$.

CURIOZITĂŢI DESPRE NUMERE PRIME

Tablou cu şerpi cu numere prime

	4	3	4	1	3	4	
4	13	3	13	13	13	11	1
3	13	3	13	7	13	11	1
3	13	3	13	7	13	11	1
3	13	13	13	7	11	11	2
4	7	7	7	7	11	2	1
5	11	11	11	11	11	2	1
	1	1	1	1	3	2	

Condiţii:

1. Un şarpe este format din celule alăturate; el are un cap şi o coadă (deci nu este circular).
2. Şerpii au ca lungimi numere prime diferite (lungimea unui şarpe este egală cu numărul de celule din care este compus).
3. Un şarpe nu se poate atinge, nici măcar pe diagonală (orice două celule ale sale sunt sau complet disjuncte, sau au o latură comună).
4. Numerele de pe marginea tabloului arată numărul de celule de pe linia/coloana respectivă, ocupate de şarpele ce ocupă prima căsuţă a liniei/coloanei.

2010 din 10 numere prime

Expresie aritmetică al carei rezultat să fie 2010 folosind fix 10 numere prime distincte este: ***2-3-5-7+11*13*17-19*23+29=2010*****.**

Careuri magice cu nr. prime

43	**1**	**67**
61	**37**	**13**

7	**73**	**31**

Folosind numerele 1, 7, 13, 31, 37, 43, 61, 67, 73, se realizează un pătrat magic a cărei sumă pe orizontală, verticală, diagonală este 111.

7	**61**	**43**
73	**37**	**1**
31	**13**	**67**

Folosind aceleaşi numere 1, 7, 13, 31, 37, 43, 61, 67, 73, se realizează un alt pătrat magic a cărei sumă pe orizontală, verticală, diagonală este 333.

73939133

Cel mai mare număr prim cunoscut este **73939133**. Oricâte cifre ai reteza din coada lui, ceea ce rămâne este tot un număr prim.

Numere prime interesante

31 este număr prim
331 este număr prim
3331 este număr prim
33331 este număr prim
333331 este număr prim
3333331 este număr prim
33333331 este număr prim
Dar ce este **333333331**?
Se dovedeşte că el nu este prim, întrucât:

$$17 \times 19607843 = 333333331$$

Ceea ce arată că nu te poţi încrede niciodată în modele, doar pentru că, *în aparenţă,* sunt mereu valabile.

Matematicienilor le trebuie o demonstraţie.

Vânătoarea celor mai mari prime

Ca să găsim numere prime mici, o sită este un mijloc potrivit, dar ce facem în cazul celor mari? Este 523.367.890.103 un număr prim? Singurul mod de a afla este să verificăm dacă nu are vre-un divizor, şi asta durează. Cu toate acestea, matematicienii au găsit câteva numere prime surprinzător de mari. Cel mai mare, găsit până în prezent, are mai mult de 7,8 milioane de cifre. Dacă ai încerca să-l scrii de mână , ţi-ar trebui 7 săptămâni şi el ar ajunge la o lungime de 46 km.

Numerele prime în natură

Unele insecte folosesc numerele prime pentru a se proteja. Cicadele periodice (denumire dată insectelor homoptere cu corpul scurt și gros și cu capul mare, terminat printr-o proeminență ascuțită, al căror mascul emite un țârâit caracteristic; greier) petrec exact 13 sau 17 ani sub pământ, după care se reproduc şi apoi mor după câteva săptămâni

Steaua de mare are cinci braţe. Daca steaua de mare este prinsa de unul din braţe, evadează desprinzându-şi braţul. În locul acestuia creşte unul nou.